Der Höhenwinkel mit Rücksicht auf die Abplattung.

Von

Prof. Dr. Johannes Frischauf.

Ist M ein Punkt einer Ellipse mit den Halbaxen a und b, O deren Mittelpunkt; φ der Winkel der Normale in M mit der großen Axe, C deren Durchschnitt mit der kleinen Axe; wird MC = N, der Krümmungsradius von M mit R bezeichnet, so ist

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin \varphi^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad R = \frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Erde werde als Sphäroid vorausgesetzt. Sind φ und λ die geographische Breite und Länge des Punktes M, A ein Punkt in der Verlängerung der Normale CM, CA = N + h, so ist h die Höhe des Punktes A. Die Coordinaten dieses Punktes A sind, wenn der Äquator als xy-Ebene, die Rotations-Axe als z-Axe angenommen wird,

$$x = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$$
$$y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda$$
$$z = (N + h - Ne^2) \sin \varphi,$$

und analog für ein zweites Punktpaar M^1 und A^1. Es werde das erste Punktpaar M und A im Null-Meridian vorausgesetzt, d. h. $\lambda = 0$. Aus den Gleichungen der Geraden CA und AA^1 erhält man den Winkel CAA^1; wird dieser gleich $90^0 + H$ gesetzt, so ist H der Höhenwinkel des Punktes A^1. Dieser ist bestimmt durch

$$\sin H = \frac{U}{V},$$

$$U = (N^1 + h^1) \cos \omega - (N + h) - e^2 \sin \varphi\,(N^1 \sin \varphi^1 - N \sin \varphi)$$
$$V^2 = (N^1 + h^1)^2 + (N + h)^2 - 2\,(N + h)\,(N^1 + h^1) \cos \omega$$
$$- 2e^2 (N^1 \sin \varphi^1 - N \sin \varphi)\,[(N^1 + h^1) \sin \varphi^1 - (N + h) \sin \varphi]$$
$$+ e^4 (N^1 \sin \varphi^1 - N \sin \varphi)^2$$

$$\cos \omega = \cos \varphi \cos \varphi^1 \cos \lambda^1 + \sin \varphi \sin \varphi^1$$

ist, V bedeutet die Entfernung AA^1; ist U positiv, so ist H ein eigentlicher Höhenwinkel, ist U negativ, so ist H ein Tiefenwinkel.

Für die bequemere Berechnung setze man

$$\cos \lambda^1 = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} \lambda^{1^2}, \quad \cos \omega = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} \lambda^{1^2},$$

damit wird

$$\sin \tfrac{1}{2} \omega^2 = \sin \tfrac{1}{2} (\varphi^1 - \varphi)^2 + \cos \varphi \cos \varphi^1 \sin \tfrac{1}{2} \lambda^{1^2}$$

$$U = h^1 - h - 2 (N^1 + h^1) \sin \tfrac{1}{2} \omega^2$$
$$+ N^1 - N - e^2 \sin \varphi (N^1 \sin \varphi^1 - N \sin \varphi)$$

$$V^2 = (h^1 - h + N^1 - N)^2 + 4 (N + h) (N^1 + h^1) \sin \tfrac{1}{2} \omega^2$$
$$- 2 e^2 [(N^1 + h^1) \sin \varphi^1 - (N + h) \sin \varphi] (N^1 \sin \varphi^1 - N \sin \varphi)$$
$$+ e^4 (N^1 \sin \varphi^1 - N \sin \varphi)^2.$$

Beschreibt man aus einem beliebigen Mittelpunkte O mit dem Radius gleich 1 eine Kugelfläche, und zieht die Radien op, om, om^1 parallel der Rotations-Axe und den Normalen in M und M^1, so ist in dem sphärischen Dreiecke pmm^1

$$pm = 90^0 - \varphi, \; pm^1 = 90^0 - \varphi^1, \; mm^1 = \omega.$$

Der Winkel $pmm^1 = \alpha$ ist bestimmt durch

$$\sin \alpha = \frac{\cos \varphi^1 \sin \lambda^1}{\sin \omega},$$

dieser Winkel α kann als das sphärische Azimut des Punktes M^1 oder A^1 bezeichnet werden; dieses ist von dem sphäroidischen ϑ der Ebene durch die Normale CA und den Punkt A^1 mit dem Null-Meridian verschieden. Aus der Gleichung dieser Ebene erhält man

$$\tang \vartheta = \frac{(N^1 + h^1) \sin \omega \sin \alpha}{(N^1 + h^1) \sin \omega \cos \alpha - e^2 \cos \varphi (N^1 \sin \varphi^1 - N \sin \varphi)}.$$

Näherungsformeln. Werden $\varphi^1 - \varphi$ und λ^1, also auch ω, und ae gegen a, als kleine Größen erster Ordnung, h und h^1 als kleine Größen zweiter Ordnung vorausgesetzt, setzt man $\varphi_0 = \frac{1}{2} (\varphi + \varphi^1)$, $\psi = \frac{1}{2} (\varphi^1 - \varphi)$, so wird, wegen

$$N = a \left(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin \varphi^2 + \tfrac{3}{8} e^4 \sin \varphi^4 + \ldots\right),$$

$$N^1 - N \, e^2 \sin \varphi (N^1 \sin \varphi^1 - N \sin \varphi)$$
$$= 2 a e^2 \cos \varphi_0^2 \sin \psi^2 \left(1 + \tfrac{1}{4} e^2 [\sin \varphi^2 + 2 \sin \varphi \sin \varphi^1 + 3 \sin \varphi^{1^2}]\right)$$

$= 2\, ae^2 \cos \varphi_0{}^2 \sin \psi^2 (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin \varphi_0{}^2)$

einschließlich Glieder VI. Ordnung.

Die Glieder mit h und h^1 erster Potenz in V^2 geben vereinigt

$$-\, ae^2 (h^1 + h) (\sin \varphi^1 - \sin \varphi)^2.$$

Damit wird

$$U = h^1 - h - 2 (N^1 + h^1) \sin \tfrac{1}{2} \omega^2$$
$$+ 2\, ae^2 \cos \varphi_0{}^2 \sin \psi^2 (1 + \tfrac{3}{2} e^2 \sin \varphi_0{}^2)$$
$$V^2 = (h^1 - h)^2 + 4 (N + h) (N^1 + h^1) \sin \tfrac{1}{2} \omega^2$$
$$-\, 8\, a^2 e^2 \cos \varphi_0{}^2 \sin \psi^2 [1 + \frac{h + h^1}{2a} - \tfrac{1}{2} e^2 (1 + \sin \varphi_0{}^2)].$$

Wird statt des Sphäroides eine Kugel vom Radius ρ gewählt, so kann allgemein die Übereinstimmung der Ausdrücke U und V^2 einschließlich der kleinen Größen V. Ordnung nicht erreicht werden. Einschließlich der kleinen Größen IV. Ordnung findet die Übereinstimmung dann statt, wenn für ρ der durch das sphärische Azimuth α bestimmte Radius des Normalkrümmungskreises gewählt wird.

Einschließlich der kleinen Größen V. Ordnung ist

$$U = h^1 - h - 2 (N^1 + h^1) \sin \tfrac{1}{2} \omega^2 + 2\, ae^2 \cos \varphi_0{}^2 \sin \psi^2$$
$$V^2 = (h^1 - h)^2 + 4 (N + h) (N^1 + h^1) \sin \tfrac{1}{2} \omega^2$$
$$-\, 8\, a^2 e^2 \cos \varphi_0{}^2 \sin \psi^2.$$

Für eine Kugelfläche vom Radius ρ ist

$$U_1 = h^1 - h - 2 (\rho + h^1) \sin \tfrac{1}{2} \omega^2$$
$$V_1{}^2 = (h^1 - h)^2 + 4 (\rho + h) (\rho + h^1) \sin \tfrac{1}{2} \omega^2,$$

welche Formel leicht unmittelbar aus dem Dreiecke der Punkte A, A^1 und Mittelpunkt der Kugel (ω ist der Winkel am Mittelpunkt) erhalten werden.

Dass die Größen U_1 und $V_1{}^2$ mit dem sphäroidischen U und V^2 einschließlich der kleinen Größen IV. Ordnung übereinstimmen, wird so bewiesen: Man kann mit einem Fehler III. Ordnung

$$N^1 - \rho = N - \rho,\ NN^1 - \rho^2 = N^2 - \rho^2 = 2a (N - \rho)$$

setzen; ferner ist

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\alpha^2}{R} + \frac{\sin\alpha^2}{N}{}^*,$$

oder entwickelt,

$$\rho = a\,(1 + \tfrac{1}{2}e^2 (\sin\varphi^2 - 2\cos\varphi^2\cos\alpha^2)$$

$$N - \rho = ae^2\cos\varphi^2\cos\alpha^2.$$

Nun ist

$$4\cos\varphi^2\cos\alpha^2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{\cos\varphi^2(\sin\omega^2 - \cos\varphi_1^{\,2}\sin\lambda_1^{\,2})}{\cos\frac{1}{2}\omega^2}$$

wofür auch

$$4\cos\varphi^2(\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 - \cos\varphi_1^{\,2}\sin\tfrac{1}{2}\lambda_1^{\,2})$$

oder $4\cos\varphi_0{}^2\sin\psi^2$ gesetzt werden kann. Rechnet man daher die Größen U_1 und $V_1{}^2$ mit dem Normalkrümmungs-Radius ρ, so werden diese Größen genau einschließlich der Glieder IV. Ordnung und damit die Größen sin H oder H und $V = AA^1$ genau einschließlich der Glieder III. Ordnung erhalten.

Aus sin H erhält man

$$\operatorname{tang} H = \frac{h^1 - h - 2(\rho + h^1)\sin\frac{1}{2}\omega^2}{(\rho + h^1)\sin\omega}.$$

Aus dem Vorstehenden erhellet, dass der Einfluß der Abplattung auf den Höhenwinkel — also auch auf die Höhenbestimmung — sehr geringe ist. In der Praxis wird es genügen, wenn statt ρ ein mittlerer Radius, etwa $\sqrt{NR}$ für eine mittlere Breite, gewählt wird. Die dadurch herrührende Unsicherheit ist jedenfalls viel geringer als jene in Folge der terrestrischen Refraction[1], deren genaue Berücksichtigung kaum möglich ist. Für die Alpen genügt es $\rho = a$ zu setzen.

---

* Euler'scher Satz. Frischauf, Einleitung in die analytische Geometrie. Dritte Auflage. Art. 56 und 62. — Tafeln für log R und log N sowie für die Größen des Bessel'schen Erdsphäroides gibt H. Hartl in den „Mittheilungen des k. k. militär-geographischen Institutes“, XIV. Band, 1895.

[1] Dr. A. Walter, Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung. Leipzig, 1898.