Die Ebene und Gerade als Elemente eines dem barycentrischen analogen Calculs

von

Ferdinand Lippich,

Professor der Mechanik am l. Joanneum.

I.

Vorbemerkungen.

Bekanntlich hat Möbius durch seinen barycentrischen Calcul zur Behandlung der Geometrie ein Hilfsmittel geschaffen, das durch seine Erfolge in einer grossen Classe von Aufgaben einen bleibenden Werth errungen hat. In diesen Rechnungsmethoden werden die geometrischen Gebilde als Punktgebilde aufgefasst. Wie der Punkt sind aber auch die Ebene und die Grade einfache Elemente, aus denen geometrische Gebilde construirt werden können. Vermöge den Gesetzen der Reciprocität wird der Nachweis für die Existenz eines mit Ebenen und Geraden analog dem barycentrischen operirenden Calculs nicht nur von rein theoretischem Interesse sein, sondern als naturgemässe Ergänzung auch einen praktischen Nutzen liefern.

Im Folgenden soll dieser Nachweis durch ganz elementare geometrische Betrachtungen geliefert werden, die wo möglich den von Möbius angewendeten dual gegenüberstehend gewählt wurden. Da hiedurch die Analogie mit dem barycentrischen Calcul deutlich hervortritt, so ist es dann an der Hand desselben auch leicht, die fundamentalen Aufgaben zu stellen und zu lösen, die einer weiteren Anwendung vorhergehen müssen. Ich habe es daher unterlassen, hier näher auf derartige Specialisirungen und Anwendungen einzugehen und nur denjenigen Sätzen eine grössere Aufmerksamkeit zugewendet, die entweder den Zusammenhang mit dem barycentrischen Calcul klar stellen sollen, oder welche für weitere Ausführungen von Rechnungen von Wichtigkeit sind. Hieher gehören namentlich gewisse Transformationen der Ausdrücke, die sogleich näher charakterisirt werden wollen.

Bezeichnungen. Eine Ebene, Gerade und ein Punkt sollen beziehungsweise mit J, j und i bezeichnet werden. Diese Situationszeichen werden aber auch die Bedeutung mathematischer Grössen erhalten.

In allen Fällen, in denen ein Ausdruck, mag er aus Situationszeichen oder mathematischen Grössen bestehen, dahin gedeutet wird, dass er eine Ebene, eine Gerade oder einen Punkt bestimme, soll zwischen dem Ausdrucke und dem entsprechenden Situationszeichen das Zeichen $\equiv$ gesetzt werden.

Ist j der Durchschnitt zweier Ebenen J und J', i der gemeinsame Punkt dreier Ebenen J, J' J'', i der Durchschnittspunkt zweier Geraden jj' in der Ebene; i der Durchstosspunkt einer Geraden mit einer Ebene J; J die Ebene durch drei Punkte $i\,i'\,i''$, u. s. w., so pflegt man zu schreiben:

$$j \equiv JJ'; \; i \equiv JJ'J''; \; i \equiv jj'; \; i \equiv j\,J; \; J \equiv i\,i'\,i''.$$

Wird durch einen Punkt i eine Gerade gezogen, die eine Ebene J oder eine Gerade j scheidet, so soll die Länge der Strecke zwischen i und dem Durchschnitt mit $|Ji|$, $|i\,J|$; $|j\,i|$ bezeichnet werden.

Von den beiden Theilen des unendlichen Raumes, in welche derselbe durch eine Ebene zerfällt, soll der eine als positiv von dem andern als negativ unterschieden werden, und demgemäss auch die beiden Seiten der Ebene. Desgleichen sollen auch die beiden entgegengesetzten Richtungen einer Geraden auseinandergehalten werden.

Führt man zu einer Ebene eine Gerade oder zu einer Geraden eine Ebene, so bestimmt sich die positive Richtung der Geraden und die positive Seite der Ebene durch die Festsetzung, dass, vom Durchschnittspunkt aus gerechnet, die positive Richtung der Geraden in den positiven Theil des Raumes hineinfalle.

Die positive Richtung der Durchschnittslinie zweier Ebenen ist jene, von welcher aus gesehen die positiven Seiten der Ebenen im Sinne einer Rechtsdrehung liegen. Umgekehrt bestimmt sich hieraus aus einer gegebenen Ebene und einer in ihr liegenden Geraden, die positive Seite einer zweiten durch letztere geführten Ebene.

Wird in derselben Ebene zu einer Geraden eine zweite gezogen, so soll als positive Richtung der letzteren diejenige betrachtet werden, in welche durch eine Rechtsdrehung um den Durchschnittspunkt, die positive Richtung der ursprünglich gegebenen Geraden hineinfällt.

Bei parallelen Ebenen und Geraden sollen, wenn noch darüber willkürlich verfügt werden kann, die positiven Seiten gleich gerichtet angenommen werden.

Unter dem Winkel zweier Ebenen oder Geraden möge der kleinste Winkel verstanden werden, um welchen die Drehung zu geschehen hat, damit die positiven Seiten zusammenfallen.

Wie im barycentrischen Calcul durch Punkte und numerische Coefficenten andere Raumpunkte bestimmt werden durch gewisse Ausdrücke, so bestimmen ganz analoge Ausdrücke Ebenen und Gerade durch Ebenen und Gerade und numerische Coefficienten; und während der erstere Calcul mechanisch gedeutet auf Schwerpunkt-Bestimmungen basirt, bildet für den letzteren die Ermittlung der Resultante gegebener Kräfte die Grundlage.

Die früher angedeuteten Transformationen beziehen sich auf Aufgaben von der Natur der folgenden:

Wenn $i = JJ'J''$ ist, aus den gegebenen Ausdrücken der Ebenen durch Ebenen-Coefficienten, den Ausdruck von i in Punkt-Coefficenten zu finden.

Die Lösung aller dieser Aufgaben ist eine sehr einfache und geschieht nach demselben Principe. Man betrachtet nämlich $J'JJ''$ wie ein wirkliches Product und erhält durch Entwicklung desselben den gewünschten Ausdruck, indem man bezüglich der Situationszeichen-Producte gewisse Multiplicationsregeln einhält.

Es hätte zwar mehr den Kern der Sache getroffen, wenn ich sofort die Untersuchungen mit der Betrachtung eines imaginären

Zahl-Systemes (mit nicht commutativer Multiplication) in Verbindung gebracht hätte. Absichtlich sollten aber hier alle weniger elementaren Hilfsmittel ausgeschlossen bleiben.

Sätze über die geometrische Addition von Strecken.

Sind $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ die Längen beliebiger Strecken mit bestimmten Richtungen und bildet man einen polygonalen Linienzug, indem man immer an den Endpunkt einer Strecke die nächste mit ihrem Anfangspunkte und ihrer Richtung hinzufügt; so versteht man unter der geometrischen Summe dieser Strecken diejenige, welche den Anfangspunkt der Polygons mit dem Endpunkte verbindet. Ihre Richtung ist die Richtung vom Anfangspunkte zum Endpunkt.

Jede nach Länge und Richtung gegebene Strecke kann als Summe beliebig vieler Theilstrecken angesehen werden.

Eine Strecke von der Länge a und bestimmter Richtung soll mit $\overline{a}$ bezeichnet werden, so dass eine geometrische Summe ausgedrückt wird durch:

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} + \cdots\cdot$$

Die blosse Länge der geometrischen Summe schreiben wir a, $|\overline{a}|$, oder $|\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} + \cdots|$.

Von der geometrischen Summe $\overline{a}$ sind folgende Eigenschaften bekannt:

1) Die Summa $\overline{a}$ ist commutativ und distributiv.

2) Ersetzt man ohne die Richtungen zu ändern $a_1\, a_2\, a_3 \cdots$ durch die proportionalen Werthe $ka_1\ ka_2 ka_3 \ldots$, so ändert auch die Summe ihre Richtung nicht und ihre Länge geht über in ka.

3) Ist j irgend eine Gerade so ist, wenn:

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} + \cdots,$$

$$a \cos (aj) = a_1 \cos (a_1 j) + a_2 \cos (a_2 j) + a_3 \cos (a_3 j) + \cdots.$$

4) Ist J irgend eine Ebene und $\overline{a'}\ \overline{a'_1}\ \overline{a'_2} \cdots$ die Projectionen der Summenstrecke und der Theilstrecken auf diese Ebene, so ist

$$\overline{a'} = \overline{a_1}' + \overline{a_2}' + \overline{a_3}' + \cdots.$$

5) Die Länge der Summenstrecke findet man ausgedrückt durch die Theilstrecken in ihre Winkel aus

$$a^2 = \Sigma a_n^2 + \Sigma\, a_m\, a_n \cos (a_m\, a_n).$$

Hieraus ergeben sich leicht die weiteren Sätze, die später benöthiget werden und die hier im Zusammenhange nur mit theilweiser Herleitung versehen, angeführt sind.

6) Es sei $\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$. Führt man durch einen Punkt drei Gerade j, j_1, j_2 beziehungsweise parallel oder, in einer zur Dreiseit-Ebene von $\overline{a}\ \overline{a_1}\ \overline{a_2}$ parallelen Ebene, senkrecht zu den Richtungen von $\overline{a}\ \overline{a_1}\ \overline{a_2}$, so ist immer:

$$\frac{\sin\,(j_1\, j_2)}{a} = \frac{\sin\,(j\, j_2)}{a_1} = \frac{\sin\,(j\, j_1)}{a_2}.$$

Ebenso hat man für die Ebenen $J\ J_1\ J_2$, die durch dieselbe zur Ebene von $\overline{a}\ \overline{a_1}\ \overline{a_2}$ senkrechten Geraden beziehungsweise parallel oder senkrecht zu $\overline{a}\ \overline{a_1}\ \overline{a_2}$ geführt werden:

$$\frac{\sin\,(J_1\ J_2)}{a} = \frac{\sin\,(J\ J_2)}{a_1} = \frac{\sin\,(J\ J_1)}{a_2}.$$

Wie ersichtlich, gilt auch die Umkehrung dieses Satzes.

7) In der Ebene der Geraden $j\, j_1\, j_2$ und in einer Normalebene zum Durchschnitt der drei Ebenen $J\ J_1\ J_2$ soll ein Punkt i angenommen werden. Durch diesen Punkt ziehen wir Senkrechte zu den drei Geraden und zu den drei Ebenen. Die Längen der Perpendikel nehmen wir übereinstimmend mit obigen Festsetzungen positiv, wenn der Punkt i von der Geraden oder Ebene aus gerechnet auf der positiven Seite der Senkrechten liegt. Sodann ist immer:

$$a\,|\,j\,i\,| = a_1\,|\,j_1\,i\,| + a_2\,|\,j_2\,i\,|,$$
$$a\,|\,Ji\,| = a_1\,|\,J_1\,i\,| + a_2\,|\,J_2 i\,|.$$

8) Sollen drei Strecken $\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}$ die geometrische Summe Null geben, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{a_1}{\sin\,(a_2\ a_3)} = \frac{a_2}{\sin\,(a_3\ a_1)} = \frac{a_3}{\sin\,(a_1\ a_2)}$$

Zusatz a). Aendert man nur die Längen dreier Strecken $\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}$ in $\overline{a_1}'\ \overline{a_2}'\ \overline{a_3}'$ und soll die geom. Summe in beiden Fällen dieselbe sein, so müssen die Strecken $a_1'-a_1$, $a_2'-a_2$, $a_3'-a_3$ die Summe Null geben; daher ist die Bedingung dafür, dass, wenn

$$\overline{a_1}' \| \overline{a_1}, \quad \overline{a_2}' \| \overline{a_2}, \quad \overline{a_3}' \| \overline{a_3},$$

die Summe ungeändert bleibe:

$$\frac{a'_1 - a_1}{\sin\,(a_2\, a_3)} = \frac{a'_2 - a_2}{\sin\,(a_3\, a_1)} = \frac{a'_3 - a_3}{\sin\,(a_1\, a_2)}.$$

Zusatz b.) Soll bloss die Richtung der Summen von $\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}$ und $\overline{a_1}''\ \overline{a_2}''\ \overline{a_3}''$ ungeändert bleiben, so ist wegen

2), wenn $\overline{a_1}''\|\overline{a_1}$, $\overline{a_2}''\|\overline{a_2}$, $\overline{a_3}''\|\overline{a_3}$

ist, ein Faktor $k = \dfrac{|\overline{a_1}'' + \overline{a_2} + \overline{a_3}|}{|\overline{a_1}'' + \overline{a_2} + \overline{a_3}''|}$

vorhanden, so dass

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} = k\overline{a_1}'' + k\overline{a_2}'' + k\overline{a_3}''$$

wird. Die Bedingungsgleichung für obige Forderung wird daher

$$\frac{ka_1''-a_1,}{\sin(a_2\ a_3)} = \frac{ka_2''-a_2}{\sin(a_3\ a_1)} = \frac{ka_3''-a_3}{\sin(a_1\ a_2)}.$$

Zusatz c.) Wenn wie früher

$$(o) = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3}$$

ist und die Seiten $b_1\ b_2\ b_3$ eines Dreiecks sind parallel oder stehen senkrecht resp. zu $\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}$, so ist immer:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}.$$

9) Es soll die Bedingung dafür gefunden werden, damit vier Strecken $a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4$, deren Richtungen vorgeschrieben sind, die geometrische Summe Null geben.

Auflösung. Es seien durch O die vier vorgeschriebenen Richtungen gezogen $\overline{a_1}\ \overline{a_2}\ \overline{a_3}\ \overline{a_4}$ und vom Punkte A aus die vier Strecken, z. B. in der Ordnung der Indices aneinander gefügt, wobei der Endpunkt von a_4 mit dem Anfangspunkt zusammenfalle. Zieht man die Verbindungslinie b vom Eckpunkt $(a_4\ a_1)$ zum Eckpunkt $(a_2\ a_3)$, so zerfällt das räumliche Vierseit in zwei ebene Dreiseite, deren Ebenen an der Durchschnittskante b den Winkel β bilden mögen.

Aus $\quad \dfrac{a_2}{b} = \dfrac{\sin(a_1\ b)}{\sin(a_1\ a_2)}, \quad \dfrac{a_1}{b} = \dfrac{\sin(a_3\ b)}{\sin(a_3\ a_1)}$

folgt zunächst $\quad \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{\sin(a_3\ a_1)}{\sin(a_1\ a_2)}\ \dfrac{\sin(a_1\ b)}{\sin(a_3\ b)}$

Ferner ist:

$$\frac{\sin(a_1\ b)}{\sin(a_3\ b)} = \frac{\sin(b_1\ a_1, a_1\ a_1)\sin(a_1\ a_1)}{\sin\beta} : \frac{\sin(b_1\ a_2, a_2\ a_3)\ \sin(a_3\ a_2),}{\sin\beta}$$

wie sofort aus der Betrachtung der an b befindlichen Dreikante erhellt.

Berücksichtigt man noch die in O entstehenden Dreikante $(a_1\ a_2\ a_3)$, $(a_2\ a_3\ a_1)$, $(a_3\ a_1\ a_1)$, $(a_4\ a_1\ a_2)$ und bezeichnet für jedes derselben das constante Verhältniss der Sinusse der Ebenenwinkel zu den Sinussen der gegenüber liegenden Kantenwinkel der Reihe nach mit $\varepsilon_4\ \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$; so wird

$\sin(a_1\, a_2,\, a_2\, a_3) = \varepsilon_4 \sin(a_1\, a_3)$, $\sin(a_3\, a_4,\, a_4\, a_1) = \varepsilon_2 \sin(a_1\, a_3)$. Hiemit wird schliesslich

$$\frac{a_2}{a_4} = \frac{\varepsilon_2 \sin(a_3\, a_4) \sin(a_4\, a_1) \sin(a_1\, a_3).}{\varepsilon_4 \sin(a_1\, a_2) \sin(a_2\, a_3) \sin(a_3\, a_1).}$$

Sucht man in ähnlicher Weise die übrigen Verhältnisse der Streckenlängen, so gelangt man zu der Bedingungsgleichung:

$$\frac{a_1}{\varepsilon_1 [a_2\, a_3\, a_4]} = \frac{a_2}{\varepsilon_2 [a_3\, a_4\, a_1]} = \frac{a_3}{\varepsilon_3 [a_4\, a_1\, a_2]} = \frac{a_4}{\varepsilon_4 [a_1\, a_2\, a_3]}$$

in welcher die Producte der drei Sinusse durch ein einfaches Symbol ersetzt sind.

Zusatz *a*) In gleicher Weise wie unter 8) findet man als Bedingung dafür, dass

$$\overline{a'}_1 + \overline{a'}_2 + \overline{a'}_3 + \overline{a'}_4 = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \overline{a}_4$$

sei, wenn die Theilstrecken dieselben Richtungen haben, also

$$\overline{a'}_1 \| \overline{a}_1,\ \overline{a'}_2 \| \overline{a}_2,\ \overline{a'}_3 \| \overline{a}_3,\ \overline{a'}_4 \| \overline{a}_4$$

ist, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{a'_1 - a_1}{\varepsilon_1 [a_2\, a_3\, a_4]} = \frac{a'_2 - a_2}{\varepsilon_2 [a_3\, a_4\, a_1]} = \frac{a'_3 - a_3}{\varepsilon_3 [a_4\, a_1\, a_2]} = \frac{a'_4 - a_4}{\varepsilon_4 [a_1\, a_2\, a_3]}$$

Zusatz *b*) Soll blos die Richtung der Summen $\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \overline{a}_4$ und $\overline{a''}_1 + \overline{a''}_2 + \overline{a''}_3 + \overline{a''}_4$ ungeändert bleiben, während

$$\overline{a''}_1 \| \overline{a}_1,\ \overline{a''}_2 \| \overline{a}_2,\ \overline{a''}_3 \| \overline{a}_3,\ \overline{a''}_4 \| \overline{a}_4$$

ist, so lautet die Bedingungsgleichung (vergl. 8, Zus. b) wenn man

$$k = \frac{|\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \overline{a}_4|}{|\overline{a}_1'' + \overline{a}_2'' + \overline{a}_3'' + \overline{a}_4|}$$

macht

$$\frac{k a_1'' - a_1}{\varepsilon_1 [a_2\, a_3\, a_4]} = \frac{k a_2'' - a_2}{\varepsilon_2 [a_3\, a_4\, a_1]} = \frac{k a_3'' - a_3}{\varepsilon_3 [a_4\, a_1\, a_2]} = \frac{k a_4 - a}{\varepsilon_4 [a_1\, a_2\, a_3]}$$

Zusatz *c*) Wenn

$$a = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \overline{a}_4$$

und man legt senkrecht zu den vier Richtungen Ebenen, die nicht durch denselben Punkt gehen, nennt $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ die Flächeninhalte der das entstehende Tetraeder begrenzenden Dreiecksflächen, wobei A_1 senkrecht zu a_1 liegt u. s. f.; so ist immer:

$$\frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2} = \frac{A_3}{a_3} = \frac{A_4}{a_4}.$$

Beweis. Bezeichnet man die Kanten der Tetraeders mit $(A_1\ A_2)$, $(A_2\ A_3)\ldots.$, betrachtet einmal A_2 dann A_4 als Basis und rechnet das Volumen V, so hat man:

$$3\ V = A_2\ (A_1\ A_3) \sin (A_1\ A_3, A_3\ A_2) \sin (A_3\ A_2)$$
$$= A_4\ (A_1\ A_3) \sin (A_3\ A_1, A_1\ A_4) \sin (A_4\ A_1)$$

Nun ist aber

$$\sphericalangle\ A_3\ A_2 = \sphericalangle\ a_3\ a_2, \quad \sphericalangle\ A_1\ A_3, A_3\ A_2 = \sphericalangle\ a_1\ a_3, a_3\ a_2$$

u. s. f.

Macht man diese Substitutionen und bedenkt die Bedeutung der ε, so findet man

$$\frac{A_2}{A_4} = \frac{a_2}{a_4}$$

und in gleicher Weise die Gleichheit irgend eines anderen Paares von Verhältnissen.

II.

Bestimmung der Lage von Ebenen.

1) Die Ebene im Ebenenbüschel. Es seien zwei nicht parallele Ebenen J_1 und J_2 gegeben, ausserdem zwei Coefficienten A_1 und A_2. Man soll einen Punkt i so bestimmen, dass

$$1) \qquad A_1\ |J_1\ i| + A_2\ |J_2\ i| = o$$

ist. Um diese Aufgabe zu lösen, denke man sich zwei Längen A_1 und A_2 normal zu J_1 und J_2 genommen und sodann

$$\overline{A} = \overline{A_1} + \overline{A_2}$$

construirt. Zieht man durch $J_1\ J_2$ eine Ebene J senkrecht zur Richtung von $\overline{A}$, so hat jeder Punkt dieser Ebene die gewünschte Eigenschaft (I, 7.)

Es gibt nur eine solche Ebene J, denn für jeden ausserhalb der Ebene J gelegenen Punkt ist

$$1') \qquad A_1\,|J_1 i'| + A_2\,|J_2 i'| = A\,|Ji'|,$$

also nicht Null, da A nicht Null sein kann.

Zusätze. *a)* Die Lage der Ebene J ist nur abhängig von der Lage der beiden Ebenen J_1 und J_2 und von dem Verhältnisse $A_1 : A_2$ der Coefficienten (I, 2). Ist dieses Verhältniss positiv, so liegt J innerhalb, sonst ausserhalb des Winkels von J_1 und J_2. Durchläuft $A_1 : A_2$ alle möglichen positiven und negativen Werthe so nimmt J alle Lagen im Ebenenbüschel ein.

b) Für jede durch $J_1\ J_2$ gehende Ebene J ist nur ein einziger Werth von $A_1 : A_2$ vorhanden, so dass für irgend einen Punkt i derselben die Gleichung 1) besteht; denn kehrt man die in (II, 1) gelöste Aufgabe um, so handelt es sich um die Construction eines Dreiecks, dessen Winkel gegeben sind.

c) Betrachtet man J_1 und J_2 als Fundamental-Ebenen, so kann durch eine Gleichung wie 1') jede Ebene des Ebenenbüschels dargestellt werden. Da hiebei die Lage des Punktes i' ganz willkürlich ist, so kann keine Zweideutigkeit entstehen, wenn man obige Gleichung in der Form schreibt

$$A_1\,J_1 + A_2\,J_2 = A\,J.$$

Diese symbolische Gleichung erhält sogleich ihre algebraische Bedeutung; wenn man unter $J_1\ J_2\ J$ die von irgend einem, aber demselben Punkte auf die Ebenen gefällten Perpendikel versteht.

Durch die in I festgesetzten Bezeichnungen kann man als Ausdruck der Ebene J auch schreiben

$$J \equiv A_1\,J_1 + A_2\,J_2.$$

d) Von vier Ebenen des Büschels

$$J_1,\ J_2,\ J_3 \equiv A_1\,J_1 + A_2\,J_2,\ J_4 \equiv B_1\,J_1 + B_2\,J_2$$

soll der Werth des Doppelverhältnisses durch die Coefficienten ausgedrückt werden.

Aus

$$(J_1\ J_2\ J_3\ J_4) = \frac{\sin\,(J_1\ J_3)}{\sin\,(J_3\ J_2)} : \frac{\sin\,(J_1\ J_4)}{\sin\,(J_4\ J_2)}$$

folgt unter Berücksichtigung von (I, 6)

$$(J_1\ J_2\ J_3\ J_4) = \frac{A_2}{A_1} : \frac{B_5}{B_1}$$

Sollen die Ebenen $J_3\ J_4$ durch $J_1\ J_2$ harmonisch getrennt sein, so muss

$$\frac{A_2}{A_1} = -\,\frac{B_2}{B_1}$$

werden. Setzt man demnach das Verhältniss der Coefficienten gleich M, und bedenkt, dass man in den Ausdrücken der Ebenen den rechten Theil durch irgend einen Coefficienten dividiren darf, so sieht man, dass vier harmonische Ebenen immer auf die Formen gebracht werden können:

$$J_1,\ J_2,\ J_3 \equiv J_1 + M\,J_2,\ J_4 \equiv J_1 - M\,J_2.$$

2) Ebene im Ebenenbündel. Es seien drei nicht durch dieselbe Gerade gehende Ebenen J_1 J_2 J_3 gegeben, ausserdem drei Coefficienten A_1 A_2 A_3. Man soll einen Punkt i so bestimmen, dass

$$2) \qquad A_1 |J_1 i| + A_2 |J_2 i| + A_3 |J_3 i| = 0$$

ist.

Man denke sich drei Strecken, deren Längen A_1 A_2 A_3 sind normal zu J_1 J_2 J_3 genommen und sodann

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$$

construirt. Führt man durch $J_1 J_2 J_3$ eine Ebene J senkrecht zur Richtung von $\overline{A}$, so hat jeder Punkt dieser Ebene die gewünschte Eigenschaft.

Um dieses zu beweisen, bestimme man nach (II, 1) eine Ebene J' so dass

$$\overline{A'} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2; \quad A'|J'i| = A_1 |J_1 i| + A_2 |J_2 i|$$

wird. Sucht man dann ebenso wie in (II, 1) eine Ebene J, welche durch J' J_3, also auch durch $J_1 J_2 J_3$ hindurch geht und auf der Richtung von

$$\overline{A} = \overline{A'} + \overline{A}_3 = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$$

senkrecht steht, für welche also, wenn i in ihr liegend angenommen wird

$$A' |J' i| + A_3 |J_3 i| = 0$$

ist, so folgt auch durch Substitution für diese Ebene die zu erfüllende Gleichung.

Für jeden Punkt i', der nicht in J liegt, hat man

$$A' | J' i' | + A_3 | J_3 i' | = A | J i' |$$

und weil auch

$$A_1 | J_1 i' | + A_2 | J_2 i' | = A' | J' i |$$

ist, so folgt für jeden nicht in J liegenden Punkt

$$2') \qquad A_1 | J_1 i' | + A_2 | J_2 i' | + A_3 | J_3 i' | = A | J i' |,$$

also nicht Null, da $\overline{A}$ nicht Null werden kann, weil die Richtungen von $\overline{A}_1$ $\overline{A}_2$ $\overline{A}_3$ nicht in einer Ebene liegen. Es gibt also nur eine Ebene von der obigen Beschaffenheit und ist auch die Ordnung, in welcher man die früher zu ihrer Bestimmung angewendeten Constructionen ausführt, ganz willkürlich.

Zusätze. *a)* Die Lage der Ebene J im Ebenenbündel ist nur abhängig von der Lage der drei Ebenen J_1 J_2 J_3 und den Verhältnissen der drei Coefficienten $A_1 : A_2 : A_3$.

Durch Aenderung des Verhältnisses $A_1 : A_2$ durchläuft J' alle Lagen im Ebenenbüschel $J_1\, J_2$ und der Schnitt von J' auf J_3, durch welchen J geht, alle Lagen eines Strahlenbüschels in $J_1\, J_2\, J_3$. Da nun J durch Aenderung von $A' : A_3$ ebenfalls alle Lagen des Büschels durchläuft, dessen Träger der dem $A_1 : A_2$ entsprechende Schnitt $J'\, J_3$ ist; so kann je nach dem Werthe von $A_1 : A_2$ und $A' : A_3$ oder, was dasselbe ist, von $A_1 : A_2 : A_3$, J jede Lage im Ebenenbündel annehmen.

b) Für jede Ebene J im Bündel gibt es nur **ein** Werthsystem der beiden Verhältnisse $A_1 : A_2 : A_3$, so dass bezüglich irgend eines Punktes i derselben die Gleichung 2) besteht. Denn nimmt man senkrecht zu J die Länge A beliebig, so soll

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$$

sein, wobei die Richtungen von $\overline{A}_1\; \overline{A}_2\; \overline{A}_3$ vorgeschrieben sind. Der Endpunkt von $\overline{A}_1$ liegt aber in der durch den Endpunkt von $\overline{A}$ parallel zur Ebene $A_2\; A_3$ geführten Ebene, ist also bestimmt und hiedurch werden es dann auch die Längen von A_2 und A_3, da sie zwischen zwei Punkte nach gegebenen Richtungen einzuschreiben sind.

c) Betrachtet man $J_1\, J_2\, J_3$ als Fundamentalebenen, so kann durch eine Gleichung wie 2') jede Ebene des Ebenenbündels dargestellt werden. Auch hier kann man, wie in (II, 1, c.) auseinandergesetzt, abgekürzt schreiben:

$$A_1\, J_1 + A_2\, J_2 + A_3\, J_3 = A_4\, J$$

$$\text{oder } A_1\, J_1 + A_2\, J_2 + A_3\, J_3 \equiv J$$

oder, indem man durch einen der Coefficienten dividirt, noch einfacher

$$J_1 + M J_2 + N J_3 \equiv J.$$

d) Es seien J und J' zwei Ebenen des Bündels und

$$A\; J = A_1\; J_1 + A_2\; J_2 + A_3\; J_3,$$

$$A'\, J' = A'_1\, J_1 + A'_2\; J_2 + A'_3\; J_3,$$

unter A und A' immer die Längen der geometrischen Summen der rechts stehenden Coefficienten in der oben (II, 2) erläuterten Weise verstanden. Jede Ebene des Büschels $J\, J'$ kann dargestellt werden durch

$$A\, J + x\; A'\, J'$$

wo x eine veränderliche Grösse ist. Wegen der Bedeutung der Zeichen $J, J', J_1 \ldots$ ist es offenbar erlaubt, die obigen Ausdrücke zu substituiren und man erhält

$$(A_1 + x A'_1) J_1 + (A_2 + A'_2) J_2 + (A_3 + x A'_3) J_3,$$

welcher Ausdruck als der Durchschnittslinie $J J'$ angehörig betrachtet werden kann, da er alle Elemente des dem Träger $J J'$ zugehörigen Büschels umfasst.

3) Die Ebene im räumlichen Systeme. Es seien vier nicht durch denselben Punkt gehende Ebenen $J_1 J_2 J_3 J_4$ gegeben, ausserdem vier Coefficienten $A_1 A_2 A_3 A_4$. Man soll einen Punkt i so bestimmen, dass

3) $A_1 | J_1 i | + A_2 | J_2 i | + A_3 | J_3 i | + A_4 | J_4 i | = 0$ ist.

Man denke sich vier Strecken, deren Längen $A_1 A_2 A_3 A_4$ sind, resp. normal zu $J_1 J_2 J_3 J_4$ genommen und sodann

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4$$

construirt. Es wird vorausgesetzt, dass diese geometrische Summe nicht Null, also das aus den gegebenen Strecken gebildete Vierseit nicht geschlossen sei.

Nun construire man wie in 2) eine Ebene J', die durch $J_1 J_2 J_3$ hindurchgeht und auf der Richtung von

$$\overline{A'} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$$

senkrecht steht. Führt man dann durch den Schnitt $J' J_4$ eine Ebene J senkrecht zu A, so hat jeder Punkt dieser Ebene die gewünschte Eigenschaft.

In der That, ist i ein solcher Punkt, so hat man wegen (II, 2)

$$A_1 | J_1 i | + A_2 | J_2 i | + A_3 | J_3 i | = A' | J' i |.$$

Da aber

$$\overline{A} = \overline{A'} + \overline{A}_4,$$

so ist wegen (II, 1)

$$\overline{A'} | J' i | + A_4 | J_4 i | = 0,$$

woraus durch Substitution die Gleichung 3) folgt.

Für jeden nicht in J gelegenen Punkt i' hat man

$$A'_1 | J'_1 ; i' | + A_2 | J_2 i' | + A_3 | J_3 i' | = A' | J' i' | \text{ und}$$

$$A' | J' i' | + A_4 | J_4 i' | = A | J i' |,$$

woraus folgt:

3') $A_1 | J_1 i' | + A_2 | J_2 i' | + A_3 | J_3 i' | + A_4 | J_4 i' | = A | J i' |$

also nicht Null, da A der Voraussetzung gemäss nicht Null ist. Es gibt also nur eine Ebene, deren Punkte die Gleichung 3) erfüllen und es ist somit auch die Ordnung, in welcher man die früher zu ihrer Bestimmung angewendete Construction ausführt, ganz willkürlich.

Zusätze. *a*) Die Lage der Ebene J ist nur abhängig von der Lage der vier Ebenen $J_1\ J_5\ J_3\ J_4$ und den Verhältnissen der vier Coefficienten $A_1 : A_2 : A_3 : A_4$, denn nur von diesen Verhältnissen und nicht von den absoluten Werthen der Coefficienten hängt die Lage der Ebene J' im Ebenenbündel $J_2\ J_2\ J_3$ und der Ebene J im Ebenenbüschel $J'\ J_4$ ab. Je nach den Werthen der Verhältnisse $A_1 : A_2 : A_3$ kann J' jede Lage im Ebenenbündel $J_1\ J_2\ J_3$, somit auch der Schnitt von J' und J_4 auf dieser Ebene jede Lage annehmen. Da dann je nach dem Werthe von $A' : A_4$ oder A_4, J jede Lage im Ebenenbüschel $J'\ J_4$ annehmen kann, so kann J überhaupt jede Ebene des Raumes werden, denn jede Ebene des Raumes muss einem der Büschel $J'\ J_4$ angehören.

b) Für jede Ebene J des Raumes gibt es nur ein Werthsystem der Verhältnisse $A_1 : A_2 : A_3 : A_4$ so, dass bezüglich eines beliebigen Punktes i derselben die Gleichung 3) erfüllt wird. Denn nimmt man senkrecht zu J die Länge A beliebig, so soll

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4$$

sein, wobei die Richtungen von $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ vorgeschrieben sind. Die Ebene J schneide J_4 in $J\,J_4$. Durch diesen Schnitt und durch $J_1\ J_2\ J_3$ muss die Ebene J' gehen, deren Lage somit gegeben ist. Hiedurch ist aber auch die Richtung von $\overline{A}'$ bekannt, die mit $\overline{A}$ und $\overline{A}_4$ als Normalen zu J und J_4, die sich auf J' schneiden, zur selben Ebene parallel läuft. Zieht man also aus dem Anfangspunkt von A eine Parallele zu A' und aus dem Endpunkt eine Parallele zu A_4, so sind durch den Schnittpunkt derselben die Längen so bestimmt, dass

$$\overline{A} = \overline{A}' + \overline{A}_4$$

ist. Construirt man noch wie in (II, 2. b,)

$$\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 = \overline{A}'$$

so hat man für ein beliebiges A die vier Coefficienten bestimmt und somit ihre Verhältnisse eindeutig angegeben.

c) Betrachtet man $J_1\ J_2\ J_3\ J_4$ als Fundamentalebenen, so kann durch eine Gleichung wie 3) jede Ebene J des Raumes dargestellt werden. Auch hier kann man wie früher abgekürzt schreiben:

$$A_1 J_1 + A_2 J_2 + A_3 J_3 + A_4 J_4 = A J \text{ oder}$$
$$A_1 J_1 + A_2 J_2 + A_3 J_3 + A_4 J_4 \equiv J \text{ oder}$$
$$J_1 + M J_2 + N J_3 + P J_4 \equiv J.$$

d) Es seien J und J' zwei Ebenen und

$$A J = A_1 J_1 + A_2 J_2 + A_3 J_3 + A_4 J_4$$
$$A' J' = A'_1 J_1 + A'_2 J_2 + A'_3 J_3 + A'_4 J_4.$$

Jede Ebene des Büschels $J J'$ kann dargestellt werden durch

$$A J + x A' J',$$

somit wird

$$(A_1 + x A'_1) J_1 + (A_2 + x A'_2) J_2 + (A_3 + x A'_3) J_3 + (A_4 + x A'_4) J_4$$

der allgemeinste Ausdruck einer Geraden im Raume, aufgefasst als Träger aller Elemente des Büschels $J J'$.

e) Sind $J\ J'\ J''$ die Fundamentalebenen eines Bündels, so kann jede Ebene desselben, da sie der Lage nach durch zwei Coefficienten-Verhältnisse bestimmt ist, durch den Ausdruck

$$A J + x A' J' + y A'' J''$$

dargestellt werden. Setzt man hierin die Werthe von $A J \ldots$ ein, bezogen auf die früheren vier Fundamentalebenen, so wird

$$(A_1 + x A'_1 + y A''_1) J_1 + (A_2 + x A'_2 + y A''_2) J_2 + (A_3 + x A'_3 + y A''_3) J_3 + (A_4 + x A'_4 + y A''_4) J_4$$

der allgemeinste Ausdruck eines Punktes im Raume sein, aufgefasst als Träger aller Elemente des Bündels $J\ J'\ J''$.

f) Es sei unter Beibehaltung obiger Bedeutung

$$\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4 = 0.$$

In diesem Falle ist, da das aus den vier Strecken gebildete Vierseit geschlossen erscheint, die Richtung von

$$\overline{A'} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$$

direct entgegengesetzt der von A_4, daher sind die beiden Ebenen J' und J_4 parallel und der Durchschnitt $J' J_4$, durch welchen auch J hindurchgeht, unendlich entfernt.

Man kann aber auch die Ebene J erhalten, wenn man zuerst eine Ebene J'' sucht, die durch $J_2\ J_3\ J_4$ hindurchgeht und auf

$$\overline{A''} = \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \overline{A}_4$$

senkrecht steht. Es geht nämlich J auch durch den Schnitt $J'' J_1$ hindurch. Im gegenwärtigen Falle ist aber auch dieser Schnitt unendlich entfernt; somit ist die Ebene

$$J \equiv A_1 J_1 + A_2 J_2 + A_3 J_3 + A_4 J_4,\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0,$$

die unendlich entfernte Ebene, da sie durch zwei unendlich entfernte Gerade hindurchgeht, die in nicht parallelen Ebenen liegen.

Nach (*I, g, c*) verhalten sich die Coefficienten der unendlich entfernten Ebene wie die Inhalte der Seitenflächen des aus den Fundamentalebenen gebildeten Tetraeders.

4) E r g ä n z u n g. Nach dem Vorhergegangenen wird man sofort für das Ebenenbüschel, das Ebenenbündel und für das räumliche System die Richtigkeit des folgenden Satzes aus der beigefügten Construction erkennen.

Es seien die Ebenen $J_1\ J_2\ J_3 \ldots J_n$ gegeben, ausserdem die Coefficienten $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$. Diese Coefficienten betrachte man als Längen, normal gegen die Ebenen mit gleichen Indices gerichtet. Man bilde nacheinander die geometrischen Summen:

$$\overline{A_1} + \overline{A_2} = \overline{A'},\ \overline{A'} + \overline{A_3} = \overline{A''},\ \ldots\ldots \overline{A^{(n-2)}} + \overline{A_n} = \overline{A},$$

so dass schliesslich

$$\overline{A} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3} + \ldots\ldots + \overline{A_n}$$

ist. Sodann führe man die Ebenen $J'\ J'' \ldots\ldots J^{(n-2)}\ J$ senkrecht zu $\overline{A'}$, $\overline{A''} \ldots\ldots \overline{A^{(n-2)}}\ \overline{A}$ durch die Durchschnitte $J_1\ J_2$, $J'\ J_3$ $\ldots\ldots J^{(n-3)}$, J_{n-1}: $J^{(n-2)}\ J_n$. Dann gilt für jeden Raumpunkt i' die Gleichung

$$4')\quad A_1\,|J_1\,i'| + A_2\,|J_2\,i'| + \ldots\ldots + A_n\,|J_n\,i'| = A\,|J\,i'|$$

und sonach, wenn $\overline{A}$ nicht Null ist, nur für Punkte i der Ebene J die Gleichung

$$4)\quad A_1\,|J_1\,i| + A_2\,|J_2\,i| + \ldots\ldots + A_n\,|J_n\,i| = 0.$$

Es gibt also nur e i n e Ebene J, welche den Gleichungen 4) und 4') entspricht und ihre Lage ist daher von der Ordnung, in welcher obige Constructionen ausgeführt werden, ganz unabhängig. Ihre Lage ist nur abhängig von den Lagen der gegebenen Ebenen und den Verhältnissen der Coefficienten.

Z u s ä t z e. *a*) Die umgekehrte Aufgabe, für eine gegebene Ebene J aus den Lagen der Ebenen $J_1\ J_2\ J_3 \ldots\ldots J_n$ die Coefficientenverhältnisse zu bestimmen, wird unbestimmt, wenn n im Ebenenbüschel die Zahl 2, im Ebenenbündel die Zahl 3 und im räumlichen Systeme die Zahl 4 übersteigt.

Die oben in (*II*, 1, 2, 3) angewendete abgekürzte Schreibweise kann natürlich auch hier ohne Zweideutigkeit angewendet werden.

b) Obwohl die Construction zur Bestimmung der Ebene J voraussetzt, dass für die einzuhaltende Ordnung zwischen den Ebenen $J_1\ J_2$, $J'\ J_3$, $J''\ J_4 \ldots\ldots$ Durchschnitte in endlichen Entfernungen existiren, so gelten doch die Gleichungen 4) und 4') auch für den Fall als alle Ebenen $J_1\ J_2\ J_3 \ldots\ldots J_n$ zu einander parallel werden, also bei keiner zu wählenden Ordnung die erste Durchschnittslinie im Endlichen liegt.

Man denke sich in diesem Falle nur z. B. J_1 durch zwei sich auf J_1 schneidende Ebenen $J_x\ J_y$ ersetzt, so, dass wenn $A_x\ A_y$ als zwei zu $J_x\ J_y$ normale Längen betrachtet werden.

$$\overline{A_1} = \overline{A_x} + \overline{A_y} \text{ ist.}$$

Construirt man dann, was nach Früheren immer erlaubt ist, statt in der Ordnung

$$\overline{A_x} + \overline{A_y} = \overline{A_1},\ \overline{A_2} + \overline{A_3} = \overline{A'}, \ldots\ldots \overline{A^{(n-2)}} + \overline{A_n} = A$$

in der folgenden

$$A_y + A_2 = B',\ B' + A_3 = B'', \ldots\ldots, B^{(n-2)} + A_n = B^{(n-2.)}$$
$$B^{(n-1)} + A_x = A,$$

so erhält man, da jetzt die Ebenen $J_4\ J_2$ und somit auch die folgenden nicht mehr parallel laufen, lauter in der Endlichkeit gelegene Schnitte.

In allen Fällen bedeutet also

$$A_1\ J_1 + A_2\ J_2 + A_3\ J_3 + \ldots\ldots + A_n\ J_n = A\ J$$

eine ganz bestimmte Ebene, nur wird im Falle paralleler Ebenen der Coefficient A in die gewöhnliche Summe

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n$$

übergehen, während er im allgemeinen Falle aus (*I*, 5) zu berechnen ist.

Im Falle paralleler Ebenen lässt sich die Gleichung 4) noch auf andere Weise schreiben. Denkt man sich nämlich in den Ebenen $J_1\ J_2\ J_3 \ldots\ldots$ beliebige Punkte $i_1\ i_2\ i_3 \ldots\ldots$ und zieht aus diesen nach beliebiger Richtung Parallelen bis sie Ebene J schneiden, so sind diese Abschnitte $|\,i_1\ J\,|$, $|\,i_2\ J\,|$, $|\,i_3\ J\,| \ldots\ldots$ den früheren Senkrechten $|\,J_1\ i\,|$, $|\,J_2\ i\,|$, $|\,J_3\ i\,|$ aus irgend einem Punkte der Ebene J proportional, man hat daher:

$$4'')\quad A_1\,|\,i_1\,J\,| + A_2\,|\,i_2\,J\,| + A_3\,|\,i_3\,J\,| + \ldots\ldots = 0.$$

Endlich erkennt man sofort die Richtigkeit folgender Sätze:

Sind $A_1\ A_2\ A_3 \ldots\ldots$ Längen senkrecht zu gegebenen Ebenen $J_1\ J_2\ J_3 \ldots\ldots$, ist ferner J eine Ebene bestimmt durch

$$A\,J = A_1\,J_1 + A_2\,J_2 + A_3\,J_3 + \ldots,$$
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots,$$

so sind alle Ebenen zu einander parallel.

Ist

$$J \equiv A_1\,J_1 + A_2\,J_2$$

und zugleich J_1 parallel zu J, so muss auch J_2 parallel zu J sein.

c) Es seien die Punkte $i_1\;i_2\;i_3\;\ldots\;i_n$ im Raume gegeben, und die Coefficienten $A_1\;A_2\;A_3\;\ldots\;A_n$. Durch die Punkte sollen drei Schaaren paralleler Ebenen geführt und zu jeder Schaar die Ebene $J\;J'\;J''$ bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$A\,J = A_1\,J_1 + A_2\,J_2 + A_3\,J_3 + \ldots + A_n\,J_n,$$
$$A\,J = A_1\,J'_1 + A_2\,J'_2 + A_3\,J'_3 + \ldots + A_n\,J'_n,$$
$$A\,J'' = A_1\,J''_1 + A_2\,J''_2 + A_3\,J''_3 + \ldots + A_n\,J''_n,$$
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.$$

Sodann ist der Punkt

$$i \equiv J\,J'\,J''$$

der Schwerpunkt, der mit den Massen $A_1\;A_2\;A_3\;\ldots\;A_n$ behafteten Punkte $i_1\;i_2\;i_3\;\ldots\;i_n$.

Um dieses einzusehen, multiplicire man die zweite und dritte Gleichung mit beliebigen Coefficienten x und y und addire hierauf die ersten drei Gleichungen, so erhält man:

$$A\,(J + x\,J' + y\,J'') = \sum_{i=i}^{i=n} A_i\,(J_i + x\,J'_i + g\,J''_i\,).$$

Es sind aber

$$J + x\,J' + y\,J'' = |\,\overline{1} + \overline{x} + \overline{y}\,|.\;\;J'''$$
$$J_i + x\,J'_i + y\,J'' = |\,\overline{1} + \overline{x} + \overline{y}\,|.\;\;J'''_i$$

parallele Ebenen der Ebenenbündel in i und in i_i. Substituirt man diese Werthe und lässt den gemeinschaftlichen Factor fort, so wird obige Gleichung

$$A\,J''' = A_1\,J_1''' + A_2\,J_2''' + A_3\,J_3''' + \ldots + A_n\,J_n'''.$$

Dieses Resultat lässt sich so aussprechen:

Führt man durch die Punkte $i_1\;i_2\;i_3\;\ldots\;i_n$ eine beliebige Schaar paralleler Ebenen $J^{(\equiv)}_1\;J^{(\equiv)}_2\;J^{(\equiv)}_3\;\ldots\;J^{(\equiv)}_n$ und bestimmt mittelst der Coefficienten $A_1\;A_2\;A_3\;\ldots\;A_n$ eine Ebene $J^{(\equiv)}$ aus.

$$A\,J^{(\equiv)} = A_1\,J^{(\equiv)}_1 + A_2\,J^{(\equiv)}_2 + A'_3\,J^{(\equiv)}_3 + \ldots + A_n\,J^{(\equiv)}_n,$$

so geht jede solche Ebene $J^{(\equiv)}$ immer durch einen und denselben Punkt i hindurch.

Für jeden Punkt i' dieser Ebene $J^{(\varepsilon)}$ gilt die Gleichung

$$A_1 \mid J^{(\varepsilon)} i' \mid + A_2 \mid J^{(\varepsilon)}{}_2 \, i' \mid + \ldots . + A_n \mid J^{(\varepsilon)}{}_n \, i' \mid = 0,$$

die nach Gleichung 4'') in Zusatz b) mit derselben Bedeutung der dort gebrauchten Bezeichnungen auch durch die folgende ersetzt werden kann

$$A_1 \mid i_1 \, J^{(\varepsilon)} \mid + A_2 \mid i_2 \, J^{(\varepsilon)} \mid + A_3 \mid i_3 \, J^{(\varepsilon)} + \ldots . = 0,$$

Da diese Gleichung gilt, welche Lage auch $J^{(\varepsilon)}$ haben mag, indem $i_1 \; i_2 \; i_3 \ldots i_n$ für jede Schaar paralleler Ebenen unverändert bleiben, so kommt dem Punkte i dieselbe Eigenschaft zu, durch welche der Schwerpunkt der mit den Massen $A_1 \; A_2 \; A_3 \ldots A_n$ behafteten Punkte $i_1 \; i_2 \; i_3 \ldots i_n$ von Möbius geometrisch definirt worden ist.

d) Mit einer ganz naturgemässen Erweiterung der Bedeutung kann man eine allgemeine durch Gleichung 4') bestimmte Ebene J, die geometrische Summe der Ebenen $J_1 \; J_2 \; J_3 \ldots .$ nennen.

III.

Bestimmung der Lage von Geraden.

1) Die Gerade im Strahlenbüschel. Es seien zwei sich schneidende Gerade j_1 und j_2 gegeben, ausserdem zwei Coefficienten a_1 und a_2. Man soll

A) Eine durch $j_1 \; j_2$ gehende Ebene J so bestimmen, dass

$$1_A) \; a_1 \sin (j_1 \, J) + a_2 \sin (j_2 \, J) = 0;$$

B) einen in der Ebene von $j_1 \; j_2$ gelegenen Punkt i so bestimmen, dass

$$1_B) \; a_1 \mid j_1 \, i \mid + a_2 \mid j_2 \, i \mid = 0$$

ist. — Um diese Aufgaben zu lösen, denke man sich zwei Längen a_1 und a_2 parallel zu j_1 und j_2 genommen und

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$$

construirt. Zieht man durch $j_1 \; j_2$ eine Gerade j parallel zu $\overline{a}$, so erfüllt jede durch diese Gerade geführte Ebene die Gleichung 1_A, und jeder in der Geraden gelegene Punkt die Gleichung 1_B.

Die Richtigkeit dieser Lösung ergibt sich für 1_A aus (I, 3). wenn man die Normale zur Ebene J zieht, und für 1_B aus (I, 7), Dieselben Sätze zeigen auch, dass nur eine Gerade j möglich sei, denn für jede nicht durch j gehende Ebene J' und für jeden nicht in j liegenden Punkt i' hat man die respectiven Gleichungen

$1'_A$) $a_1 \sin(j_1 J') + a_2 \sin(j_2 J') = a \sin(j J')$,

$1'_B$) $a_1 \mid j_1 i' \mid + a_2 \mid j_2 i' \mid = a \mid j i' \mid$,

sobald nur J' durch $j_1 \; j_2$ geht und i' in der Ebene von j_1 und j_2 liegt. Der rechte Theil ist also nicht Null.

Zusätze. *a*) Die Lage der Geraden j ist nur abhängig von der Lage der beiden Geraden j_1 und j_2 und von dem Verhältnisse $a_1 : a_2$ der Coefficienten (*I*, 2). Durchläuft $a_1 : a_2$ alle möglichen positiven und negativen Werthe, so durchläuft j alle Strahlen des Strahlenbüschels.

b) Für jede durch $j_1 \; j_2$ gehende Gerade j ist nur ein einziger Werth von $a_1 : a_2$ vorhanden, so, dass die Gleichungen 1_A und 1_B gelten.

c) Betrachtet man j_1 und j_2 als Fundamental-Strahlen, so kann durch eine Gleichung wie $1'_A$ oder $1'_B$ jeder Strahl des Büschels dargestellt werden. Da hiebei J' und i' ganz willkürlich sind, so kann keine Verwirrung entstehen, wenn man in der Bezeichnung des Sinus oder der Senkrechten nur das Zeichen der gegebenen Geraden beibehält, also symbolisch für beide Gleichungen schreibt

$$a_1 \, j_1 + a_2 \, j_2 = a \, j,$$

wobei man sich unter $j_1 \; j_2 \; j$ hier noch nach Belieben die Sinusse oder die Perpendikel zu denken hat, um der symbolischen Gleichung ihre algebraische Bedeutung wieder zu geben.

d) Das Doppelverhältniss von vier Strahlen

$$j_1, \; j_2, \; j_3 = a_1 \, j_1 + a_2 \, j_2, \; j_4 = b_1 \, j_1 + b_2 \, j_2$$

ist, durch die Coefficienten ausgedrückt:

$$(j_1 \, j_2 \, j_3 \, j_4) = \frac{a_2}{a_1} : \frac{b_2}{b_1} \; .$$

Vier harmonische Strahlen, von denen $j_1 \; j_2$ durch $j_3 \; j_4$ getrennt sind, können immer auf die Formen gebracht werden:

$$j_1, j_2, j_3 = j_1 + m j_2, j_4 = j_1 - m j_2.$$

(Man vergleiche die Zusätze zu II, 1.)

2) Die Gerade im Strahlenbündel. Es seien drei nicht in derselben Ebene gelegene, aber durch einen Punkt gehende Gerade $j_1 \, j_2 \, j_3$ gegeben, ausserdem drei Coefficienten $a_1 \; a_2 \; a_3$. Man

soll eine durch den gemeinsamen Punkt gehende Ebene J so bestimmen, dass

2) $a_1 \sin (j_1 J) + a_2 \sin (j_2 J) + a_3 \sin (j_3 J) = 0$ ist.

Man nehme drei Längen $a_1\ a_2\ a_3$ parallel zu $j_1\ j_2\ j_3$ und construire sodann

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3};$$

führt man durch den Schnittpunkt der drei Geraden eine Gerade parallel zu $\overline{a}$, so hat jede durch diese Gerade gehende Ebene die verlangte Eigenschaft.

Sucht man nämlich nach (III, 1 A) eine Gerade j', so dass also

$\overline{a'} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$; $a' \sin (j' J) = a_1 \sin (j_1 J) + a_2 \sin (j_2 J)$

ist, hier auf eine zu

$$\overline{a} = \overline{a'} + \overline{a_3} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3}$$

parallele Gerade, also die Gerade j; so wird für die durch sie gehende Ebene J

$$a' \sin (j' J) + a_3 \sin (j_3 J) = 0,$$

woraus durch Substitution die Gleichung 2) hervorgeht.

Für jede nicht durch j gehende Ebene J' hat man

$$a' \sin (j' J') + a_3 \sin (j_3 J') = a \sin (j J'),$$

und weil auch

$$a_1 \sin (j_1' J') + a_2 \sin (j_2'' J') = a' \sin (j' J')$$

ist, so folgt für jede nicht durch j gehende Ebene J'

2') $a_1 \sin (j_1 J') + a_2 \sin (j_2 J') + a_3 \sin (j_3 J') = a \sin (j J')$,

also nicht Null, da a nicht Null sein kann, indem die drei Richtungen nicht in derselben Ebene liegen.

Es gibt also nur e i n e Gerade von der angeführten Beschaffenheit und es ist in Folge dessen auch die Ordnung, in welcher die zu ihrer Bestimmung nöthigen Constructionen ausgeführt werden, ganz willkürlich.

Z u s a t z: Es wäre überflüssig, die Zusätze hier analog den früheren *in extenso* aufzuführen. Sie ergeben sich sofort aus den beim Ebenenbündel gemachten, indem man nur an Stelle der Worte „Ebene, senkrecht" die Worte „Strahl, parallel" treten lässt, mit einer kleinen Ausnahme in Zusatz *b)*, in welchem die Construction der Coefficienten-Verhältnisse gezeigt ist, und wo statt „Ebene $A_1\ A_2$" begreiflicher Weise „Ebene $a_1\ a_2$" zu lesen ist.

So wird sich z. B. analog dem Zusatze *d)*

$$(a_1 + x\, a_1')\, j_1 + (a_2 + x\, a_2')\, j_2 + (a_3 + x\, a_3')\, j_3$$

als der Ausdruck einer Ebene im Strahlenbündel, bezogen auf die Fundamentalstrahlen $j_1\, j_2\, j_3$, ergeben, da er alle Elemente des dem Träger jj' zugehörigen Büschels umfasst, wobei

$$j \equiv a_1\, j_1 + a_2\, j_2 + a_3\, j_3,$$
$$j' \equiv a_1'\, j_1 + a_2'\, j_2 + a_3'\, j_3 \text{ ist.}$$

3) Die Gerade im ebenen Systeme. Es seien drei nicht durch denselben Punkt gehende aber in derselben Ebene liegende Gerade $j_1\ j_2\ j_3$ gegeben, ausserdem drei Coefficienten $a_1\ a_2\ a_3$. Man soll einen Punkt i der Ebene so bestimmen, dass

3) $\quad a_1\, |j_1\, i| + a_2\, |j_2\, i| + a_3\, |j_3\, i| = o$ werde.

Man denke sich drei Längen $a_1\ a_2\ a_3$ parallel zu $j_1\, j_2\, j_3$ und sodann die geometrische Summe

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3}$$

construirt. Es werde vorausgesetzt, dass a nicht Null, also das aus den gegebenen Strecken gebildete Dreiseit nicht geschlossen sei.

Nun construire man wie in 1) eine Gerade j', die durch $j_1\, j_2$ hindurch und zu

$$\overline{a'} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$$

parallel geht. Führt man dann durch den Schnitt $j'\, j_3$ eine Gerade i parallel zu $\overline{a}$; so hat jeder Punkt dieser Geraden die gewünschte Eigenschaft.

In der That ist i ein solcher Punkt, so ist wegen Gleichung $1'_B$

$$a_1\, |j_1\, i| + a_2\, |j_2\, i| = a'\, |j'\, i|$$

und in Folge der Gleichung 1_B

$$a'\, |j'\, i| + a_3\, |j_3\, i| = o,$$

da j durch $j'\, j_3$ geht und zu

$$\overline{a} = \overline{a'} + \overline{a_3}$$

parallel ist. Durch Substitution folgt aber sofort die Gleichung 3).

Für jeden nicht in j gelegenen Punkt i der Ebene hat man (Gleichung $1'_B$)

$$a_1\, |j_1\, i'| + a_2\, |j_2\, i'| = a'\, |j'\, i'| \text{ und}$$
$$a'\, |j'\, i'| + a_3\, |j_3\, i'| = a\, |j\, i'|,$$

woraus durch Combination hervorgeht, dass

3') $\quad a_1\, |j_1\, i'| + a_2\, |j_2\, i'| + a_3\, |j_3\, i'| = a\, |j\, i'|,$

also nicht Null ist. Es gibt also nur eine Gerade, deren Punkte der Gleichung 3) genügen und es ist somit auch die Ordnung, in welcher man die zu ihrer Bestimmung angewendete Construction ausführt, vollkommen willkürlich.

Zusätze: *a)* Die Lage der Geraden j ist nur abhängig von den Lagen der Geraden $j_1\ j_2\ j_3$ und den Verhältnissen der Coefficienten. Je nach dem Werthe von $a_1 : a_2$ kann j' durch jeden Punkt von j_3 hindurchgehen und je nach dem Werthe von $a' : a_3$ auch j jede Lage im Strahlenbüschel $j'\ j_3$ annehmen. Da jede Gerade der Ebene einem der Strahlbüschel $j'\ j_3$ angehören muss, so kann j jede Gerade der Ebene werden.

b) Für jede Lage der Geraden j gibt es nur ein Werthsystem der Verhältnisse $a_1 : a_2 : a_3$, so dass die Gleichungen 3) und 3') erfüllt werden. Denn nimmt man parallel zu j die Länge a beliebig, so soll

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3}$$

sein, wobei die Richtungen von $a_1\ a_2\ a_3$ vorgeschrieben sind.

Die Gerade j schneide j_3 in $j j_3$. Durch diesen Schnitt und durch $j_1\ j_2$ muss aber j' gehen, deren Lage somit bestimmt ist und hierdurch auch die von $\overline{a'}$. Zieht man also aus dem Anfangspunkte von a eine Parallele zu j' und aus dem Endpunkte eine Parallele zu j_3, so sind durch den Schnittpunkt die Längen a' und a_3 so bestimmt, dass

$$\overline{a} = \overline{a'} + \overline{a_3}$$

ist. Construirt man dann auf dieselbe Weise

$$\overline{a'} = \overline{a_1} + \overline{a_2},$$

so hat man für ein beliebiges a die drei Coefficienten eindeutig bestimmt, wodurch die Verhältnisse bekannt sind.

c) Für irgend eine Gerade j der Ebene kann in abgekürzter Schreibweise bezogen auf drei Fundamental-Strahlen der Ausdruck auf die Formen

$$\begin{aligned} a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3 &= a j \text{ oder} \\ a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3 &= j \text{ oder} \\ j_1 + m\, j_2 + n\, j_3 &= j \end{aligned}$$

gebracht werden.

d) Es seien j und j' zwei Gerade und ihre Ausdrücke bezogen auf drei Fundamentalstrahlen

$$\begin{aligned} a\, j &= a_1\, j_1 + a_2\, j_2 + a_3\, j_3 \\ a' j' &= a_1'\, j_1 + a_2'\, j_2 + a_3'\, j_3. \end{aligned}$$

Jede Gerade des Büschels $j\,j'$ kann dargestellt werden durch

$$a\,j + x\,a'\,j',$$

somit wird

$$(a_1 + x\,a_1')\,j_1 + (a_2 + x\,a_2')\,j_2 + (a_3 + x\,a_3')\,j_3$$

der allgemeinste Ausdruck eines Punktes, aufgefasst als Träger aller Elemente des Büschels $j\,j'$.

e) Es sei

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} = 0,$$

also das aus den drei Strecken gebildete Dreiseit geschlossen. Dann ist die Richtung von $\overline{a'} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$ direct entgegen gesetzt der von $\overline{a_3}$ und daher die Geraden j und j_3 parallel und ihr Durchschnitt, durch welchen j gehen soll, unendlich weit.

Man kommt aber wegen der Willkürlichkeit in der Ordnung der Construction zu derselben Geraden j, wenn man zuerst eine Gerade j'' sucht, die durch $j_2\,j_3$ hindurch geht und parallel ist zu

$$\overline{a''} = \overline{a_2} + \overline{a_3}.$$

Dann muss j durch den Schnittpunkt $j''\,j_1$ gehen. Da aber auch j'' parallel zu j_1 liegt, so ist im gegenwärtigen Falle auch dieser zweite Punkt unendlich weit, und

$$j = a_1\,j_1 + a_2\,j_2 + a_3\,j_3;\quad \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} = 0$$

die unendlich entfernte Gerade, da sie durch zwei unendlich entfernte Punkte geht, die in nicht parallelen Geraden liegen.

Nach (I, 8, *c*) verhalten sich die Coefficienten der unendlich entfernten Geraden wie die Längen der Seiten des aus den Fundamentalstrahlen gebildeten Dreiseits.

4) Ergänzung. Wie für Ebenen, lässt sich auch für die Gerade im Strahlenbüschel, Strahlenbündel und im ebenen Systeme die Richtigkeit der folgenden Erweiterung erkennen.

Es seien die Geraden $j_1\,j_2\,j_3\,..\,j_n$ gegeben, ausserdem die Coefficienten $a_1\,a_2\,a_3\,..\,a_n$. Diese Coefficienten betrachte man als Längen parallel zu den Geraden mit gleichen Indices gerichtet. Man bilde nach einander die geometrischen Summen

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} = \overline{a'};\quad \overline{a'} + \overline{a_3} = \overline{a''};\ ..\quad \overline{a}^{(n-2)} + \overline{a_n} = \overline{a},$$

so dass schliesslich

$$\overline{a} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} + \ldots + \overline{a_n}$$

ist. Sodann führe man die Geraden $j'\,j''\,\ldots\,j^{(n-2)}\,j$ parallel zu $\overline{a'}$, $\overline{a''}\,\ldots\,\overline{a}^{(n-2)}$, $\overline{a}$ durch die Durchschnitte $j_1\,j_2$, $j'\,j_3\,\ldots$

$j^{(n-3)}\ j_{n-1},\ j^{(n-2)}\ j_n$. Dann gilt für die Gerade j die Gleichung

4) $a_1\, j_1 + a_2\, j_2 + a_3\, j_3 + \dots + a_n\, j_n = a\, j.$

Im Strahlenbündel hat j die Bedeutung des Sinus des Winkels der Geraden mit einer durch den Träger des Bündels geführten Ebene, im Strahlenbüschel und im ebenen Systeme hingegen bedeutet es die Länge des von irgend einem Punkte der Ebene auf j gefällten Perpendikels.

Aus (*I.* 4) folgt zugleich für beide Fälle:

Ist J eine Ebene und $j'_1\ j'_2 \dots j'_n\ j'$ die Projectionen der entsprechenden Geraden auf diese Ebene, sind ebenso $a'_1\ a'_2 \dots a'_n\ a'$ die Projectionen der den Geraden parallelen Strecken $a_1\ a_2 \dots a_n\ a'$, so gilt die Gleichung:

$$\overline{a'}_1\, j'_1 + \overline{a'}_2\, j'_2 + \dots + \overline{a'}_n\, j'_n = \overline{a'}\, j';$$

hierin bedeuten die $j'_1\ j_2 \dots$ die Perpendikel von irgend einem Punkt der Ebene J auf die Geraden $j'_1\ j'_2 \dots j'_n\ j'$.

Z u s ä t z e. *a*) Die umgekehrte Aufgabe, für eine Gerade j aus den Lagen von $j_1\ j_2 \dots j_n$ die Coefficientenverhältnisse zu bestimmen, wird unbestimmt, wenn n im Strahlenbüschel die Zahl 2, im Strahlenbündel und im ebenen Systeme die Zahl 3 überschreitet.

b) Die Gleichung 4) behält noch ihre Bedeutung, wenn $j_1\ j_2 \dots j_n$ zu einander parallel werden und in derselben Ebene liegen. Man denke sich in diesem Falle nur z. B. j_1 durch zwei sich, auf j_1 schneidende Gerade j_x und j_y ersetzt, so dass, wenn a_x, a_y zwei zu diesen Geraden parallele Strecken sind

$$\overline{a}_1 = \overline{a}_x + \overline{a}_y$$

ist. Construirt man dann

$$\overline{a}_y + \overline{a}_2 = \overline{b}',\quad \overline{b}' + \overline{a}_3 = \overline{b}'',\ \dots\ \overline{b}^{(n-2)} + \overline{a}_n = \overline{b}^{(n-1)}$$
$$\overline{b}^{(n-1)} + \overline{a}_x = \overline{a},$$

so erhält man lauter in der Endlichkeit gelegene Schnitte, wie in 4) vorausgesetzt war, und kann somit j bestimmen durch

$$\overline{a}_y\, j_y + a_2\, j_2 + a_3\, j_3 + \dots + a_n\, j_n + a_x\, j_x = a\, j,$$
$$\overline{a} = \overline{a}_y + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 + \dots + \overline{a}_n + \overline{a}_x,$$

oder weil

$$a_y\ j_y + a_x\, j_x = a_1\, j_1$$

und die Strecken $a_1\ a_2 \dots a_n$ zu einander parallel sind durch

4') $a_1\, j_1 + a_2\, j_2 + a_3\, j_3 + \dots + a_n\, j_n = a\, j,$

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Für einen Punkt i auf j lautet diese Gleichung

$$a_1 \mid j_1 i \mid + a_2 \mid j_2 i \mid + a_3 \mid j_3 i \mid + \ldots . + a_n \mid j_n i \mid = 0,$$

die sich noch etwas anders schreiben lässt. Wählt man nämlich auf $j_1 j_2 j_3 \ldots j_n$ beliebige Punkte $i_1 i_2 i_3 \ldots i_n$, zieht aus diesen Parallele nach beliebiger Richtung und sucht die Durchschnitte mit einer durch j gelegten Ebene J, so sind die Abschnitte auf diesen Parallelen $\mid i_1 J \mid, \mid i_2 J \mid, \mid i_3 J \mid \ldots . \mid i_n J \mid$ den früheren Perpendikel proportional. Man kann daher statt 4') auch schreiben

4'') $a_1 \mid i_1 J \mid + a_2 \mid i_2 J \mid + a_3 \mid i_3 J \mid + \ldots . + a_n \mid i_n J \mid = o.$

Führt man aber eine Ebene J' parallel zu J und ist i ein auf j liegender Punkt, so werden die Abschnitte

$$\mid i_1 J' \mid = \mid i_1 J \mid + \mid i J' \mid; \mid i_2 J' \mid = \mid i_2 J \mid + \mid i J' \mid; \ldots .$$

woraus mit Berücksichtigung von 4'') folgt

4''') $a_1 \mid i_1 J' \mid + a_2 \mid i_2 J' \mid + \ldots . + a_n \mid i_n J' \mid = a \mid i J' \mid.$

c) Es seien die parallelen Geraden $j_1 j_2 \ldots j_n$ gegeben, die nicht in derselben Ebene liegen und die Coefficienten $a_1 a_2 \ldots a_n$, ferner eine zu den Geraden parallele Ebene J'. Man construire in der Ebene $j_1 j_2$ die Gerade j' nach der Gleichung

$$a' j' = a_1 j_1 + a_2 j_2, \quad a' = a_1 + a_2.$$

Ebenso construire man in den respectiven Ebenen die Geraden

$$a'' j'' = a' j' + a_3 j_3, \ldots a^{(n-2)} j^{(n-2)} = a^{(n-3)} j^{(n-3)} + a_{n-1} j_{n-1},$$
$$a j = a^{(n-2)} j^{(n-2)} + a_n j_n.$$

Sodann hat man nach 4''') der Reihe nach die Gleichungen:

$$a_1 \mid i_1 J' \mid + a_2 \mid i_2 J' \mid = a' \mid i' J' \mid, \; a' \mid i' J' \mid + a_3 \mid i_3 J' \mid = a'' \mid i'' J' \mid, \ldots .$$
$$a^{(n-2)} \mid i^{(n-2)} J' \mid + a_n \mid i_n J' \mid = a \mid i J' \mid,$$

und hieraus durch Substitution

*) $a_1 \mid i_1 J' \mid + a_2 \mid i_2 J' \mid + \ldots + a_n \mid i_n J' \mid = a \mid i J' \mid,$

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Ist a nicht Null, so wird obige Summe nur Null, wenn J' mit j zusammenfällt und da dieses immer geschicht, wie auch J' durch j geführt sein mag, so ist j eine ganz bestimmte Gerade im Raume und folglich immer dieselbe, welche Ordnung man auch in obiger Construction zu ihrer Bestimmung einhalten mag.

d) Man ziehe durch die Punkte $i_1 i_2 \ldots i_n$ im vorhergehenden Zusatze eine andere Schaar paralleler Geraden $j'_1 j'_2 \ldots . j'_n$ und bestimme zu ihnen ganz wie in der früheren Construction eine

Gerade j' mit denselben Coefficienten; dann ist für eine zu den Geraden parallele Ebene J''

$$^{**})\ a_1 \,|\, i_1 J'' \,| + a_2 \,|\, i_2 J'' \,| + \ldots . + a_n \,|\, i_n J'' \,| = a \,|\, j' J'' \,|,$$
$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Wählt man die beiden Ebenen J' und J'' so, dass sie mit einer zu den beiden Systemen von Geraden parallelen Ebene J''' zusammenfallen und lässt man auch die Parallelen aus $i_1\, i_2 \ldots i_n$ in beiden Fällen dieselben sein, so werden die linken Theile der Gleichungen *) und **) identisch und man hat daher

$$|i\ J'''\,| = |\,i'\ J'''|$$

was nur möglich ist, wenn j und j' in derselben Ebene liegen, d. h. sich schneiden. Nun muss aber aus denselben Gründen für jede dritte Schaar paralleler Geraden durch $i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$ die mit den Coefficienten $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$ construirte Gerade j'' sich sowohl mit j als auch mit j' schneiden und da j'' nicht mit j und j' zugleich in einer Ebene liegen muss, so gehen alle drei Gerade durch denselben Punkt. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

Sind die Punkte $i_1\ i_2 \ldots i_n$ gegeben, ausserdem die Coefficienten $a_1\ a_2 \ldots a_n$ und man führt durch diese Punkte eine beliebige Schaar paralleler Geraden, aus denen mit den gegebenen Coefficienten eine Gerade nach Angabe der Construction in Zusatz c) bestimmt wird; so geht diese Gerade immer durch denselben Raumpunkt i hindurch, und für jede durch sie geführte Ebene J gilt die Gleichung

$$a_1 \,|\, i_1 J \,| + a_2 \,| + i_2 J \,| + \ldots + a_n \,|\, i_n J \,| = 0.$$

Da somit diese Gleichung auch für jede durch i geführte Ebene gilt, so folgt ganz wie in (*II.* 4. *c*), dass i der Schwerpunkt der mit den Massen $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$ behafteten Punkte $i_1\ i_2\ \ldots\ i_n$ sei.

f) Wir nennen auch hier eine allgemein durch Gleichung 4) bestimmte Gerade die geometrische Summe der Geraden $j_1\ j_2 \ldots j_n$.

5) Ergänzung. Es sei irgend ein Strahlenbündel oder ebenes System gegeben, ausserdem eine Gerade j_0. Man führe eine zu j_0 senkrechte Ebene J_0, welche die Gerade in i_0 schneidet. Projicirt man die Strahlen $j_1\ j_2\ \ldots\ j_n\ j$ auf die Ebene J_0 nach $j'_1\ j'_2\ \ldots .\ j'_n\ j'$, ebenso die den Coefficienten entsprechenden Strecken $a_1\ a_2 \ldots a_n\ a$ nach $\overline{a'}_1\ \overline{a'}_2 \ldots a'_n\ a'$, so gilt nach (*III*, 4) die Gleichung

$$\overline{a'}_1 j'_1 + \overline{a'}_2 j'_2 + \ldots + \overline{a'}_n j'_n = \overline{a'} j'$$
$$\overline{a'}_1 + \overline{a'}_3 + \ldots \overline{a'}_n = \overline{a'}.$$

Wählt man den Punkt i_0 als denjenigen, aus welchem die Perpendikel auf $j'_1\, j'_2 \ldots$ gefällt wurden, so lautet obige Gleichung vollständig angeschrieben

$$a_1 \sin(j_1 j_0)\, |j'_1\, i_0| + a_2 \sin(j_2 j_0)\, |j'_2\, i_0| + \ldots + a_n \sin(j_n j_0)\, |j'_n\, i_0| = a \sin(j\, j_0)\, |j'\, i_0|.$$

Die $|j'_1\, i_0|$, $|j'_2\, i_0| \ldots$ sind die kürzesten Abstände zwischen den Geraden $j_1 j_0$, $j_2 j_0, \ldots$ Bezeichnet man symbolisch das Product aus diesen kürzesten Abständen in die Sinusse der Winkel der Geraden mit j_0 durch

$$[j_1 j_0],\ [j_2 j_0], \ldots [j_n j_0],\ [j\, j_0],$$

so kann man obige Gleichung schreiben:

$$a_1 [j_1 j_0] + a_3 [j_2 j_0] + \ldots + a_n [j_n j_0] = a [j\, j_0],$$
$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots\ldots + \overline{a}_n = \overline{a},$$

oder, da j_0 jede beliebige Gerade des Raumes sein kann, ganz den früheren Fällen entsprechend, noch einfacher:

$$a_1 j_1 + a_2 j_2 + \ldots + a_n j_n = a j.$$

Es seien nun beliebige Strahlencomplexe, gleichgiltig ob Strahlenbündel oder ebene Systeme, gegeben. Für jeden dieser Complexe bestimmen wir die geometrische Summe und erhalten so, bezogen auf dieselbe Gerade j_0 des Raumes

$$a'_1\, j'_1 + a'_2\, j'_2 + \ldots + a'_m\, j'_m = a'\, j',$$
$$a''_1 j''_2 + a''_2\, j''_2 + \ldots + a''_n\, j''_n = a''\, j'',$$
$$a'''_1 j'''_1 + a'''_2 j'''_2 + \ldots + a'''_p\, j'''_n = a''' j''',$$

. . . .

Machen wir nun die Annahme, es sollen sich j' und j'' schneiden, so können wir ihre geometrische Summe $j^{(1)}$ bestimmen und erhalten, bezogen auf dieselbe Gerade j_0 des Raumes

$$a)\quad a' j' + a'' j'' = a^{(1)} j^{(1)}.$$

Wenn sich noch $j^{(1)}$ und j''' schneiden, so folgt ebenso

$$b)\quad a^{(1)} j^{(1)} + a''' j''' = a^{(2)} j^{(2)}$$

u. s. w., wenn dieselben Annahmen für die folgenden Geraden gemacht werden. Ist j die letzte Gerade, die man so erhält, und substituirt man aus den vorhergehenden Gleichungen, so wird schliesslich:

$$\Sigma\, a'_i j'_i + \Sigma\, a''_i\, j''_i + \Sigma\, a'''_i\, j'''_i + \ldots = a j$$
$$\Sigma\, \overline{a'}_i + \Sigma\, \overline{a''}_i + \Sigma\, \overline{a'''}_i + \ldots = \overline{a}.$$

Ist a nicht Null, so kann obige Summe nur verschwinden, wenn j_0 durch einen Punkt von j geht oder zu j parallel ist. Unter allen Geraden also die zu $\overline{a}$ parallel liegen, gibt es nur eine Gerade, für welche obige Summe verschwindet, wenn j_0 durch sie hindurchgeht. Demnach ist j eindeutig durch obige Construction bestimmt. Es ist daher auch ganz gleichgiltig, in welcher Ordnung die einzelnen geometrischen Summen vereinigt werden. Ist also eine andere Gruppirung der Geraden zu Complexen möglich, die den Bedingungen, unter denen die Construction ausgeführt werden kann, genügen, so liefert ihre Vereinigung dieselbe Gerade j. Man kann daher ganz allgemein schreiben

$$5)\quad a_1 j_1 + a_2 j_2 + \ldots + a_n j_n = a j.$$

Diese Gleichung darf aber nur dann auf einen Complex von Geraden im Raume angewendet werden, wenn j wirklich construirbar ist, d. h. wenn Durchschnitte vorhanden sind, damit die den Gleichungen von der Form wie a) b) entsprechenden Geraden möglich werden.

Umgekehrt, besteht die Geichung 5) so sind nothwendig solche Durchschnitte zwichen den geometrischen Summen gewisser Strahlengruppen vorhanden.

IV.

Transformationen.

1) Die gemeinsame Gerade zweier Ebenen. Es seien drei Ebenen $J\ J_1\ J_2$ gegeben, so dass

$$A\ J = A_1\ J_1 + A_2\ J_2$$

ist. Man schneide die drei Ebenen durch eine vierte J' in $j\ j_1\ j_2$ und wähle in J' irgend einen Punkt i', dann ist nach der Bedeutung obiger Gleichung

$$A \mid J i' \mid = A_1 \mid J_1 i' \mid + A_2 \mid J_2 i' \mid .$$

Es ist aber:

$$\mid J i' \mid = \mid j i' \mid \sin (J J'),\ \mid J_1 i' \mid = \mid j_1 i' \mid \sin (J_1 J'),$$
$$\mid J_2 i' \mid = \mid j_2 i' \mid \sin (J_2 J'),$$

daher kann man auch schreiben

$$A \sin (J J') \mid j i' \mid = A_1 \sin (J_1 J') \mid j_1 i' \mid + A_2 \sin (J_2 J') \mid j_2 i' \mid,$$

oder symbolisch

$$1)\quad a\,j = a_1 j_1 + a_2 j_2$$

$$a = A \sin (J J'),\ a_1 = A_1 \sin (J_1 J'),\ a_2 = A_2 \sin (J_2 J').$$

Es ist also der Schnitt j die geometrische Summe zu den Schnitten j_1 und j_2, und die Liniencoefficienten haben hiebei die obigen Werthe.

In Folge dieses Umstandes können $j\ j_1\ j_2$ in 1) auch die Bedeutung wie in (1A', III; und 5, III) erhalten.

Zusätze. *a)* Die Gleichung 1) kann dadurch entstanden gedacht werden, dass man der Bezeichnung

$$J J' = j$$

gemäss aus den beiden Gleichungen:

$$A\ J = A_1\ J_1 + A_2\ J_2$$
$$J' = J'$$

das Product bildet, und hiebei allgemein für das Situationszeichen-Product die Regel einhält,

$$1')\quad J J' = \sin (J J').\, j$$

zu setzen in der Gleichung

$$1'')\quad A.\, J J' = A_1.\, J_1\, J' + A_2.\, J_2\, J',$$

wodurch diese mit Gl. 1.) identisch wird.

b) Ist J' die geometrische Summe zweier Ebenen,

$$A'\, J' = A_1'\, J_1' + A_2'\, J_2',$$

so ist es offenbar erlaubt, die Glieder im rechten Theile von 1'') ebenso zu entwickeln wie es für $J\ J'$ in dieser Gleichung angezeigt ist. Es heisst dieses ja nur, die beiden Geraden, deren Summe j ist, wieder als Summen anderer Geraden darstellen, und so j als Summe von vier Geraden zu erhalten, wobei den j die in (5. III.) angegebene Bedeutung beizulegen ist. Man hat also

$$A A'.\, J J' = A_1\, A_1'.\, J_1\, J_1' + A_1\, A_2'.\, J_1\, J_2' + A_2\, A_1'.\, J_2\, J_1' + A_2\, A_2'.\, J_2\, J_2'.$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit dem Producte der Ausdrücke von $A\ J$ und $A'\ J'$. Durch Gl. 1') erhält man aus ihr die Gerade j ausgedrückt durch die vier Durchschnittslinien und den entsprechenden Strahlencoefficienten. Man kann nun sofort auf Ausdrücke von beliebig vielen Gliedern übergehen.

c) Lässt man im vorhergehenden Producte die J' mit J zusammenfallen und nimmt $A' = A$, so wird wegen $J\ J = 0$,

$$0 = A_1\, A_2.\, J_1\, J_2 + A_2\, A_1.\, J_2\, J_1 \ \text{ oder}$$

$$1''')\quad J_1\, J_2 = -\, J_2\, J_1.$$

Das Product in 1') ist also nicht commutativ und man hat daher immer wenn $\sphericalangle J J'$ positiv angenommen wurde, $\sphericalangle J' J$ negativ zu nehmen.

2) Die Gerade durch zwei Punkte. Es seien drei Punkte $i\, i_1\, i_2$ gegeben, so dass

$$\alpha\, i = \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2$$

ist. Man verbinde diese drei Punkte mit einem vierten i' und lege durch diesen irgend eine Ebene J', dann ist nach der Bedeutung obiger Gleichung

$$\alpha \,|\, i\, J' \,| = \alpha_1 \,|\, i_1\, J' \,| + \alpha_2 \,|\, i_2\, J' \,|.$$

Heissen j, j_1 j_2 die drei Verbindungsgeraden und fällt man von $i\, i_1\, i_2$ Perpendikel auf die Ebene J', deren Längen der Reihe nach sein werden

$$|\, i\, i' \,| \sin (j\, J'),\ |\, i_1\, i' \,| \sin (j_1\, J'),\ |\, i_2\, i' \,| \sin (j_2\, J'),$$

so sind diese Perpendikel den Längen $|\, i\, J \,|$, $|\, i_1\, J' \,|$, $|\, i_2\, J' \,|$ proportional und man kann daher auch schreiben

$$a \,|\, i\, i' \,| . \sin (j\, J') = a_1 \,|\, i_1\, i' \,| . \sin (j_1\, J') + a_2 \,|\, i_2\, i' \,| . \sin (j_2\, J')$$

oder, ganz wie in Gl. 1A, symbolisch

$$2) \left\{ \begin{array}{c} a\, j = a_1\, j_1 + a_2\, j_2\,, \\ a = \alpha \,|\, i\, i' \,|,\ a_1 = \alpha_1 \,|\, i_1\, i \,|_1\ a_2 = \alpha_2 \,|\, i_2\, i' \,|. \end{array} \right.$$

Es ist also die Verbindungsgerade j die geometrische Summe aus den Verbindungsgeraden j_1 und j_2, entsprechend den Strahlencoefficienten, die in 2) durch die Punktcoefficienten ausgedrückt sind.

In Folge dieses Umstandes können $j\, j_1\, j_2$ jede der drei in (1 und 5 III) angegebenen geometrischen Bedeutungen annehmen.

Zusätze. *a*) Wenn man

$$i\, i' = j$$

gemäss aus den beiden Gleichungen

$$\alpha\, i = \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2,$$
$$i' = i'$$

das Product bildet und hiebei allgemein für das Situationszeichenproduct die Regel einhält

$$2') \quad i\, i' = |\, i\, i' \,|\, j$$

zu setzen, so wird die Gleichung

$$2'') \quad \alpha . i\, i' = \alpha_1\, i_1\, i' + \alpha_2\, i_2\, i'$$

mit Gl. 2) identisch.

b) Ist i' der Schwerpunkt zweier Punkte, also

$$\alpha'\, i' = \alpha'_1\, i'_1 + \alpha'_2\, i'_2,$$

so ist es erlaubt, die Glieder im rechten Theile von 2'') so zu entwickeln, wie es für $i\ i'$ in dieser Gleichung angezeigt ist und es gelten genau dieselben Bemerkungen wie im Zusatze *b*) der vorigen Nummer

c) Ganz entsprechend dem vorhergehenden Zusatze *c*) erkennt man, dass auch hier

$$2''')\ i_1\ i_2 = -\ i_2\ i_1.$$

zu setzen ist, also die Distanzen $|\ i_1\ i_2\ |$ und $|\ i_2\ i_1\ |$ entgegengesetztes Vorzeichen zu erhalten haben.

3) Die Ebene durch Punkt und Gerade. Es seien erstens drei Punkte gegeben, so dass

$$\alpha\ i = \alpha_1\ i_1 + \alpha_2\ i_2$$

ist. Man lege durch diese und eine Gerade j die drei Ebenen $J\ J_1\ J_2$. Es sollen drei Coefficienten so bestimmt werden, dass

$$A\ J = A_1\ J_2 + A_2\ J_2$$

wird. Zu diesem Zwecke lege man durch j irgend eine Ebene J' und fälle auf sie von den drei Punkten die Senkrechten $|\ i\ J'|$, $|i_1\ J'\ |$, $|\ i_2\ J'|$, dann ist

$$\alpha\ |\ i\ J'\ | = \alpha_1\ |\ i_1\ J'\ | + \alpha_2\ |\ i_2\ J'|.$$

Ist nun i' ein Punkt in der Ebene J', so ist

$$|\ iJ'\ | = |\ ij\ |\sin(J\ J') = |\ ij|.\ \frac{|\ J\ i'\ |}{|\ j\ i'\ |},$$

und ähnlich für die beiden anderen Punkte. Hiedurch wird mit Weglassung des gemeinsamen Divisors $|\ j\ i'\ |$

$$\alpha\ |\ y\ |\ .\ |\ J i'\ | = \alpha_1\ |\ i_1\ j\ |\ .\ |\ J_1\ i'\ | + \alpha_2\ |\ i_2 j\ |\ .\ |\ J_2\ i'|,$$

oder symbolisch

$$3)\ \left\{\begin{array}{c} A\ J = A_1\ J_1 + A_2\ J_2 \\ A = \alpha\ |\ ij\ |,\ A_1 = \alpha_1\ |\ i_1 j\ |,\ A_2 = \alpha_2\ |\ i_2\ j\ |. \end{array}\right.$$

Es seien zweitens drei Gerade gegeben, so dass

$$a j = a_1\ j_4 + a_2 j_2$$

ist. Man lege durch diese und einen Punkt i drei Ebenen $J\ J_1\ J_2$ und bestimme drei Coefficienten so, dass wieder

$$A\ J = A_1\ J_1 + A_2\ J_2$$

wird. Die drei Ebenen bilden ein Büschel und die drei Geraden, sind die Schnitte derselben mit der Ebene J_0 dieser Geraden, demnach muss nach (I. IV)

$$A\ J\ J_0 = A_1\ J_1\ J_0 + A_2\ J_2\ J_0$$

identisch sein mit der gegebenen Relation zwischen den Geraden, also ist

$$a = A\sin(J\ J_0),\ a_1 = A_1\sin(J_1\ J_0),\ a_2 = A_2\sin(J_2\ J_0).$$

Fällt man aber von i auf J_0 das Perpendikel $|J_0 i|$ und ebenso auf die Geraden die Senkrechten $|j\ i|$ $|j_1\ i|$ $|j_2\ i|$, so ist z. B.

$$|J_0 i| = |j\ i| \sin (J J_0).$$

Es werden somit mit Hinweglassung des gemeinsamen Divisors $|J_0 i|$ in der Gleichung

$$A J = A_1 J_1 + A_2 J_2$$

$$3_2)\quad A = a\,|j\ i|,\ A_1 = a_1\,|j_1\ i|,\ A_2 = a_2\,|j_2\ i|$$

die gesuchten Coefficientenwerthe sein, die sonach mit den vorhergefundenen darin übereinstimmen, dass sie bezüglich der gegenseitigen Lage von Punkt und Gerade nur von der senkrechten Entfernung abhängig dargestellt werden können.

Versteht man daher unter $j\ i$ eine durch Punkt und Gerade gelegte Ebene J und setzt man

$$3')\quad i\,j = |i\,j| \,.\, J,\ j\,i = |j\,i| \,.\, J$$

so erhält man die Gleichungen 3_1 und 3_2, indem man gemäss der Bezeichnung die Producte

$$(\alpha\ i)\,j = (\alpha_1\ i_1 + \alpha_2\ i_2)\,j,$$
$$(a\ j)\,i = (a_1\ j_1 + a_2\ j_2)\,i$$

mit Berücksichtigung der Gleichungen 3') entwickelt.

Zusatz. Bestimmt man drei Ebenen aus

$$(\alpha\ i)\,j = (\alpha_1\ i_1 + \alpha_2\ i_2)\,j$$

so ist es offenbar erlaubt, hierin j als die Summe zweier anderer Geraden anzusehen und zu substituiren

$$a\,j = a_1\,j_1 + a_2\,j_2,$$

da dieses wieder nur den Sinn hat, die Ebenen $i_1\,j$ und $i_2\,j$ je durch zwei andere Ebenen gemäss obiger Construction zu ersetzen. Es wird also die Ebene $i\,j$ auch bestimmt sein durch

$$\alpha\,a\,j\,j = \alpha_1\,a_1\,i_1\,j_1 + \alpha_2\,a_1\,i_2\,j_1 + \alpha_1\,a_2\,i_1\,j_2 + \alpha_2\,a_2\,i_2\,j_2.$$

4) Der Punkt als Durchstosspunkt der Geraden mit der Ebene. Es seien erstens drei Ebenen $J\,J_1\,J_2$ gegeben, so dass

$$A J = A_1 J_1 + A_2 J_2$$

ist, ferner die Gerade j, welche die drei Ebenen in den Punkten i, $i_1\,i_2$ trifft. Es sollen drei Coefficienten so bestimmt werden, dass

$$\alpha\,i = \alpha_1\,i_1 + \alpha_2\,i_2$$

ist. Zu diesem Zweck denke man sich in j einen beliebigen Punkt

i' gewählt, dann lautet die Gleichung zwischen den drei Ebenen

$$A \mid J i' \mid = A_1 \mid J_1 i' \mid + A_2 \mid J_2 i' \mid.$$

Nun ist aber

$$\mid J i' \mid = \mid i i' \mid \sin (J j), \mid J_1 i' \mid = \mid i_1 i' \mid \sin (J_1 j),$$
$$\mid J_2 i' \mid = \mid i_2 i' \mid \sin (J_2 i'),$$

und hiemit wird obige Gleichung

$$A \sin (J j) \mid i i' \mid = A_1 \sin (J_1 j) \mid i_1 i' \mid + A_2 \sin (J_2 j) \mid i_2 i' \mid$$

oder symbolisch

$$4_1 \left\{ \begin{array}{c} \alpha i = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2, \\ \alpha = A \sin (J j), \alpha_1 = A_1 \sin (J_1 j), \alpha_2 = A_2 \sin (J_2 j). \end{array} \right.$$

Es seien zweitens drei Gerade gegeben, so dass

$$a j = a_1 j_1 + a_2 j_2$$

ist. Eine Ebene J treffe diese Geraden in den Punkten $i\, i_1\, i_2$, es sollen wieder drei Coefficienten gefunden werden, so dass i der Schwerpunkt von i_1 und i_2 wird. Die drei Geraden sind die Verbindungslinien der drei Punkte mit dem gemeinsamen Durchschnitt der Geraden i_0. Es muss daher nach (2. IV)

$$\alpha i i_0 = \alpha_1 i_1 i_0 + \alpha_2 i_2 i_0$$

identisch sein mit der gegebenen Relation zwischen den drei Geraden, also ist

$$a = \alpha \mid i i_0 \mid, a_1 = \alpha_1 \mid i_1 i_0 \mid, a_2 = \alpha_2 \mid i_2 i_0 \mid.$$

Fällt man aber von i_0 das Perpendikel $\mid J i_0 \mid$ auf die Ebene J, so ist z. B.

$$\mid J i_0 \mid = \mid i i_0 \mid \sin (j J); \alpha = a \frac{\sin (j J)}{\mid J i_0 \mid}.$$

Es werden somit, den gemeinsamen Divisor $\mid J i_0 \mid$ weglassend in der Gleichung

$$4_2) \left\{ \begin{array}{c} \alpha i = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2, \\ \alpha = a \sin (j J), \alpha_1 = a_1 \sin (j_1 J), \alpha_2 = a_2 (j_2 J) \end{array} \right.$$

die gesuchten Coefficientenwerthe sein, die gleichfalls mit den vorhergehenden übereinstimmend nur den Sinus des Neigungswinkels der Geraden gegen die Ebene enthalten.

Versteht man daher unter $j J$ den Durchstosspunkt der Geraden mit der Ebene und setzt man

$$4') \quad J j = \sin (J j) . i, \; j J = \sin (j J) . i,$$

so erhält man die Gleichungen 4_1) und 4_2), indem man der Bezeichnung gemäss die Producte

$$(A\,J)\,j = (A_1\,J_1 + A_2\,J_2)\,j,$$
$$(a\,\,j)\,J = (a_1\,j_1 + a_2\,j_2)\,J$$

entwickelt.

Zusatz. Wie im früheren Zusatze angegeben wurde, so kann auch hier j oder J als geometrische Summe aus zwei anderen Geraden oder Ebenen betrachtet und die Producte entwickelt werden.

Anmerkung. Die Zulässigkeit der Product-Bildung von zwei zweigliedigen Factoren, bedingt sofort die Zulässigkeit der Productentwicklung aus zwei Factoren mit beliebig vielen Gliedern.

5) Die Ebene durch drei Punkte. Es seien drei Punkte $i\,i'\,i''$ mit den respectiven Coefficienten $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ durch ihre Ausdrücke gegeben und die Verbindungsgeraden mit

$$i\,i' = j'',\; i'\,i'' = j,\; i''\,i = j'$$

bezeichnet. Nach 2) erhält man den Ausdruck einer dieser Verbindungsgeraden, z. B. j'', wenn man das Product

$$\alpha\,\alpha'\,i\,i' = \alpha\,\alpha'\,|\,i\,i'\,|.\,j''$$

vermöge der gegebenen Punkt-Ausdrücke entwickelt.

Die Ebene J durch die drei Punkte ist aber gleichbedeutend mit der Ebene $j''\,i''$, und nach 3) wird ein Ausdruck dieser Ebene durch Entwicklung des Productes

$$\alpha\,\alpha'\,\alpha''\,|\,i\,i'\,|.\,j''\,i'' = \alpha\,\alpha'\,\alpha''\,|\,i\,i'\,|\;\;|\,j''\,i''\,|.\,J$$

mit Hilfe des eben gefundenen Ausdruckes der Geraden j'' und des gegebenen von i'' gewonnen. Dieses Product ist also auch gleichbedeutend mit

$$\alpha\,\alpha'\,\alpha''.\,i\,i'\,i'',$$

Bezeichnet man noch mit $|\,i\,i'\,i''\,|$ die Fläche des Dreieckes $i\,i'\,i''$, so kann man mit Weglassung des Factors 2, schreiben

$$\alpha\,\alpha'\,\alpha''\,i\,i'\,i'' = \alpha\,\alpha'\,\alpha''\,|\,i\,i'\,i''\,|.\,J.$$

Will man demnach den Ausdruck der Ebene durch drei gegebene Punkte erhalten, so hat man nur entsprechend der Bezeichnung, obiges Product zu entwickeln und für die auftretenden Situationszeichen-Producte überall nach der Gleichung

$$5)\quad i\,i'\,i'' = |\,i\,i'\,i''\,|.\,J$$

zu substituiren.

Da es hiebei gleichgiltig ist, von welcher der drei Geraden man ausgeht, so hat man

$$5')\quad i\,i'\,i'' = i'\,i''\,i = i''\,i\,i'.$$

Weil aber nach 2'') $i\, i' = -\, i'\, i$, so wird

5'') $i\, i'\, i'' = -\, i'\, i\, i''$, $i'\, i''\, i = -\, i''\, i'\, i$, $i''\, i\, i' = -\, i\, i''\, i'$ zu setzen sein.

6) Der gemeinsame Punkt dreier Ebenen. Es seien drei Ebenen $J\, J'\, J''$ mit den resp. Coefficienten $A\, A'\, A''$ gegeben durch ihre Ausdrücke und die drei Durchschnitte bezeichnet mit

$$J\, J' \equiv j'',\quad J'\, J'' \equiv j,\quad J''\, J \equiv j'.$$

Nach 1) erhält man den Ausdruck einer dieser Durchschnittslinien z. B. j'', wenn man das Product

$$A\, A'\, J\, J' = A\, A' \sin\,(J\, J').\, j''$$

mittelst der gegebenen Ebenen-Ausdrücke entwickelt.

Der gemeinsame Punkt i der drei Ebenen ist aber gleichbedeutend mit dem Durchstosspunkt $j''\, J''$ und nach 4) wird ein Ausdruck dieses Punktes durch Entwickelung des Productes

$$A\, A'\, A'' \sin\,(J\, J').\, j''\, J'' = A\, A'\, A'' \sin\,(J\, J') \sin\,(j''\, J'').\, i$$

mit Hilfe des bereits gefundenen Ausdruckes der Geraden j'' und des gegebenen von J'' gewonnen, welches Product gleichbedeutend ist mit

$$A\, A'\, A''\, J\, J'\, J''.,$$

Durch Betrachtung des sphärischen Dreiecks, welches durch die drei Ebenen aus einer um i beschriebenen Kugel herausgeschnitten wird, erkennt man sofort, dass, wenn man das constante Verhältniss der Sinusse der Ebenen Winkel $j\, j''$ zu den gegenüberliegenden Kantenwinkel $J\, J''$ mit ε bezeichnet

$$\sin\,(J\, J') \sin\,(j''\, J'') = \varepsilon \sin\,(J\, J') \sin\,(J'\, J'') \sin\,(J''\, J)$$

wird, oder nach der Bezeichnung in [g) I]

$$\varepsilon\, [J\, J'\, J''].$$

Will man demnach den Ausdruck des Punktes erhalten, so hat man nur entsprechend der Bezeichnung des drei Ebenen gemeinsamen Punktes, obiges Product zu entwickeln und für die auftretenden Situationszeichen-Producte nach der Gleichung

$$6)\quad J\, J'\, J'' = \varepsilon\, [J\, J'\, J'']\, i$$

zu substituiren. Denkt man die drei Ebenen durch eine vierte Ebene J_0 geschnitten, so ist übrigens nach (g. c. I), $\varepsilon\, [J\, J'\, J'']$ der in J_0 gelegenen Tetraederfläche proportional.

Von welcher der drei Geraden man ausgeht, ist gleichgiltig, daher wird

$$6') \quad J J' J'' = J' J'' J = J'' J J'$$

sein. Weil aber nach 1'') $J J' = - J' J$ ist, so folgt:

$$6'') \quad J J' J'' = - J' J J'',\; J J'' J = - J'' J' J,\; J'' J J' = - J J'' J'.$$

7) Zwei sich schneidende Gerade. Führt man Gerade durch einen Punkt, so bestimmen je zwei eine Ebene, liegen die Geraden in derselben Ebene, so bestimmen je zwei einen Punkt.

Es seien erstens zwei Punkte $i\ i'$ mit den Coefficienten $\alpha\ \alpha'$ durch ihre Ausdrücke gegeben und j_1 ihre Verbindungslinie, deren Ausdruck erhalten wird aus

$$\alpha \alpha' i i' = \alpha \alpha' \mid i i' \mid . \, j_1 .$$

Verbindet man sämmtliche Punkte und deren Verbindungslinien mit einem Punkt i_0, so werden die entstehenden Strahlen die Schnitte der entstehenden Ebenen des Bündels sein. Sind j und j' die den Punkten $i\ i'$ entsprechenden Strahlen und J die durch j_1 gehende Ebene, die also auch die Ebene durch j und j' ist, so werden deren Ausdrücke erhalten aus

$$\alpha i i_0 = \alpha \mid i i_0 \mid . \, j,\; \alpha' i' i_0 = \alpha' \mid i' i_0 \mid . \, j',$$

$$\alpha \alpha' \mid i i' \mid . \, j_1 i_0 = \alpha \alpha' \mid i i' \mid \; \mid j_1 i_0 \mid . \, J.$$

Es ist aber $\mid i i' \mid . \mid j_1 i_0 \mid$ die doppelte Dreiecksfläche $i_0 i i'$ und daher

$$\mid i i' \mid \; \mid j_1 j_0 \mid = \mid i i_0 \mid \; \mid i' i_0 \mid \sin (j j').$$

Setzt man dieses in den Ausdruck der Ebene, so sieht man, dass der Ausdruck dieser Ebene auch erhalten wird, wenn man gemäss der Bezeichnung $J \equiv j j'$ das Product

$$\alpha \alpha' j j'$$

vermöge der Ausdrücke der Geraden entwickelt und hiebei für die Situationszeichen-Producte nach der Regel

$$7_1) \quad j j' = (j j') . \, J$$

die Substitutionen vornimmt.

Zugleich ist hier

$$7_1') \quad j j' = - j' j$$

zu setzen, da die umgekehrte Ordnung $j' j$ erhalten wird, wenn man im Ausdruck von J und j_1 das Product $i\ i'$ bildet, welches nach 2'') das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Auf das ebene System übergehend, nehme man zweitens an, es seien zwei Ebenen $J\ J'$ mit den Coefficienten $A\ A'$ durch ihre Ausdrücke gegeben und j_1 ihre Durchschnittslinie, deren Ausdruck erhalten wird aus

$$A A J J' = A A' \sin (J J') . \, j.$$

Schneidet man das räumliche System durch eine Ebene J_0, so werden die entstehenden Durchstosspunkte die Durchschnitte der entstehenden Durchschnitts-Geraden. Sind j und j' die den Ebenen J J' entsprechenden Schnitte und i der Durchstosspunkt von j', so werden deren Ausdrücke erhalten aus:

$$A\,J\,J_0 = A \sin (J\,J_0).\,j,\quad A'\,J'\,J_0 = A' \sin (J'\,J_0).\,j'$$

$$A\,A' \sin (J\,J')\,j_1\,J_0 = A\,A' \sin (J\,J') \sin (j_1\,J_0).\,i$$

$$= A\,A'\,\varepsilon\,[J\,J'\,J_0].\,i.$$

Setzt man hierin

$$\varepsilon = \frac{\sin (j\,j')}{\sin (J\,J')},$$

so wird der Ausdruck des Punktes

$$A \sin (J\,J_0).\,A' \sin (J'\,J_0) \sin (j\,j').\,i$$

und man sieht, dass dieser Ausdruck auch erhalten wird, wenn man gemäss der Bezeichnung $i = j\,j'$ das Product

$$a\,a'\,j\,j'$$

mittelst der Ausdrücke der Geraden entwickelt und hiebei die Regel einhält, für die Situationszeichen-Producte

$$7_2)\quad j\,j' = \sin (j\,j').\,i$$

zu setzen. Auch hier ist wie früher und aus ganz ähnlichen Gründen

$$7'_2)\quad j\,j' = -j'\,j.$$

8) Punkt und Ebene. Ist ein Punkt und eine Ebene gegeben, so kann hiedurch allein keines der drei Elemente Punkt, Ebene und Gerade als in ähnlicher Weise bestimmt angesehen werden, wie dieses in den vorhergehenden Fällen geschehen ist. In diesen waren nämlich die durch die gegebenen Elemente bestimmt gedachten Elemente immer die gemeinsamen Elemente der Grundgebilde, als deren Träger die gegebenen Elemente gedacht werden können. Ein solches ist für Punkt und Ebene nicht vorhanden.

Versteht man nun in diesem Falle unter $J\,i$ und $i\,J$ die durch i auf J senkrecht gezogene Gerade, so ist zu setzen

$$8_a.\quad J\,i = i\,J = j$$

In der That, hat man drei Ebenen in der Beziehung

$$A\,J = A_1\,J_1 + A_2\,J_2$$

und zieht man zu diesen aus i die drei Senkrechten $j\,j_1\,j_2$, so ist wegen der Gleichheit der Winkel

$$\sphericalangle\,J\,J_1 = \sphericalangle\,j\,j_1,\quad \sphericalangle\,J\,J_2 = \sphericalangle\,j\,j_2$$

auch: $A\,j = A_1\,j_1 + A_2\,j_2.$

Sind aber drei Punkte gegeben, so dass

$$\alpha\, i = \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2$$

ist und zieht man durch diese Senkrechte zur Ebene J, so ist nach (4, III.) auch

$$\alpha\, j = \alpha_1\, j_1 + \alpha_2\, j_2,$$

d. h. j die geometrische Summe der Parallelen j_1 und j_2.

Man erhält demnach ganz allgemein den Ausdruck der durch i gezogenen Senkrechten zur Ebene J, wenn man gemäss der Bezeichnung $j \equiv i\, J$ mittelst der gegebenen Ausdrücke von i und J das Product unter Berücksichtigung von 8a) entwickelt.

Es ist aber auch offenbar erlaubt

$$8\text{b}) \quad i\, J = J\, i = |\, J\, i\,|$$

zu setzen, denn hiedurch wird die symbolisch geschriebene Gleichung

$$A\, J = A_1\, J_1 + A_2\, J_2$$

nur auf ihre ursprüngliche algebraische Bedeutung zurückgeführt und ebenso die Gleichung

$$\alpha\, i = \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2.$$

Es wird dann auch aus den beiden Gleichungen

$$A\, J = A_1\, J_1 + A_2\, J_2$$
$$\alpha\, i = \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2$$

gefolgert werden

$$A\, \alpha |J\, i| = A_1\, \alpha_1 |J_1\, i_1| + A_1\, \alpha_2 |J_1\, i_2| + A_2\, \alpha_1 |J_2\, i_1| + A_3\, \alpha_2 |J_2\, i_1|.$$

Denkt man sich die Ebene J in Gleichung 8b) aus den Ausdrücken dreier Punkte $i'''\, i''\, i'$ bestimmt, also

$$i'''\, i''\, i' = |\, i'''\, i''\, i'\,|.\ J$$

gesetzt, so folgt

$$(i'''\, i''\, i')\, i = |\, i'''\, i''\, i'\, |\, J\, i = |\, i'''\, i''\, i'\,|\ \ |\, J\, i\,|,$$

also gleich dem dreifachen Volumen des durch die vier Eckpunkte gebildeten Tetraeders, welches mit $|\, i'''\, i''\, i'\, i\,|$ bezeichnet sein mag. Da es nunmehr gleichgiltig ist, von welcher Ebene desselben man ausgeht, so kann man mit Hinweglassung eines Zahlenfactors schreiben

$$8\text{c}) \quad i'''\, i''\, i'\, i = |\, i'''\, i''\, i'\, i\,|.$$

Bei Veränderung der Factorenfolge ist das Vorzeichen gemäss den Gleichungen (5' und 5'' IV) zu wählen, so dass also wegen 8b), jede cyclische Vertauschung zwischen den vier Factoren und jede solche zwischen drei aufeinanderfolgende, das Vorzeichen ungeändert lässt.

Betrachtet man aber in 8_b) den Punkt i als Durchschnitt dreier Ebenen, setzt demnach

$$J''' J'' J' = \varepsilon [J''' J'' J'] i,$$

so folgt

$$J''' J'' J' J = \varepsilon [J''' J'' J'] i J = \varepsilon [J''' J'' J'] \mid J i \mid.$$

Es ist aber nach (9 I) das Verhältniss der in J gelegenen Tetraederfläche zum Factor von $|J i|$ constant für dasselbe Tetraeder; nennt man diesen Quotienten φ und bezeichnet das Volumen des Tetraeders mit $|J''' J'' J' J|$, so kann man mit Hinweglassung des Zahlenfactors 3 schreiben

$$8_d)\ J''' J'' J' J = \frac{1}{\varphi} \mid J''' J'' J' J \mid.$$

Bezüglich des Zeichenwechsels bei veränderter Factorenfolge gelten dieselben Bemerkungen, wie sie zu 8_c) hinzugefügt wurden.

Die symbolische Gleichung

$$a j = a_1 j_1 + a_2 j_2$$

kann, wenn j' irgend eine Gerade im Raume bedeutet, nach [5 III] geschrieben werden

$$a [j j'] = a_1 [j_1 j'] + a_2 [j_2 j'].$$

Es ist daher auch erlaubt

$$8_e)\ j j' = [j j']$$

zu setzen, und hienach die Producte der Ausdrücke von Geraden zu entwickeln.

Betrachtet man in 8_e) jede der Geraden aus zwei Punkten bestimmt, setzt also

$$i''' i'' = | i''' i'' | j, \; i' i = | i' i | j'$$

so erhält man

$$i''' i'' i' i = | i''' i'' | \; | i' i | j j' = | i''' i'' | \; | i' i | [j j'],$$

und da der rechte Theil das sechsfache Volumen des aus den vier Punkten gebildeten Tetraeders ist, so fällt, mit Hinweglassung eines Zahlenfactors, der hier gefundene Werth des Productes von vier Punkten mit obigem 8_c) zusammen.

Ebenso, wenn man

$$J''' J'' = \sin (J''' J''). j, \; J' J = \sin (J' J). j'$$

setzt, wodurch

$$J''' J'' J' J = \sin (J''' J'') \sin (J' J) j j' = \sin (J''' J'') \sin [J' J) [j j']$$

wird; erkennt man aus einfachen Betrachtungen, dass bis auf den Zahlenfactor 6, auch der hier gefundene Werth für das Product von vier Ebenen mit den in 8_d) angegebenen übereinstimmt.

Die in $8_e - 8_c$ enthaltenen Werthe der Situationszeichen-Producte liefern keine **Ausdrücke** von Ebenen, Geraden oder Punkten, sondern nur gewisse rein metrische Relationen.

Zusatz. Auch für Strahlen und Ebenen-Büschel und Bündel und für das ebene System, erhält man durch Entwicklung gewisser Situationszeichenproducte nur rein metrische Relationen. So wird beispielsweise im ebenen System

$$ij = | \, i j \, | \, J$$

immer dieselbe Ebene, nämlich die des Systemes bestimmen und diese erscheint daher in allen Gliedern der Entwicklung und kann, wie sofort aus der Bedeutung des Zeichens J hervorgeht, wie ein gemeinsamer Factor weggelassen werden. Dann bleibt aber nur eine gewöhnliche algebraische Gleichung übrig.

V.

Anwendungen.

An einigen Fällen, die der Einfachheit wegen auf Aufgaben in der Ebene beschränkt bleiben mögen, soll die Art und Weise der Anwendung der vorhergehenden Sätze vorgeführt werden.

1) In der Ebene sei ein Dreieck gegeben mit den Eckpunkten $i_1 \; i_2 \; i_3$ und diesen gegenüberliegenden Seiten $j_1 \; j_2 \; j_3$. Die positiven Richtungen seien durch die Bewegung nach der Reihenfolge der Indices der Eckpunkte bestimmt. Die Winkel der positiven Richtungen der Seiten an den Eckpunkten werden mit $\omega_1 \; \omega_2 \; \omega_3$, die Längen der gegenüberliegenden Seiten mit $\triangle_1 \; \triangle_2 \; \triangle_3$, die Höhenperpendikel mit $\chi_1 \; \chi_2 \; \chi_3$ und endlich die Dreiecksfläche mit Φ bezeichnet.

Die Geraden und Punkte der Ebene mögen alle auf dieses Dreieck als Fundamental-Dreieck (F. Dreieck) bezogen werden.

a) Den Ausdruck des Durchschnittspunktes zweier Geraden zu finden.

Sind die Ausdrücke der beiden Geraden

$$j \equiv a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3,$$
$$j' \equiv a'_1 j_1 + a'_2 j_2 + a'_3 j_3,$$

und i ihr Durchschnittspunkt, so findet man nach (7_2 IV)

$$i \equiv jj' \equiv (a_2 a'_3 - a'_2 a_3) \sin \omega_1 \, i_1 + (a_3 a'_1 - a'_3 a_1)$$
$$\sin \omega_2 \, i_2 + (a_1 a'_2 - a'_1 a_2) \sin \omega_3 \, i_3.$$

b) Den Ausdruck der Verbindungslinie zweier Punkte zu finden.

Sind die Ausdrücke der Punkte

$$i \equiv \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2 + \alpha_3\, i_3,$$
$$i' \equiv \alpha'_1\, i_1 + \alpha'_2\, i_2 + \alpha'_3\, i_3$$

und j ihre Verbindungslinie, so findet man nach (2' IV)

$$j \equiv i\, i' \equiv (\alpha_2\, \alpha'_3 - \alpha'_2\, \alpha_3)\, \triangle_1\, j_1 + (\alpha_3\, \alpha'_1 - \alpha'_3\, \alpha_1)\, \triangle_2\, j_2$$
$$+ (\alpha_1\, \alpha'_2 - \alpha'_1\, \alpha_2)\, \triangle_3\, j_3.$$

c) Den senkrechten Abstand eines Punktes von einer Geraden zu finden.

Sind die Ausdrücke von Punkt und Gerade

$$\alpha\, i = \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2 + \alpha_3\, i_3,$$
$$a\, j = a_1\, j_1 + a_2\, j_2 + a_3\, j_3,$$

und $|\, j\, i\, | = h$, so findet man nach 3) IV, (man bemerke den Zusatz zu 8)

$$a\, \alpha\, j\, i = a\, \alpha\, h = a_1\, \alpha_1\, \chi_1 + a_2\, \alpha_2\, \chi_2 + a_3\, \alpha_3\, \chi_3.$$

Um die Bedingung zu erhalten, dass i in j liege, hat man nur $h = o$ zu setzen. Berücksichtigt man noch die Relationen

$$\chi_1\, \triangle_1 = \chi_2\, \triangle_2 = \chi_3\, \triangle_3 = 2\, \Phi,$$
$$\frac{\triangle_1}{\sin \omega_1} = \frac{\triangle_1}{\sin \omega_2} = \frac{\triangle_3}{\sin \omega_1},$$

so lässt sich die Bedingungsgleichung in den beiden Formen darstellen

$$o = \frac{a_1\, \alpha_1}{\triangle_1} + \frac{a_2\, \alpha_2}{\triangle_2} + \frac{a_3\, \alpha_3}{\triangle_3},$$
$$o = \frac{a_1\, \alpha_1}{\sin \omega_1} + \frac{a_2\, \alpha_2}{\sin \omega_2} + \frac{a_3\, \alpha_3}{\sin \omega_3}.$$

d) Es sei ein Punkt i gegeben durch den Ausdruck

$$i \equiv \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2 + \alpha_3\, i_3.$$

Man ziehe in dem Viereck $i_1\, i_2\, i_3\, i$ die sechs Verbindungslinien, so werden deren Ausdrücke sein

$$i_1\, i_2 \equiv j_3,\; i_3\, i \equiv j''' \equiv - \alpha_2\, \triangle_1\, j_1 + \alpha_1\, \triangle_2\, j_2,$$
$$i_2\, i_3 \equiv j_1,\; i_1\, i \equiv j' \equiv - \alpha_3\, \triangle_2\, j_2 + \alpha_2\, \triangle_3\, j_3,$$
$$i_3\, i_1 \equiv j_2,\; i_2\, i \equiv j'' \equiv \alpha_3\, \triangle_1\, j_1 - \alpha_1\, \triangle_3\, j_3.$$

Sucht man die Durchschnitte $j'\, j_1$, $j''\, j_2$, $j'''\, j_3$, so erhält man hiefür

$$j'\, j_1 \equiv i' \equiv \alpha_2\, i_2 + \alpha_3\, i_3,$$
$$j''\, j_2 \equiv i'' \equiv \alpha_1\, i_1 + \alpha_3\, i_3,$$
$$j'''\, j_3 \equiv i''' \equiv \alpha_1\, i_1 + \alpha_2\, i_2,$$

welche Ausdrücke man auch sogleich durch Betrachtung des Ausdruckes von i gewinnen kann.

Endlich werden die Verbindungslinien dieser drei Punkte untereinander sein

$$i' i'' \equiv j^{(3)} \equiv \quad \alpha_2 \alpha_3 \triangle_1 j_1 + \alpha_3 \alpha_1 \triangle_2 j_2 - \alpha_1 \alpha_2 \triangle_3 j_3,$$
$$i'' i''' \equiv j^{(1)} \equiv - \alpha_2 \alpha_3 \triangle_1 j_1 + \alpha_3 \alpha_1 \triangle_2 j_2 + \alpha_1 \alpha_2 \triangle_3 j_3,$$
$$i''' i' \equiv j^{(2)} \equiv \quad \alpha_2 \alpha_3 \triangle_1 j_1 - \alpha_3 \alpha_1 \triangle_2 j_2 + \alpha_1 \alpha_2 \triangle_3 j_3.$$

Diese Geraden lassen sich aber mit Berücksichtigung der Ausdrücke der sechs Verbindungsgeraden auch so schreiben:

$$j^{(3)} \equiv \alpha_2 \alpha_3 \triangle_1 j_1 - \alpha_1 j' \equiv \alpha_3 \alpha_1 \triangle_2 j_2 + \alpha_2 j'',$$
$$j^{(1)} \equiv \alpha_3 \alpha_1 \triangle_2 j_2 - \alpha_2 j'' \equiv \alpha_1 \alpha_2 \triangle_3 j_3 + \alpha_3 j''',$$
$$j^{(2)} \equiv \alpha_2 \alpha_3 \triangle_1 j_1 + \alpha_1 j' \equiv \alpha_1 \alpha_2 \triangle_3 j_3 - \alpha_4 j'''.$$

Nach (III, d) erkennt man hieraus, dass $j_1 j'$ durch $j^{(3)} j^{(2)}$, $j_2 j''$ durch $j^{(3)} j^{(1)}$ und $j_3 j'''$ durch $j^{(1)} j^{(2)}$ harmonisch getrennt sind, ein bekannter Satz.

e) Es seien in zwei Punkten i_{I} i_{II} zwei Strahlenbüschel gegeben

$$a j_{\mathrm{I}} + x a' j'_{\mathrm{I}} \quad , \quad b j_{\mathrm{II}} + y b' j'_{\mathrm{II}}.$$

Lässt man y von x abhängig sein, so gehört zu jedem Strahl des ersten Büschels ein oder mehrere Strahlen des zweiten als entsprechende.

Die einfachste Beziehung ist $y = x$. In diesem Falle sind die beiden Strahlbüschel projectivisch. In der That setzt man für x vier beliebige Werthe ein, so erhält man für das erste Büschel die vier Strahlen

$$a_1 j_1 = a j_{\mathrm{I}} + x_1 a' j'_{\mathrm{I}} \quad , a_2 j_2 = a j_{\mathrm{I}} + x_2 a' j'_{\mathrm{I}}$$
$$j_3 \equiv a j_{\mathrm{I}} + x_3 a' j'_{\mathrm{I}} \quad , \quad j_4 \equiv a j_{\mathrm{I}} + x_4 a' j'_{\mathrm{I}}.$$

Macht man hierin

$$x_3 = \frac{x_1 + \xi x_2}{1 + \xi}, \quad x_4 = \frac{x_1 + \xi' x_2}{1 + \xi'},$$

so lassen sich die Ausdrücke der beiden letzten Strahlen auch so schreiben:

$$j_3 \equiv a_1 j_1 + \xi a_2 j_2, \quad j_4 \equiv a_1 j_1 + \xi' a_2 j_2,$$

daher ist nach (III, 1, *d*) das Doppelverhältniss

$$(j_1 j_2 j_3 j_4) = \frac{\xi a_2}{a_1} : \frac{\xi' a_2}{a_1} = \frac{\xi}{\xi'},$$

also unabhängig von a und a', und nimmt daher für das zweite Büschel denselben Werth an. Man bemerkt zugleich, dass in den beiden Büscheln j_{I} und j_{II} (für $x = o$) j'_{I} und j'_{II} (für $x = \infty$) entsprechende Strahlen sind.

Denkt man sich die Strahlen j_{I} j'_{I} j_{II} j'_{II} auf das F. Dreiseit bezogen und ihre Ausdrücke eingesetzt, so werden die beiden projectivischen Strahlbüschel in i_{I} und i_{II} durch die Ausdrücke bestimmt sein

$$\text{I. } (a_1 + x\, a'_1)\, j_1 + (a_2 + x\, a'_2)\, j_2 + (a_3 + x\, a'_3)\, j_3$$
$$\text{II. } (b_1 + x\, b'_1)\, j_1 + (b_2 + x\, b'_2)\, j_2 + (b_3 + x\, b'_3)\, j_3$$

Multiplicirt man die beiden Ausdrücke, so erhält man einen Ausdruck für die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen. Dieser enthält x in der zweiten Potenz, stellt also eine Curve zweiter Ordnung dar.

Lässt man die Punkte i_2 und i_1 beziehungsweise mit i_{I} und i_{II} zusammenfallen, so hat man a_2 a'_2 b_1 b'_1 Null zu setzen und die Ausdrücke I und II werden dann

$$(a_1 + x\, a'_1)\, j_1 + (a_3 + x\, a'_3)\, j_3,$$
$$(b_2 + x\, b'_2)\, j_2 + (b_3 + x\, b'_3)\, j_3.$$

Es mag noch i_3 nach dem Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen verlegt werden. Damit dann j_1 und j_2 entsprechende Strahlen werden, müssen die Coefficienten von j_3 für einen und denselben Werth von x verschwinden, dieses ist aber nur möglich, wenn $a_3 = b_3$, $a'_3 = b'_3$ ist.

Multiplicirt man nun die beiden Ausdrücke

$$(a_1 + x\, a'_1)\, j_1 + (a_3 + x\, a'_3)\, j_3$$
$$(b_2 + x\, b'_2)\, j_2 + (a_3 + x\, a'_3)\, j_3,$$

dividirt das Product durch a'_1 a'_3 b'_2 und setzt an Stelle der Quotienten der Constanten neue Zeichen, so lässt sich der Ausdruck der Curve schreiben

$$a' (x - b)(x - c)\, i_1 + b' (x - c)(x - a)\, i_2 + c' (x - a)(x - b)\, i_3.$$

Ertheilt man x die Werthe $a\ b\ c$, so erkennt man, dass die Curve durch i_1 i_2 i_3 hindurchgeht.

f) Sind $p\ q\ r$ Funktionen von x, so stellt

$$p\, i_1 + q\, i_2 + r\, i_3$$

den Punkte-Ausdruck einer Curve vor. Lässt man hierin x wachsen um $d\,x$, so geht man von irgend einem Punkt zu einem unendlich nahegelegenen

$$(p + p'\, d\,x)\, i_1 + (q + q'\, d\,x)\, i_2 + (r + r'\, d\,x)\, i_3$$

über. Multiplicirt man beide Ausdrücke, so erhält man den Ausdruck der Tangente in irgend einem Punkte der Curve, also den Tangenten-Ausdruck derselben:

$(q\,r' - q'\,r)\,\triangle_1\,j_1 + (r\,p' - r'\,p)\,\triangle_2\,j_2 + (p\,q' - p'\,q)\,\triangle_3\,i_3.$

Wendet man dieses Verfahren auf den vorhin gefundenen Punkt-Ausdruck der Curve zweiter Ordnung an, so erhält man, nach Einführung neuer Zeichen für die auftretenden constanten Factoren

$$a_1\,(x - a)^2\,j_1 + b_1\,(x - b)^2\,j_2 + c_1\,(x - c)^2\,j_3$$

als Tangentenausdruck der durch die Eckpunkte des F. Dreiseits gehenden Curve.

Nach dem Gesetze der Dualität zwischen Punkt und Strahlengebilden in der Ebene schliesst man sofort, dass

$$\alpha'\,(\xi - \beta)\,(\xi - \gamma)\,j_1 + \beta'\,(\xi - \gamma)\,(\xi - \alpha)\,j_2 + \gamma'\,(\xi - \alpha)\,(\xi - \beta)\,j_3,$$
$$\alpha_1\,(\xi - \alpha)^2\,i_1 + \beta_1\,(\xi - \beta)_2\,i_2 + \gamma_1\,(\xi - \gamma)^2\,i_3,$$

die Tangenten und Punkt-Ausdrücke der Curve zweiter Classe sein werden, welche die Seiten des F. Dreiecks berührt.

g) Indem man die in die Constanten $a'\,b'\,c'$ mit einbezogenen Sinusse wieder separirt, kann man den Ausdruck des durch die Ecken des F. Dreiseits gehenden Kegelschnittes schreiben:

$$a\sin\omega_1\,(x - b)\,(x - c)\,i_1 + b'\sin\omega_2\,(x - c)\,(x - a)\,i_2$$
$$+ c'\sin\omega_3\,(x - a)\,(x - b)\,i_3.$$

Ertheilt man dem x drei verschiedene Werthe $x'\,x''\,x'''$, so erhält man drei auf dem Kegelschnitt liegende Punkte $i'\,i''\,i'''$, welche mit den drei Punkten $i_1\,i_2\,i_3$ zusammengenommen als Eckpunkte des Sechseckes $i_1\,i'\,i_2\,i''\,i_3\,i'''$ betrachtet werden sollen.

Indem man abkürzend

$$(x' - a) = \alpha',\ (x' - b) = \beta',\ (x' - c) = \gamma',\ (x'' - a) = \alpha'',$$
$$(x'' - b) = \beta'' \ldots.$$

setzt, werden die Ausdrücke der sechs Seiten nach Hinweglassung gemeinsamer Factoren:

$$i_1\,i' \equiv \quad b'\,\gamma'\,j_3 - c'\,\beta'\,j_2,\quad i''\,i_3 \equiv - a'\,\beta''\,j_2 + b'\,\alpha''\,j_1,$$
$$i'\,i_2 \equiv \quad a'\,\gamma'\,j_3 - c'\,\alpha'\,j_1,\quad i_3\,i''' \equiv - b'\,\alpha'''\,j_1 + a'\,\beta'''\,j_2,$$
$$i_2\,i'' \equiv - a'\,\gamma''\,j_3 + c'\,\alpha''\,j_1,\quad i'''\,i_1 \equiv \quad c'\,\beta'''\,j_2 - b'\,\gamma'''\,j_3.$$

Man suche die drei Durchschnittspunkte der neben einander stehenden Seiten, so erhält man mit Weglassung gemeinsamer Factoren:

$$i''_1 \equiv i'\,i_2 \cdot i_3\,i''' \equiv a'\sin\omega_1\,\gamma'\,\beta'''\,i_1 + b'\sin\omega_2\,\gamma'\,\alpha'''\,i_2$$
$$+ c'\sin\omega_3\,\alpha'\,\beta'''\,i_3,$$

$$i''' \equiv i_1\, i'.\, i''\, i_3 \equiv a' \sin \omega_1\, \gamma'\, \beta''\, i_1 + b' \sin \omega_2\, \gamma'\, \alpha''\, i_2 + c' \sin \omega_3\, \beta'\, \alpha''\, i_3,$$

$$i'_3 \equiv i_2\, i''.\, i'''\, i_1 \equiv a' \sin \omega_1\, \gamma''\, \beta'''\, i_1 + b' \sin \omega_2\, \gamma'''\, \alpha''\, i_2 + c' \sin \omega_3\, \beta'''\, \alpha''\, i_3.$$

Multiplicirt man diese drei Ausdrücke, indem man bedenkt, dass für das ebene System

$$i_1\, i_2\, i_3 = \Phi, \quad i''_1\, i'''_2\, i'_3 = |\, i''_1\, i'''_2\, i'_3 \,|$$

zu setzen ist, die Producte aber, in welchen wenigstens zwei gleiche Factoren auftreten, verschwinden; so erhält man mit Weglassung des gemeinsamen Factors

$$a'\, b'\, c' \sin \omega_1 \sin \omega_2 \sin \omega_3\, \Phi\, \alpha''\, \beta'''\, \gamma',$$

die Fläche $|\, i''_1\, i'''_2\, i'_3 \,|$ proportional dem Ausdrucke

$$\alpha' (\beta''\, \gamma''' - \beta'''\, \gamma'') + \alpha'' (\beta'''\, \gamma' - \beta'\, \gamma''') + \alpha''' (\beta'\, \gamma'' - \beta''\, \gamma').$$

Nun ist aber z. B.

$$\beta''\, \gamma''' - \beta'''\, \gamma'' = (x'' - x''')\, (b - c),$$

daher wird obiger Ausdruck

$$(b - c)\ [(x' - a)\ (x'' - x''') + (x'' - a)\ (x''' - x') + (x''' - a)\ (x' - x'')] = o.$$

Das Verschwinden der Dreiecksfläche $|\, i''_1\, i'''_2\, i'_3 \,|$ zeigt aber an, dass die drei Punkte in derselben Geraden liegen, und man bemerkt leicht, dass obiger Ausdruck auch hervorgeht, wenn man nach (c. V) die Bedingung dafür sucht, damit i''_1 auf $i'''_3\, i'_3$ liegt.

Es ist somit hier der Pascal'sche Satz unmittelbar aus der Gleichung des Kegelschnittes ohne Zuhilfenahme von Zwischensätzen bewiesen worden.

Zum Beweise des Brianchon'schen Satzes braucht die Rechnung gar nicht geführt zu werden, da in der neuen Bedeutung die Gleichungen sämmtlich dieselbe Form behalten.

Diese wenigen Anwendungen werden die Eingangs aufgestellte Behauptung, dass die vorgeführte Ergänzung des barycentrischen Calculs einen praktischen Nutzen zu gewähren verspricht, zum Theil rechtfertigen; noch mehr wird dieses aber die Ueberlegung vermögen, wie die Theorie der Krümmung von Linien und Flächen, die geometrischen Verwandtschaften, mechanische

Probleme u. s. f. durch die dargelegten Rechnungsmethoden theils einer vervollständigenden, theils einer sehr naturgemässen Behandlung unterzogen werden können; das Princip der Dualität aber kaum auf einem anderen Wege der Untersuchung einen entsprechenderen Ausdruck finden dürfte, indem für den dualen Satz der ganze Complex von Formeln ungeändert bleibt und nur die Bedeutung der Situationszeichen und gewisser Coefficienten entsprechend abzuändern ist.