Entwicklung der Eigenschaften collinearer Figuren.

Von Dr. **Johann Frischauf.**

Möbius gibt in seinem barycentrischen Calcul eine Ableitung der Eigenschaften collinearer Figuren durch die Betrachtung eines ebenen oder räumlichen Netzes; die Vorzüge dieser Ableitung bestehen darin, dass die Entstehung der collinearen Figuren unmittelbar ersichtlich ist. Die Fundamentaleigenschaften der collinear verwandten Figuren lassen sich jedoch aus den ersten Gründen des barycentrischen Calculs herleiten, wie hier gezeigt werden soll.

I. Ebene Figuren.

Nimmt man drei beliebige Puncte A, B, C als Fundamentalpuncte, so ist der Ausdruck eines vierten Punctes D:

$$D \equiv a A + b B + c C.$$

Einen beliebigen fünften Punct P kann man gegeben betrachten durch den Ausdruck:

$$P \equiv \varphi a A + \psi b B + \chi c C \qquad \text{I.)}$$

Nimmt man in der zweiten Ebene drei beliebige Puncte A', B', C' als Fundamentalpuncte an, und setzt einen beliebigen vierten Punct D' dem Puncte D der ersten Ebene als entsprechend, so wird der Ausdruck des Punctes D' sein:

$$D' \equiv a' A' + b' B' + c' C'$$

Um den Punct P' zu bestimmen, welcher dem Puncte P der ersten Ebene derartig entsprechen soll, dass das System der Puncte A, B, C, D, . . . P mit dem Systeme der Puncte A', B', C', D' . . . P' collinear verwandt sei, setze man:

$$P' \equiv \varphi a' A' + \psi b' B' + \chi c' C' \qquad \text{II.)}$$

wo φ, ψ, χ dieselben Werthe haben, wie in dem Ausdrucke des Punctes P.

Beide Systeme besitzen nun folgende Eigenschaften:

1) Liegen die Puncte P in einer Geraden, so bilden auch die Puncte P' eine Gerade.
2) Vier Puncte einer Geraden des einen Systems haben dasselbe Doppelverhältniss wie die vier entsprechenden Puncte des andern Systems.
3) Geraden, die sich in einem Puncte schneiden, entsprechen in der andern Figur Gerade, die sich in dem, dem ersten Puncte entsprechenden Puncte schneiden.
4) Das Doppelverhältniss von vier Geraden des einen Systems ist gleich dem Doppelverhältnisse der vier entsprechenden Geraden des andern Systems.

Beweis ad 1). Liegen die Puncte P in einer Geraden, so sind φ, ψ, χ lineare Functionen einer Veränderlichen, es bilden daher auch die Puncte P', da a' b' c' constante Zahlen sind, eine Gerade.

Beweis ad 2). Es seien K, L, M, N vier Puncte der ersten Ebene

$$\begin{aligned} k\,K &= \varkappa'\, a\,A + \varkappa''\, b\,B + \varkappa'''\, c\,C \\ l\,L &= \lambda'\, a\,A + \lambda''\, b\,B + \lambda'''\, c\,C \\ m\,M &= \mu'\, a\,A + \mu''\, b\,B + \mu'''\, c\,C \\ n\,N &= \nu'\, a\,A + \nu''\, b\,B + \nu'''\, c\,C \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen a A, b B, c C, d D, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\varkappa\, k\,K + \lambda\, l\,L + \mu\, m\,M + \nu\, n\,N = 0, \text{ oder}$$

$$\varkappa\, k\,K + \lambda\, l\,L \equiv \mu\, m\,M + \nu\, n\,N \equiv P,$$

wo P den Durchschnittspunct der Geraden K L und M N bedeutet.

$$\text{Aus } P \equiv \varkappa\, k\,K + \lambda\, l\,L \text{ folgt:}$$

$$\frac{KP}{PL} = \frac{\lambda\, l}{\varkappa\, k}$$

Ein anderer Punct Q der Geraden K L wird zum Ausdrucke haben:

$$Q \equiv \varkappa_1\, k\,K + \lambda_1\, l\,L, \text{ also}$$

$$\frac{KQ}{QL} = \frac{\lambda_1\, l}{\varkappa_1\, k}, \text{ daraus folgt:}$$

$$\frac{KP}{PL} : \frac{KQ}{QL} = \frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\lambda_1}{\varkappa_1}$$

$$\text{oder: } (K, L, P, Q) = \frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\lambda_1}{\varkappa_1}$$

Die Zahlen $\varkappa$, λ, $\varkappa_1$, λ_1 hängen blos von den Zahlen $\varkappa'$, $\varkappa''$ ... ab und sind unabhängig von a, b, c. Sind daher K', L', P', Q' die Puncte der zweiten Ebene, welche den Puncten K, L, P, Q der ersten entsprechen, so hat man ebenso:

$$(K', L', P', Q') = \frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\lambda_1}{\varkappa_1}$$

daher: $(K, L, P, Q) = (K', L', P', Q')$.

Beweis ad 3). Aus dem Ausdrucke für den Durchschnittspunct (baryc. Calcul §. 41) folgt, dass dem Durchschnittspunct zweier Geraden des einen Systems der Durchschnittspunct der entsprechenden Geraden des andern Systems entspricht, woraus dann 3) folgt.

Beweis ad 4). Den vier Geraden, die sich in einem Puncte schneiden, entsprechen nach 3) in der zweiten Ebene vier Gerade, welche sich ebenfalls in einem Puncte schneiden. Schneidet man beide Strahlenbüschel durch einander entsprechende Transversalen, so sind die Durchschnittspuncte wieder entsprechende Puncte, deren Doppelverhältnisse also nach 2) gleich sind. Das Doppelverhältniss der vier ersten Puncte ist aber gleich dem der vier ersten Strahlen, das Doppelverhältniss der vier letzten Puncte dem der vier Strahlen der zweiten Ebene. Es ist daher das Doppelverhältniss von vier Geraden des ersten Systems gleich dem der vier entsprechenden des zweiten Systems. Es haben daher die durch I und II construirten Systeme die Eigenschaften der Collineation.

II. Räumliche Figuren.

Man nehme in der ersten Figur vier Puncte A, B, C, D im Raume als Fundamentalpuncte, so wird der Ausdruck eines fünften Punctes E:

$$E \equiv aA + bB + cC + dD.$$

Ein beliebiger Punct P werde in der Form gedacht:

$$P \equiv \varphi aA + \psi bB + \chi cC + \omega dD.$$

Um zu diesem Systeme von Puncten ein collinear verwandtes zu construiren, nehme man vier beliebige Puncte A', B', C', D' als Fundamentalpuncte, setze einen beliebigen fünften Puncte E' dem Puncte E entsprechend, also:

$$E' \equiv a'A' + b'B' + c'C' + d'D'$$

Der dem Puncte P entsprechende Punct P' wird erhalten durch:

$$P' \equiv \varphi\, a' A' + \psi\, b' B' + \chi\, c' C' + \omega\, d' D'$$

Das System der ersten Puncte P ist dann mit dem der Puncte P' collinear verwandt.

Denn 1) Puncten einer Ebene oder Geraden entsprechen Puncte in einer Ebene oder Geraden.

2) Das Doppelverhältniss von vier Puncten, Strahlen oder Ebenen der ersten Figur ist gleich dem Doppelverhältniss der entsprechenden Gebilde der zweiten Figur.

Beweis ad 1). Bilden die Puncte P der ersten Figur eine Ebene oder Gerade, so sind die Grössen φ, ψ, χ, ω Functionen resp. zweier oder einer Veränderlichen ersten Grades, also auch die Coeffizienten des Punctes P'.

Beweis ad 2). Es seien K, L, M, R, S fünf beliebige Puncte der ersten Figur, so ist:

$$\begin{aligned}
k\,K &= \varkappa'\, a\,A + \varkappa''\, b\,B + \varkappa'''\, c\,C + \varkappa''''\, d\,D \\
l\,L &= \lambda'\, a\,A + \lambda''\, b\,B + \lambda'''\, c\,C + \lambda''''\, d\,D \\
m\,M &= \mu'\, a\,A + \mu''\, b\,B + \mu'''\, c\,C + \mu''''\, d\,D \\
r\,R &= \rho'\, a\,A + \rho''\, b\,B + \rho'''\, c\,C + \rho''''\, d\,D \\
s\,S &= \sigma'\, a\,A + \sigma''\, b\,B + \sigma'''\, c\,C + \sigma''''\, d\,D
\end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen fünf Gleichungen a A, b B, c C, d D, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\varkappa\, k\,K + \lambda\, l\,L + \mu\, m\,M + \rho\, r\,R + \sigma\, s\,S = 0$$

wo $\varkappa$, λ, μ, ρ, σ blos von $\varkappa'$, $\varkappa''$ ... abhängen.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\varkappa\, k\,K + \lambda\, l\,L + \mu\, m\,M \equiv \rho\, r\,R + \sigma\, s\,S \equiv P,$$

wo P der Durchschnittspunct der Ebene K L M mit der Geraden R S bedeutet.

Ist P' der entsprechende Punct der Ebene K' L' M', so ist

$$P' \equiv \varkappa\, k' K' + \lambda\, l' L' + \mu\, m' M'$$

d. h., die Puncte P einer Ebene K L M stehen mit den entsprechenden Puncten P' der Ebene K' L' M' in der Verwandtschaft der Collineation ebener Figuren, woraus dann die Gleichheit aller Doppelschnittsverhältnisse folgt.