Ueber eine

Erweiterung der periodischen Reihenentwickelung und deren physikalische Deutung.

Von **Dr. A. Toepler,**

Professor der Physik an der Universität in Graz.

Bekanntlich ist es durch die Reihe von Fourier möglich geworden, eine beliebige periodische Bewegung als Summe einfacher Pendelschwingungen darzustellen. Es schien mir eine der Untersuchung würdige Frage zu sein, ob nicht analoge Zerlegungen möglich seien, wenn man anstatt der Pendelschwingungen andere periodische Partialbewegungen zu Grunde legt. Durch diese Frage wurde die vorliegende Untersuchung veranlasst.*) In derselben wird der Nachweis geliefert, dass in der That Functionen, welche nach Fourier in Reihen durch die sinus und cos ganzer Vielfacher entwickelt werden können, in zahlreichen Fällen auch darstellbar sind durch andere periodische Functionen. Man gelangt dabei zu periodischen Reihen, welche in ihren Eigenschaften den Reihen von Fourier durchaus entsprechen und daher an Stelle dieser in den betreffenden Fällen angewendet werden können.

Ich habe zur Lösung der Frage vorläufig nur einen indirecten Weg aufgefunden. Derselbe leidet allerdings an einer Unvollständigkeit, mit welcher alle ähnlichen Methoden behaftet sind. Meine Mittheilung macht daher nicht den Anspruch einer abgeschlossenen mathematischen Untersuchung. Die Beweiskraft meiner Ableitung gilt in voller Strenge nur für Functionen, welche gewissen in der Abhandlung genauer besprochenen Voraussetzungen entsprechen. Wenn nun auch hierdurch bereits ein brauchbares

---

*) Eine vorläufige Bemerkung über den Gegenstand habe ich bereits im Anzeiger der kaiserl. Akademie in Wien dd. 11. April veröffentlicht.

Material von einigem Umfange geschaffen sein dürfte, so ist doch von der Giltigkeit meiner Reihen eine noch grössere Allgemeinheit zu vermuthen. In solchen Fällen nämlich, in welchen die in Folgendem mitgetheilte Ableitung nicht mehr ausreicht, ist dennoch die Zulässigkeit der erweiterten periodischen Reihen im Allgemeinen nicht ausgeschlossen, wie die Untersuchung an bestimmten Beispielen zeigt. Es bleibt also noch ein weites Feld zur Bearbeitung offen.

Ich habe mich nichtsdestoweniger zur Veröffentlichung der Resultate in ihrer jetzigen Form entschlossen, da ich glaube, die weitere Determination des Gegenstandes den Fachmathematikern überlassen zu dürfen. Für den mathematischen Leser sei bemerkt, dass in den Paragraphen 2, 3, 6 und 7 das Wesentlichste zu finden ist. Auch glaube ich in der Darstellung, wenngleich diese für einen grösseren Leserkreis bestimmt wurde, den Anforderungen der Strenge in dem Masse Rechnung getragen zu haben, wie es zur Orientirung des Fachlesers nöthig ist. Sollte meine Mittheilung zu weiteren Untersuchungen auf einem, wie ich glaube, dankbaren Gebiete anregen, so hat dieselbe ihren Zweck erfüllt.

§ 1.

Wir verstehen in Folgendem unter periodischen Functionen im weiteren Sinne solche Functionen, deren Werthe beim Wachsen der unabhängig Veränderlichen in bestimmten, gleichen Intervallen wiederkehren. Die Betrachtung wird wesentlich vereinfacht, wenn wir zunächst mit solchen Fällen beginnen, in denen der Verlauf der Functionen innerhalb eines Intervalles durch gewisse Bedingungen eingeschränkt ist. Es ist dann leicht, auch die allgemeineren Resultate zu überblicken.

Wir betrachten zunächst die bekannte periodische Function

$$(1) \quad y = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \ldots + \alpha_n \sin nx + \ldots\ldots$$

in welcher α_1, α_2 etc. constante Zahlenwerthe bedeuten und die Bogenwerthe unter dem sinus-Zeichen nach ganzen Vielfachen von x fortschreiten. Da $\sin n(x + 2\pi) = \sin nx$, so kehren dieselben Werthe der Reihe wieder, wenn x um je 2π wächst. Die Function ist periodisch mit dem Intervall 2π.

Ausserdem tritt noch die Eigenschaft hinzu, dass $\sin n\,(-x) = -\sin n\,x$. Die Werthe der Reihe sind also entgegengesetzt für entgegengesetzte x. Stellt man die Function graphisch als Curve dar (Fig. 1), so ist der Zweig, welcher zwischen den Abscissen $-\pi$ und 0 liegt, congruent mit dem Zweige zwischen 0 und π, wenn man letzteren sowohl um die Abscissen- als Ordinatenachse umkehrt. Ausserhalb der Gränzen $-\pi$ und $+\pi$ wiederholen sich beide Zweige in der aus der Fig. 1 ersichtlichen Weise.

Bekanntlich können nun nach den Sätzen von Fourier die Coefficienten α_1, $\alpha_2 \ldots$ derart bestimmt werden, dass die Werthe von y zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$ übereinstimmen mit den Werthen einer beliebig gewählten Function $f(x)$. Ausgeschlossen sind nur gewisse abnorme Fälle, welche ohnehin für physikalische Betrachtungen kein besonderes Interesse haben; so darf z. B. $f(x)$ zwischen den angeführten Gränzen weder unendlich werden, noch unendlich viele Maxima und Minima haben u. s w. Man findet für diesen Fall die Coefficienten durch die Gleichung:

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin n\,x\,d\,x$$

und dann ist für $0 < x < \pi$

$$(2) \ldots\ldots f(x) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2\,x + \alpha_3 \sin 3\,x + \ldots\ldots$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $f(x)$ ausserhalb der Gränzen 0 und π im Allgemeinen nicht mehr durch die Reihe dargestellt wird. Auch gilt die letzte Gleichung im Allgemeinen schon nicht mehr für $x = 0$ und $x = \pi$, da hier die Reihe stets die Werthe 0 liefert, während $f(x)$ von Null verschieden sein kann.

Wenn nun ein solcher Fall vorliegt, dass nämlich die Werthe der Reihe zwischen $x = 0$ und π durch einen geschlossenen Ausdruck $f(x)$ wiedergegeben werden können, so lässt sich $f(x)$ so umgestalten, dass die Gleichung auch ausserhalb der obigen Gränzen besteht. Schreibt man nämlich:

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ y = \pm f\,[\pm (x - \varrho\,2\,\pi)]$$

wo ϱ diejenige ganze Zahl bedeutet, welche dem Werthe $\frac{x}{2\,\pi}$ am nächsten liegt, und führt man die Bestimmung ein, dass die oberen oder unteren Zeichen zu gelten haben, je nachdem $\frac{x}{2\pi} \gtrless \varrho$ ist, so bedeutet der letztere Ausdruck ebenfalls eine periodische Wiederholung der zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ gelegenen Werthe von $f(x)$ in dem Sinne, wie es die Reihe verlangt. Es gilt auch hier die graphische Darstellung Fig. 1. Ist nämlich das Stück der Curve, welches zwischen $x = 0$ und $x = +\pi$ liegt, eine Darstellung von $f(x)$ innerhalb dieser Gränzen, so erhält man aus Formel (3) auch alle übrigen Zweige. Sei z. B.

$$0 < x < \pi \text{ oder } 0 < \frac{x}{2\pi} < \frac{1}{2}, \text{ so ist } \varrho = 0 \text{ und } \frac{x}{2\pi} > \varrho,$$

daher gilt hier $y = + f(x)$.

Ist $\pi < x < 2\pi$ oder $\frac{1}{2} < \frac{x}{2\pi} < 1$, so ist $\varrho = 1$ und $\frac{x}{2\pi} < \varrho$, daher gilt hier $-f[-(x-2\pi)]$ oder da man hier $x - 2\pi = -z$ setzen kann, wo $z < \pi$ ist, so ist $y = -f(z)$.

Ebenso findet man für $2\pi < x < 3\pi$, wenn man wie oben schliesst und $x = 2\pi + z$ setzt, dass $y = + f(z)$.

Für $3\pi < x < 4\pi$, wo $x = 4\pi - z$ zu setzen ist, folgt wieder $y = -f(z)$ u. s. w.

Man ersieht sofort, dass durch die Hilfsgrösse ϱ die Functionswerthe abwechselnd auf die beiden Strecken zwischen $-\pi$ und 0 oder 0 und $+\pi$ zurückgeführt werden, wenn x um je ein π wächst. Die Functionsbezeichnung (3) ist auch unterhalb $x = 0$ giltig, denn ist z. B.

$$-\pi < x < 0, \text{ so ist } -\frac{1}{2} < \frac{x}{2\pi} < 0, \text{ also } \varrho = 0 \text{ und } \frac{x}{2\pi} < \varrho,$$

also gilt $y = -f(-x)$ und setzt man $x = -z$, wo z den Absolutwerth von x bedeutet, so hat man $y = -f(z)$.

Wird $-2\pi < x < -\pi$, so ist $-1 < \frac{x}{2\pi} < -\frac{1}{2}$, also $\varrho = -1$ und $\frac{x}{2\pi} > \varrho$, also gilt $y = f(x + 2\pi)$ und $x = -2\pi + z$ gesetzt, wo z positiv und kleiner als π ist, erhält man $y = f(z)$.

Ebenso erhält man, wenn $-3\pi < x < -2\pi$, in welchem Falle $x = -2\pi - z$ gesetzt werden kann, $y = -f(z)$ u. s. w.

Man sieht also, dass durch obige Functionsbezeichnung die verlangte Periodicität dargestellt werden kann. Wir werden daher von derselben an geeigneter Stelle Gebrauch machen. Die Hilfsgrösse ϱ ist dabei selbst wieder eine Function von x, deren Werth sprungweise je um eine Einheit wächst, während x die Werthe $\pi(2k+1)$ überschreitet, unter k alle ganzen Zahlen verstanden.

Bei dieser Darstellungsweise ergibt sich im Allgemeinen eine Zweideutigkeit an den Stellen $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi \ldots . \pm k\pi$, wie schon aus der Figur zu ersehen ist. Wir treffen die Bestimmung, dass hier stets der Mittelwerth Null zwischen den beiden entgegengesetzten Ordinaten zu verstehen sei. Auch kann $f(x)$ so beschaffen sein, dass innerhalb der Strecke 0 bis π eine oder mehrere Sprungstellen vorkommen, so dass zu einer Abscisse je 2 Ordinatenwerthe gegeben sind. Hier ist auch stets das arithmetische Mittel zu nehmen. Wir wollen, um jedem Missverständniss vorzubeugen, uns kurz so ausdrücken, dass für alle Werthe des x von $-\infty$ bis $+\infty$ die Gleichung erfüllt sein müsse

$$\pm f[\pm(x - \varrho\, 2\pi)] = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \ldots\ldots,$$

wodurch jeder Zweifel an zweideutigen Stellen behoben ist, denn die Reihe gibt an den Sprungstellen bekanntlich das arithmetische Mittel aus beiden Ordinaten und es wird sich zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die Betrachtungen der folgenden Paragraphen auch für Unstetigkeitsstellen ihre Giltigkeit behalten.

§ 2.

Wir wollen nun untersuchen, ob sich eine Function, welche die im vorigen Abschnitt vorausgesetzten periodischen Eigenschaften besitzt, benutzen lässt, um nach ihr andere Functionen in einer analogen Weise in Reihen zu entwickeln, wie es nach Fourier durch die sinus ganzer Vielfacher von x geschieht.

Es sei also eine beliebige zweite Function gegeben, welche zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$ dargestellt werde durch

$$(4)\quad F(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots\ldots.$$

wo also

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x) \sin nx . dx \text{ ist.}$$

Es fragt sich, ob nicht eine ähnliche Reihenentwickelung für $F(x)$ möglich sei, in welcher wir an Stelle des sinus die complicirtere Function treten lassen, deren allgemeiner Ausdruck durch Gleichung (1) gegeben ist. Wir führen in diese einen veränderlichen Parameter m ein uud schreiben

$$(5)\quad y_m = \alpha_1 \sin mx + \alpha_2 \sin 2mx + \alpha_3 \sin 3mx + \ldots$$

Lassen wir nun m die Reihe der ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir eine unendliche Reihe von solchen y. Jedes derselben multipliciren wir mit einem unbestimmten Coefficienten A und setzen die Summe aller Glieder $= F(x)$. Es folgt, indem wir die Summanden mit gleichen Bogenwerthen in den sinus untereinander schreiben:

$$6\left\{\begin{array}{lllllll}
A_1 y_1 = A_1 [\alpha_1 \sin x & + \alpha_2 \sin 2x & + \alpha_3 \sin 3x & + \alpha_4 \sin 4x & + \alpha_5 \sin 5x & + \ldots] \\
A_2 y_2 = & A_2 [\alpha_1 \sin 2x & & + \alpha_2 \sin 4x & + \ldots & \ldots] \\
A_3 y_3 = & & A_3 [\alpha_1 \sin 3x & + \ldots & \ldots & \ldots] \\
A_4 y_4 = & & & A_4 [\alpha_1 \sin 4x & + \ldots & \ldots] \\
A_5 y_5 = & & & & A_5 [\alpha_1 \sin 5x & + \ldots] \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right.$$

$$7\left\{\begin{array}{l}
F(x) = A_1 \alpha_1 \sin x + (A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1) \sin 2x + \\
+ (A_1 \alpha_3 + A_3 \alpha_1) \sin 3x + (A_1 \alpha_4 + A_2 \alpha_2 + A_4 \alpha_1) \sin 4x + \\
+ (A_1 \alpha_5 + A_5 \alpha_1) \sin 5x + \ldots
\end{array}\right.$$

Diese Reihe, welche wieder nach den sinus ganzer Vielfacher von x fortschreitet, wird identisch mit der Reihe (4) für $F(x)$, wenn wir die Coefficienten gliedweise gleichsetzen und daraus die Werthe der unbekannten A berechnen. Es ist zu bemerken, dass bei der benutzten Additionsweise die Reihenfolge der Glieder, welche ein und demselben y angehören, nicht geändert wurde.

Zur Bestimmung der A hat man also die Bedingungsgleichungen:

$$(8)\left\{\begin{array}{l}
a_1 = A_1 \alpha_1 \\
a_2 = A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1 \\
a_3 = A_1 \alpha_3 + A_3 \alpha_1 \\
a_4 = A_1 \alpha_4 + A_2 \alpha_2 + A_4 \alpha_1 \\
a_5 = A_1 \alpha_5 + A_5 \alpha_1 \\
a_6 = A_1 \alpha_6 + A_2 \alpha_3 + A_3 \alpha_2 + A_6 \alpha_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{12} = A_1 \alpha_{12} + A_2 \alpha_6 + A_3 \alpha_4 + A_4 \alpha_3 + A_6 \alpha_2 + A_{12} \alpha_1
\end{array}\right.$$

u. s. w.

Wie man sofort erkennt, so sind die zu suchenden Coefficienten durch diese Gleichungen vollkommen (eindeutig) bestimmt. Die Bedingungsgleichung für A_m z. B. ist unmittelbar gegeben, indem man a_m gleichsetzt der Summe sämmtlicher Producte, welche sich bilden lassen aus je einem A und einem α, deren Indices multiplicirt m geben, wobei m und 1 selbst mitzurechnen sind. Sind die dem A_m vorausgehenden Coefficienten bestimmt, so ergibt sich unmittelbar A_m.

Schreiben wir die unter (6) summirten y in der Reihenfolge der Verticalcolumne, so haben wir

$$(9) \quad F(x) = A_1\, y_1 + A_2\, y_2 + A_3\, y_3 + \cdots\cdots$$

Diese Reihe gilt nur zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$*), da ja die Reihe (4), welche mit (7) gleichgesetzt wurde, nur zwischen diesen Gränzen allgemein giltig ist. Für $x = 0$ und $x = \pi$ gibt die Reihe den Werth Null, da hier alle y verschwinden.

Wenn nun der Fall vorliegt, dass das y unserer Entwickelung einer bestimmten gegebenen Function $f(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ nach Gleichung (2) entspricht, so lässt sich die durch Gleichung (3) dargestellte periodische Functionsbezeichnung anstatt der y in Reihe (9) einführen. Man hat nur zu schreiben

$$y_m = \pm f\,[\pm (m\,x - \varrho_m\, 2\,\pi)]$$

wo nun m die ganzen Zahlen durchläuft und ϱ_m immer diejenige ganze Zahl bedeutet, welche dem Werthe $\frac{m\,x}{2\pi}$ am nächsten liegt, und wobei die oberen oder unteren Zeichen zu gelten haben, je nachdem $\frac{m\,x}{2\pi} \gtrless \varrho_m$ ist. Graphisch dargestellt bedeutet auch dieser Ausdruck eine Curve von dem Ansehen der Fig. 1, nur hat man sich diese in der Richtung der Xachse im Verhältniss $m : 1$ gewissermassen zusammengedrückt zu denken, so dass alle Ordinaten, welche in Fig. 1 auf den Strecken von je 2π vorkommen, nun-

---

*) Die obige Herleitung ist nicht allgemein zulässig, denn der Schritt von der Reihenform (7) zur Form (9) enthält eine Vertauschung der Summationsweise und allerdings wäre erst von Fall zu Fall zu untersuchen, ob Gleichung (9) an Stelle von (7) gesetzt werden darf. Im nächsten Paragraphen werde ich jedoch die Voraussetzungen näher angeben, unter denen die obige Betrachtung jedenfalls strenge Giltigkeit hat.

mehr auf das Intervall $\frac{2\pi}{m}$ zusammengedrängt scheinen, wovon man sich durch nähere Untersuchung des Ausdruckes leicht überzeugt. Substituirt man diese Functionsbezeichnung, so erhält die Reihe die Form:

$$(10)\left\{\begin{aligned} F(x) = \pm A_1 f[\pm(x - \epsilon_1 2\pi)] \pm A_2 f[\pm(2x - \epsilon_2 2\pi)] \pm \\ \pm A_3 f[\pm(3x - \epsilon_3 2\pi)] \pm \ldots \end{aligned}\right.$$

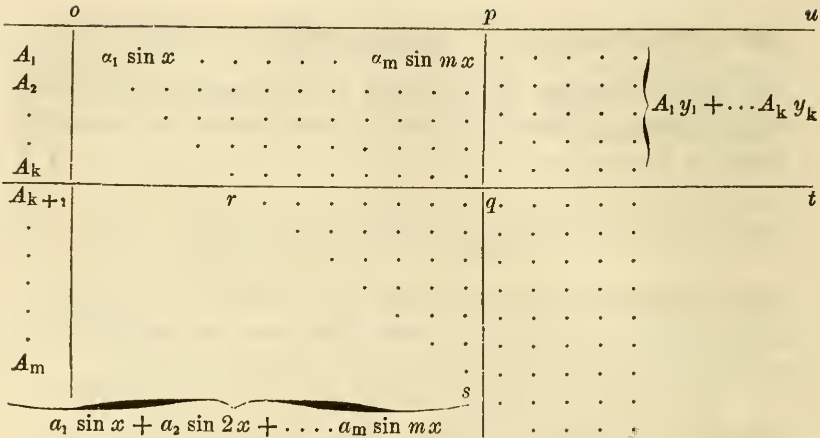
wobei selbstverständlich das Zeichen $\mp$ an Stelle von $\pm$ ausserhalb des Functionszeichens zu treten hat, wenn das betreffende A aus den Gleichungen (8) mit negativem Zeichen hervorgeht.

Es ist nun auch sehr leicht zu erkennen, dass die Reihe (9) oder (10) ausserhalb der Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$ einen periodischen Verlauf hat und zwar genau in demselben Sinne, wie die Reihe (4) nach Fourier. Dies geht aus dem Umstande hervor, dass alle Glieder der Reihe nach der Definition des § 1 entgegengesetzte Werthe annehmen für entgegengesetzte Werthe von x und dass der Werth eines jeden Gliedes wiederkehrt, wenn x um 2π wächst. Die graphische Darstellung Fig. 1 gilt also auch für die ganze Reihe ausserhalb der obigen Gränzen und wenn man in Gleichung (10) anstatt $F(x)$ linker Hand ebenfalls die periodische Bezeichnung $\pm F[\pm(x - \epsilon_1 2\pi)]$ einführt, so gilt die Gleichung nunmehr zwischen $x = -\infty$ bis $x = +\infty$.

§ 3.

Es wurde oben bemerkt, dass der indirecte Weg, welchen wir bei der Entwickelung einschlugen, im Allgemeinen keine strenge Giltigkeit habe. Der Complex der Gleichungen (6) repräsentirt eine Doppelreihe, welche wir in zweifacher Weise summirt haben, einmal nach Formel (7), dann nach Gleichung (9) und wir haben bisher diese Summationsweisen als gleichwerthig vorausgesetzt. Es fragt sich, unter welchen Bedingungen diese Voraussetzung jedenfalls in voller Strenge erfüllt, unsere Ableitung also zulässig sei.

Die Doppelreihe wollen wir durch folgendes Schema veranschaulichen:



Die horizontalen Punktreihen bedeuten hierbei die einzelnen y unserer Reihensumme (6), welche nach der rechten Seite ins Unendliche verlaufen. Dieselben überdecken in unserem Schema einen Raum, welcher nach links durch eine unter 45^0 geneigte Gerade *os* abgegränzt ist. Links denke man sich in einer Verticalcolumne die Coefficienten A, mit welchen die correspondirenden y zu multipliciren sind.

Es lässt sich nun beweisen, dass die Betrachtung des vorigen Paragraphen jedenfalls Giltigkeit hat, wenn die Coefficienten A, welche durch $F(x)$ und $f(x)$ bestimmt sind, eine absolut convergente Reihe bilden; unter einer absolut convergenten Reihe ist eine solche verstanden, bei welcher die Summe der Absolutwerthe nach einem bestimmten endlichen Werth convergirt. Wir nehmen also an, dass in irgend einem untersuchten Falle aus (8) solche Werthe von A_1, A_2 etc. hervorgehen, dass

$$\lim (A'_{k+1} + A'_{k+2} + \ldots\ldots A'_{k+n}) = 0$$

wo die Accente bedeuten, dass nur die absoluten Zahlenwerthe zu verstehen sind. Die Coefficientenreihe convergirt dann auch bei beliebiger Zeichenfolge.

Da die Horinzontalreihen unseres Schemas periodisch sind, so schwankt der Werth einer jeden derselben bei wachsendem x innerhalb gewisser Gränzen Nun ist aber nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen klar, dass der Maximalwerth, welchen irgend eine der Horizontalreihen, z. B. y_m annehmen kann, nicht grösser ist, als der Maximalwerth von y_1. Sei dieser C, so gilt er auch für y_m.

Wir wollen nun zunächst die in Gleichung (9) vertretene Summationsweise unserer Doppelreihe versinnlichen. Zu dem Ende schneiden wir unser Schema durch die Horizontale rt ab, welche unterhalb des entfernten Coefficienten A_k einsetzt. Alsdann repräsentirt das, was oberhalb dieser Linie liegt, den Werth der Reihe (9), wenn wir sie beim k^{ten} Gliede abbrechen. Der Rest unterhalb jener Horizontalen kann nach Obigem höchstens

$$(A'_{k+1} + A'_{k+2} + \ldots)\, C \text{ werden}$$

und dies wird kleiner, als jede denkbare Zahl, wenn wir nur k gross genug wählen. Die Reihe (9) convergirt also.

Wollen wir die Summation (7) veranschaulichen, so durchschneiden wir die Figur durch eine Verticale ps, welche hinter dem sehr weit entfernten m^{ten} Gliede der ersten Horizontalreihe einsetzt und also auch noch das erste Glied der Reihe y_m mit abschneidet. Der Gesammtwerth links von ps bedeutet mithin die Reihe (7), wenn wir sie beim m^{ten} Gliede abbrechen, und diese Reihe ist durch Gleichsetzung der Coefficienten identisch mit (4) geworden. Man kann nun jedenfalls das m so gross werden lassen, d. h. nöthigenfalls die Verticale so weit nach rechts verschieben, dass der Werth im Raume $upqt$ verschwindet; denn in diesem Raume erscheinen die Coefficienten A_1 bis A_k multiplicirt mit gewissen Resten der ersten k Horizontalreihen, welche Reste jedoch bei hinreichend grossem m beliebig klein werden, da die Horizontalreihen convergiren. Sei δ der grösste dieser Reste, so wird der Werth im Raum $upqt$ höchstens

$$(A'_1 + A'_2 + \ldots . A'_k)\, \delta \text{ werden können.}$$

Da aber die Summe der A' nur einen endlichen Werth hat und δ beliebig klein wird bei wachsendem m, so verschwindet der Werth des Raumes $upqt$ in der Gränze.

Es ist nun auch unmittelbar klar, dass die Werthe in dem dreieckigen Raume rqs verschwinden, da in demselben endliche Theilwerthe der y multiplicirt erscheinen mit den Coefficienten A_{k+1} bis A_m, deren Summe selbst den Gränzwerth Null hat. Daher wird bei hinreichend grossem k und m die Summe der Doppelreihe nach beiden Additionsweisen mehr und mehr durch die in das

Trapez $opqr$ fallenden Glieder dargestellt. Beide Summen sind convergent und gleichwerthig.

Wenn also die Rechnung eine absolut convergente Reihe für die Coefficienten A ergibt, so ist der Schritt von Glch. (7) zu Glch. (9) und (10) jedenfalls erlaubt und die Entwickelbarkeit für diesen Fall bewiesen. Dies findet man denn auch bei den später erläuterten Fällen bestätigt.

Wenn nun hierdurch die Möglichkeit der erweiterten periodischen Reihenentwickelung bereits für sehr viele Fälle gegeben ist, so muss ich doch noch Folgendes dazu bemerken:

Es ist mit dem Obigen durchaus nicht ausgesprochen, dass in solchen Fällen, in welchen die A nicht absolut convergiren, die Entwickelung überhaupt unstatthaft sei. Vielmehr bleibt für solche Fälle die Untersuchung nur eine offene, es erlischt nur die Beweiskraft meiner indirecten Methode! In der That stösst man am häufigsten auf solche Fälle, und ich werde Beispiele derart in § 4 anführen, in denen die Reihe nur mit Rücksicht auf das Vorzeichen der Glieder convergirt. In diesen Fällen kann man die Zulässigkeit vorläufig nur durch ein inductives Verfahren prüfen. Aus diesem Grunde scheint es mir nicht wichtig, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die absolute Convergenz der Coefficienten eintritt. Vielmehr glaube ich, dass eine Ausscheidung derjenigen Functionen, für welche die Reihe (9) oder (10) ihre Giltigkeit verliert, nicht eher möglich sein werde, als bis die Ableitung der letzteren auf allgemeinerer Grundlage gelungen ist.

Meistens ist es bequem, die Function $F(x) = a \sin x$ nach (10) in irgend einer anderen Function zu entwickeln, da hier in der Rechnung alle a bis auf das erste verschwinden. Hiezu hat Professor Boltzmann, welchem ich meine Resultate mittheilte, eine weitere nutzbare Bemerkung gemacht.

Wenn bewiesen ist, dass $\sin x$ nach irgend einem $f(x)$ durch Reihe (10) entwickelbar ist, so gilt sofort auch die Entwickelbarkeit nach $f(x)$ für alle diejenigen Functionen $F(x)$, welche in den sinus ganzer Vielfacher von x dargestellt

(Fourier) absolut convergirende Coefficienten (a_1, a_2 . . .) liefern.

Es sei z. B.:

$$
(11)\ldots \left\{ \begin{array}{l} \sin x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \ldots \text{ und} \\ F(r) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots \end{array} \right.
$$

wo die a absolut convergiren, so erhält man, wenn für die sinus ihre Reihen nach (11) substituirt werden, folgendes Schema, welches nach dem Obigen ohne Weiteres zu verstehen ist.

$$
\begin{array}{ll|l}
a_1 & A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot A_m y_m & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
a_2 & \qquad A_1 y_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
\cdot & \qquad\qquad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
\cdot & \qquad\qquad\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
a_k & \qquad\qquad\qquad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
\hline
\cdot & \qquad\qquad\qquad\quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
\cdot & \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
\cdot & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
\cdot & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
a_m & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{D_1 y_1 + D_2 y_2 + \cdots D_m y_m} & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} a_1 \sin x + \ldots a_k \sin kx
$$

Hier bedeuten die D die Coefficienten der neuen Reihe für $F(x)$. Man erkennt sofort, dass durch eine der früheren ganz analoge Schlussweise die Giltigkeit der Reihe

$$
F(r) = D_1 y_1 + D_2 y_2 + D_3 y_3 + \ldots\ldots
$$

bewiesen ist. Beim Beweis ist hier weder die absolute Convergenz der A noch der D vorausgesetzt. Man kann dieser Folgerung die folgende noch allgemeinere Form geben:

Wenn bei der Entwickelung irgend einer Function $F(x)$ gemäss Glch. (10) durch irgend eine zweite Function $f(x)$ eine absolut convergente Coefficientenreihe zum Vorschein kommt, so ist $F(x)$ auch jedenfalls entwickelbar nach allen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ etc., welche sich zur Darstellung von $f(x)$ als geeignet erwiesen haben. Der Beweis führt sich genau nach dem obigen Schema.

Man sieht also, dass es trotz der Unvollkommenheit des von mir eingeschlagenen Weges schon jetzt möglich ist, rasch eine grosse Zahl von Fällen aufzusuchen, in welchen die Zulässigkeit meiner Reihen nicht zu bezweifeln ist.

§ 4.

Ich will nun die voraufgegangene Entwickelung auf einige Beispiele anwenden. Mehrere derselben sind absichtlich so gewählt, dass ihre Richtigkeit unmittelbar einleuchtet. Ihre Uebereinstimmung mit der Rechnung kann dann als Bestätigung der letzteren dienen.

Da die Handhabung unserer periodischen Functionsbezeichnung bei der Anwendung auf specielle Fälle unbequemer erscheinen könnte, als sie es bei einiger Uebung ist, so will ich bemerken, dass man sich die Sache durch Zuhilfenahme der graphischen Darstellung sehr erleichtern kann. Es soll daher über diese noch Folgendes vorausgeschickt werden. In den die Beispiele erläuternden Figuren (2, 3, 4 etc. bedeutet stets die oberhalb gezeichnete Curve zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$ die darzustellende Function $F(x)$. Senkrecht darunter sind die ersten Glieder der Reihenentwickelung graphisch dargestellt. Ich werde dieselben bei der graphischen oder physikalischen Deutung stets periodische Componenten von $F(x)$ nennen. Der Sinn der Zeichnungen ist nun so aufzufassen, dass die Ordinaten der oberen (darzustellenden) Curve hervorgehen aus der Superposition der senkrecht darunter befindlichen Ordinaten der periodischen Componenten.

Man kann nun aus der Zeichnung zunächst unmittelbar ersehen, welchem Index irgend eine der unterhalb dargestellten Componenten in der Reihe entspricht; man braucht zu diesem Zwecke nur die Anzahl der (abwechselnd aufrechten und verkehrten) Zweige zu zählen, welche auf die Strecke 0 bis π fallen, wie ohne Beweis verständlich ist. So erkennt man z. B. aus Fig. 2, wo die Componenten gerade, zur Xachse parallele Linien sind, dass in der zugehörigen Reihe nur die Glieder vorkommen, deren Indices 1, 2, 4, 8 etc. sind; alle übrigen sind bei der Rechnung ausgefallen. Bei dem Falle Fig. 3 kommen nur Glieder mit ungeradem Index vor u. s. w.

Die erste der Componenten, welche nur einen Zweig hat, ist die darstellende $f(x)$ selbst, da diese innerhalb der Gränzen $x = 0$ und $x = \pi$ gleichwerthig ist mit $\pm f[\pm(x - \epsilon_1 2\pi)]$.

Aus der Figur ist auch die Zeichenfolge der Coefficienten der dargestellten Reihenglieder zu erkennen. Denn da

$\pm f[\pm(mx - \varepsilon_m 2\pi)]$ zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{m}$ gleichwerthig ist mit $+ f(mx)$, so würden, wenn z. B. alle Coefficienten A positiv wären, die ersten Zweige linker Hand in der Zeichnung bei allen Componenten die nämliche relative Lage zur Xachse haben. Die Zeichenfolge der Coefficientenreihe ist also mit Leichtigkeit aus der relativen Lage der ersten Zweige am linken Rande der Zeichnung zu entnehmen. Die aufrechten haben Coefficienten mit gleichem, die verkehrten solche mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Es sei noch vorausgeschickt, dass die Handhabung der Hilfsgrösse ε etwas ausführlicher in den beiden ersten Beispielen erörtert ist. Diese dürften daher etwas breit erscheinen, was der Leser mit Rücksicht auf den angestrebten Zweck entschuldigen wolle.

Beispiel I. Fig. 2. Sei gegeben $F(x) = \frac{x}{2}$.

Diese Function sei in einer periodischen Reihe zu entwickeln nach der Function $f(x) = \frac{\pi}{4} x^0 = \frac{\pi}{4}$.

Die erste Function stellt eine zur Abscissenachse geneigte Gerade dar. Entwickelt man sie nach sinus ganzer Vielfacher von x, so findet man die Coefficienten

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{2} \sin nx\, dx = -\frac{\cos n\pi}{n}.$$

Für die Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in der Gleichung (4) hat man daher der Reihe nach die Werthe: $+1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, \ldots$ einzusetzen; entwickelt man $f(x)$ nach Fourier, so erhält man

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi}{4} \sin nx\, dx = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos n\pi}{n}.$$

Die Werthe von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sind also $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}$, 0, etc. Berechnet man nun aus (8) die Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$, so ersieht man sofort, dass alle diejenigen gleich Null werden, deren Indices nicht Potenzen von 2 sind. Man findet:

$$A_1 = +1$$
$$A_2 = -\frac{1}{2}$$
$$A_4 = -\frac{1}{4}$$
$$A_8 = -\frac{1}{8} \text{ etc.}$$

Die Reihe für $F(x)$ wird also

$$\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{4}\Big[\pm(x - \varrho_1 2\pi)\Big]^0 \mp \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4}\Big[\pm(2x - \varrho_2 2\pi)\Big]^0 \mp$$
$$\mp \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{4}\Big[\pm(4x - \varrho_4 2\pi)\Big]^0 \mp \ldots$$

Da $[\pm(nx - \varrho_n 2\pi)]^0$ stets $+1$ ist, so wäre die Reihe $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}\left(1 \mp \frac{1}{2} \mp \frac{1}{4} \mp \ldots\right)$, worin für jedes bestimmte x eine bestimmte Zeichenfolge gilt. Will man diese durch die Gleichung selbst ausdrücken, so schreibt man

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}\Big\{\pm(x - \varrho_1 2\pi)^0 \mp \frac{1}{2}(2x - \varrho_2 2\pi)^0 \mp$$
$$+ \frac{1}{4}(4x - \varrho_4 2\pi)^0 \mp \frac{1}{8}(8x - \varrho_8 2\pi)^0 \mp \ldots\Big\}$$

Die ersten 4 Glieder dieser Reihenentwickelung sind graphisch in Fig. 2 dargestellt und unterhalb befindet sich das Resultat der Superposition, wenn man bei dem 4. Gliede abbricht. Man erkennt ohne Weiteres die Zulässigkeit der Reihenentwickelung, welche für diesen Fall auch nach § 3 mit Strenge bewiesen ist.

Will man durch Rechnung das Resultat für irgend einen bestimmten Werth von x bestätigen, so handelt es sich nur um die Bestimmung der Hilfsgrösse ϱ und der Zeichenfolge. ϱ_n ist definirt durch die Gleichung

$$\frac{n x}{2\pi} = \varepsilon_n \pm \delta,$$

wo ε_n eine ganze Zahl und $\frac{1}{2} > \delta > 0$ sein muss. Die Bestimmung vollführt sich bei einem bestimmten x für die ganze Reihe der Glieder sehr einfach, wenn man folgendermassen verfährt. Da x zwischen 0 und π liegt, so kann man es einen aliquoten Theil von π, z. B. $\frac{\pi}{z}$ nennen. Dann lautet die Bedingung für ε_n

$$\frac{n}{2z} = \varepsilon_n \pm \delta.$$

Man schreibe also zu der Reihe der Indices n die nächstgelegenen ganzen Vielfachen von 2z auf; diese Vielfachen $\varepsilon_n\, 2z$ verglichen mit den n entscheiden über das Vorzeichen, denn nach der Definition gelten in unserer Reihenentwickelung die oberen oder unteren Zeichen, je nachdem $\frac{nx}{2\pi} \gtrless \varepsilon_n$, das heisst also, je nachdem $n \gtrless \varepsilon_n . 2z$ ist.

Wählt man z. B. $x = \frac{\pi}{3}$, also $z = 3$, so erhält man folgende Tabelle:

n	$\varepsilon_n . 2z$	*Zeichen*
1	0	+
2	0	+
4	6	—
8	6	+
16	18	—
32	30	+
etc.	etc.	etc.

In der letzten Columne bedeutet ein +, dass in unserer Reihe das obere, ein —, dass das untere Zeichen zu gelten hat. Da die eingeklammerten Grössen alle den Werth + 1 haben, so ist also die Ordinate für $x = \frac{\pi}{3}$

$$y = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \pm \ldots .\right)$$

Die geometrische Reihe in der Klammer hat aber die Summe $\frac{2}{3}$, also ist $y = \frac{\pi}{6}$, was den geforderten Werth von $F(x)$ darstellt.

Für $x = \frac{2}{3}\pi$, also $z = \frac{3}{2}$, ergibt die Rechnung in analoger Weise

$$F(x) = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \pm \ldots\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Setzt man ferner der Reihe nach

$x = \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{11}, \ldots$, so findet man für die Vorzeichen der Glieder resp. Folgendes:

$$+ - - + + - - + + - - \ldots\ldots$$
$$+ - - + - - + - - + - - \ldots\ldots$$
$$+ - - - + + + - - - + + + - - - \ldots\ldots$$
$$+ - - - + - + + + - + - - - + - \ldots\ldots$$

Die Absolutwerthe bleiben dabei stets die Potenzen von $\frac{1}{2}$ und bekanntlich lassen sich diese Reihen mit periodischer Zeichenfolge durch einen ähnlichen Kunstgriff summiren, wie es bei der einfachen geometrischen Reihe geschieht. Man erhält für die den obigen x entsprechenden Ordinaten die Werthe

$$\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{14}, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{22}, \ldots \text{ etc.}$$

Bisher wurden nur solche Werthe des x gewählt, bei welchen keine Sprünge der periodischen Componenten stattfinden; auch an diesen Stellen gilt die Reihe. Wir setzen z. B. $x = \frac{\pi}{2}$ und suchen die Ordinate. Schon aus der Fig. ist ersichtlich, dass hier ausser der ersten alle Componenten einen Sprung machen. Nach § 1 ist aber der Werth der periodischen Glieder an diesen Sprungstellen = Null zu setzen; es bleibt also nur das erste Glied der Reihe und es findet sich sofort $F(x) = \frac{\pi}{4}$. Eine analoge Betrachtung gilt für die Stellen $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ etc.

Es ist auch leicht einzusehen, dass, wenn man das x von einer Sprungstelle aus um ein unendlich Kleines wachsen lässt, der Werth der Function durch die Sprünge der Componenten nicht einen endlichen Zuwachs erhalten kann. Wenn z. B. die Abscisse zu dem Werthe $\frac{\pi}{2}$ einen unendlich kleinen Zuwachs erfährt, so ist schon aus der Zeichnung zu ersehen, dass dadurch in der 2ten Componente ein positiver, in allen folgenden aber ein negativer Zuwachs entsteht. Der Gesammtzuwachs von $F(x)$ ist, wie man leicht erkennt

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots\right) \text{ und dies ist in}$$

der Grenze von Null nicht verschieden. Unsere Reihe stellt die Function $\frac{x}{2}$ vollkommen und zwar, wie man sich leicht überzeugt, zwischen den Gränzen $-\pi$ und $+\pi$ dar; die Reihe gilt auch noch für $x = 0$, nicht aber für $x = \pm\pi$.*)

Es sei hier die Bemerkung hinzugefügt, dass in den folgenden Beispielen die Bestimmung der Zeichenfolge ganz in derselben Weise stattzufinden hat; nur erfordert die Bestimmung der Absolutwerthe der periodischen Glieder, welche in dem vorliegenden Falle sehr einfach war, eine besondere Beachtung.

Beispiel II. Wir wollen nun $F(x) = \sin x$ durch eine Function darstellen, für welche die Entwicklung des § 2 ebenfalls zulässig ist. Sei $y = f(x)$ die Bezeichnung einer gebrochenen Geraden, deren Gleichung

$$y = x \text{ ist für } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$y = \pi - x \text{ für } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Diese Linie stellt über der Strecke 0 bis π der Abscissenaxe ein gleichschenkliges Dreieck von der Höhe $\frac{\pi}{2}$ dar.

*) Uebrigens ist die Reihe für den oben behandelten Fall an sich klar, denn dieselbe enthält ja nichts Anderes, als die Regel zur Darstellung einer beliebigen Zahl nach dem Zweiersystem.

Es ergibt sich bei der Entwicklung nach sinus ganzer Vielfacher von x zunächst

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin n x \, d x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin n x \, d x +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin n x \, d x.$$

oder $\alpha_n = \frac{4}{\pi} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$; es fehlen also die Glieder mit geradem Index und es ist

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \mp \ldots\right)$$

Von den Coefficienten a der Entwicklung für $F(x)$ werden alle Null, bis auf den ersten, welcher $+1$ ist.

Die Berechnung der Gleichungen (8) ergibt für die Coefficienten A folgende Gesetze:

1. Alle Glieder mit geradem Index werden Null; ausserdem fallen alle diejenigen Coefficienten aus, deren Indices mehrere gleiche Primfactoren enthalten. Z. B.:

$$A_2 = A_4 = A_6 \text{ etc.} = 0$$
$$A_9 = A_{25} = A_{27} = A_{45} = A_{49} \text{ etc.} = 0.$$

Die übrigen Coefficienten haben zum Absolutwerthe den reciproken Werth des Quadrates ihres Index multiplicirt mit $\frac{\pi}{4}$.

2. Die Vorzeichen construiren sich nach folgender Regel: Positives Vorzeichen haben ausser dem ersten Coefficienten alle diejenigen, deren Indices unter der Form $4k - 1$ erscheinen, während diejenigen, deren Indices durch $4k + 1$ bezeichnet sind, negativ werden; A_1 ist $+\frac{\pi}{4}$.

$$A_3 = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{\pi}{4},\ A_7 = \frac{1}{7^2}\cdot\frac{\pi}{4},\ A_{31} = \frac{1}{31^2}\cdot\frac{\pi}{4},$$

$$A_{231} = \frac{1}{231^2}\cdot\frac{\pi}{4}, \ldots .$$

$$A_5 = -\frac{1}{5^2}\cdot\frac{\pi}{4},\ A_{13} = -\frac{1}{13^2}\cdot\frac{\pi}{4},\ A_{105} = -\frac{1}{105^2}\cdot\frac{\pi}{4}, \ldots$$

Ausgenommen hiervon sind diejenigen Coefficienten, deren Indices aus einer geraden Anzahl von (ungleichen) Primfactoren bestehen. Diese erhalten das entgegengesetzte von demjenigen Zeichen, welches aus der vorherigen Regel folgen würde. Z. B.

$$A_{15} = - \frac{1}{15^2} \cdot \frac{\pi}{4}, \quad A_{21} = + \frac{1}{21^2} \cdot \frac{\pi}{4}, \quad A_{35} = - \frac{1}{35^2} \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$A_{1155} = - \frac{1}{1155^2} \cdot \frac{\pi}{4}, \text{ etc.}$$

Diese Coefficientenreihe ist absolut convergent, da die Summe der reciproken Werthe aller Quadratzahlen mit jeder Zeichenfolge nach einem bestimmten endlichen Werthe convergirt.*) Für dieses Beispiel also ist die Giltigkeit unserer Reihenentwicklung erwiesen. Für den vorliegenden Fall muss man, um die Reihe hinzuschreiben, sich des Functionszeichens für das allgemeine Glied bedienen, da $f(x)$ nicht in gewöhnlicher Weise durch eine einzige Gleichung ausdrückbar ist.

Zum Verständniss ist in Fig. 3 das Ergebniss durch graphische Superposition der 4 ersten Componenten der Reihe dargestellt. Wegen der Deutlichkeit ist der Massstab der Ordinaten vergrössert angenommen gegen die Abscissenwerthe. Man sieht, wie sich bei Berücksichtigung weniger Glieder die durch Superposition erhaltene gebrochene Linie schon enge an die sinus-Curve anschliesst.

Nebenbei sei bemerkt, dass aus diesem Falle convergente Zahlenreihen für $\frac{1}{\pi^2}$ gewonnen werden können. Setzt man z. B. $x = \frac{\pi}{2}$ und berechnet wie im vorigen Beispiel die ϱ, so findet sich, dass man das Zeichen für die Coefficienten vom Index $4k - 1$

---

*) Bekanntlich ist

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} > \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Das Integral hat aber den Werth 1, daher convergirt die Reihe mit jedem Zeichenwechsel, also auch, wenn wie oben eine unbegrenzte Zahl von Gliedern fehlt.

umzukehren und mit $\frac{\pi}{2}$ zu multipliciren hat. (Man ersieht dies auch aus der Fig. 3.) Die Reihenentwicklung muss also liefern:

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 = A_1\frac{\pi}{2} - A_3\frac{\pi}{2} + A_5\frac{\pi}{2} - A_7\frac{\pi}{2} \pm \ldots.$$

oder nach Substitution der Werthe für A

$$\frac{8}{\pi^2} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} \ldots\ldots\ldots$$

Setzt man $x = \frac{\pi}{3}$, so erhält man zur Berechnung der Werthe der Glieder folgende Tabelle:

n	Benachbarte Vielfache von 2.3	ξ_n	Werth von $\pm f[\pm(nx - \xi_n . 2\pi)]$
1	0	0	$+\frac{\pi}{3}$
3			0
5	6	1	$-\frac{\pi}{3}$
7	6	1	$+\frac{\pi}{3}$
9			0
11	12	2	$-\frac{\pi}{3}$
13	12	2	$+\frac{\pi}{3}$
15			0
:	:	:	:

Für alle n, welche Vielfache von 3 sind, wird nach der Definition das periodische Glied $\pm f[\pm(nx - \xi_n 2\pi)]$ gleich Null, da hier nx ganzen Vielfachen von π gleich wird. Es muss also:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = A_1\frac{\pi}{3} - A_5\frac{\pi}{3} + A_7\frac{\pi}{3} - A_{11}\frac{\pi}{3} + $$
$$+ A_{13}\frac{\pi}{3} \mp \ldots$$

sein, oder nach Substitution der A muss werden:

$$\frac{6}{\pi^2}\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{11^2} \cdots$$

Für $x = \frac{\pi}{6}$ gilt folgende Tabelle:

n	Benachbarte Vielfache von 12	ε_n	Werth von $\pm f[\pm(n x - \varepsilon_n 2\pi)]$
1	0	0	$+\frac{\pi}{6}$
3	0	0	$+\frac{\pi}{2}$
5	0	0	$+\frac{\pi}{6}$
7	12	1	$-\frac{\pi}{6}$
9	12	1	$-\frac{\pi}{2}$
11	12	1	$-\frac{\pi}{6}$
13	12	1	$+\frac{\pi}{6}$
15	12	1	$+\frac{\pi}{2}$
17	12	1	$+\frac{\pi}{6}$
19	24	2	$-\frac{\pi}{6}$
. .	. . . . . .	. .	. . . . . .

Somit

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = A_1\frac{\pi}{6} + A_3\frac{\pi}{2} + A_5\frac{\pi}{6} - A_7\frac{\pi}{6} - $$

$$- A_9\frac{\pi}{2} - A_{11}\frac{\pi}{6} + \ldots,$$

wobei $A_9 = A_{25} = A_{27} = \ldots = 0$ zu setzen sind; oder

$$\frac{4}{\pi^2} = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{3} \cdots\cdots$$

Die Gesetze für die Zeichenfolge dieser Zahlenreihen sind complicirt, lassen sich aber, wie man sieht, unmittelbar aus der Coefficientenreihe herleiten. Bei Berücksichtigung der Glieder bis zum Index 100 liefert die Berechnung dieser Reihen die geforderten Resultate bis auf Einheiten der 4. Decimale.

Beispiel III. Wir setzen $F(x) = \sin x$, $f(x) = \pi x - x^2$; das letztere bedeutet einen über der Strecke 0 bis π ausgespannten Parabelbogen vom Parameter $\frac{1}{2}$ und der Scheitelhöhe $\frac{\pi^2}{4}$. Zur Bestimmung der α haben wir in diesem Falle die Gleichung

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) \sin n x \, d x \text{ oder}$$

$$\alpha_n = - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\cos n \pi - 1}{n^3}.$$

Für gerade n ist $\cos n\pi = +1$, also $\alpha_n = 0$. Für ungerade n ist $\cos n\pi = -1$ und $\alpha_n = - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{-2}{n^3} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{n^3}$ Es ist also

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$$

Diese Reihe gibt, nebenbei bemerkt, einen Ausdruck für π^3; setzt man $x = \frac{\pi}{2}$, so ist $f(x) = \frac{\pi^2}{4}$, also

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} \mp \ldots.$$

Denkt man sich nun in unserem Theorem die Componenten aus solchen (aufrechten und verkehrten) Parabelbögen gebildet und entwickelt nach ihnen $F(x) = \sin x$, so findet man folgende Coefficientengesetze:

1. Alle Coefficienten mit geradem Index fallen aus, desgleichen diejenigen, deren Indices mehrere gleiche Primfactoren enthalten.

$$A_2 = A_4 = A_6 \text{ etc.} = 0$$
$$A_9 = A_{25} = A_{27} = A_{45} \text{ etc.} = 0.$$

2. Die übrigen haben zu Absolutwerthen die reciproken Cuben ihrer Indices multiplicirt mit $\frac{\pi}{8}$; hierbei sind die Vorzeichen negativ, wenn der Index Primzahl ist, (ausser dem ersten) oder überhaupt, wenn der Index sich in eine ungerade Anzahl von Primfactoren zerlegen lässt. A_1 ist $+\frac{\pi}{8}$.

$$A_3 = -\frac{1}{3^3}\cdot\frac{\pi}{8},\quad A_5 = -\frac{1}{5^3}\cdot\frac{\pi}{8},\ \text{etc.}$$

$$A_{105} = -\frac{1}{105^3}\cdot\frac{\pi}{8},\quad A_{165} = -\frac{1}{165^3}\cdot\frac{\pi}{8},\ \text{etc.}$$

Lässt sich der Index in eine gerade Anzahl von Primfactoren zerlegen, so ist das Vorzeichen positiv.*)

Die Coefficienten convergiren absolut und sehr rasch. Setzt man $x = \frac{\pi}{2}$, so findet sich leicht, dass dann werden muss:

$1 = \frac{\pi^2}{4}(A_1 - A_3 + A_5 - A_7 \pm \ldots)$ oder, wenn man für die A ihre Werthe setzt,

$$\frac{32}{\pi^3} = 1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} - \frac{1}{15^3} - \frac{1}{17^3} + \\ + \frac{1}{19^3} + \frac{1}{21^3} \cdots$$

Es lässt sich vermuthen, dass auch noch andere parabolische Curven, deren Scheitel in der Ordinate für $x = \frac{\pi}{2}$ liegen, rasch convergente Entwicklungen für $\sin x$ liefern werden.

Beispiel IV. (Fig. 4.) Ich will nun an dieser Stelle ein Beispiel einschalten, für welches die Ableitung des § 2 nicht

*) Man kann dieses Coefficientengesetz durch eine einfache Formel darstellen: Die Indices der in der Reihe vorkommenden Coefficienten haben die allgemeine Form $(p.q.r\ldots t)$, wo p, q, etc. von einander verschiedene Primzahlen mit Ausnahme von 2 sind. Ist l die Anzahl dieser Factoren des Index, so ist der Werth des Coefficienten

$$A_{(p.q.r\ldots t)} = \frac{(-1)^l}{(p.q.r\ldots t)^3}.$$

ausreicht. Sei $F(x) = \sin x$ und $f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot x^0$, so findet man für die Coefficienten A folgende Regeln, welche mit denen des vorigen Beispieles fast übereinstimmen.

1. Alle Coefficienten, deren Indices gerade Zahlen sind, oder mehrere gleiche Primfactoren enthalten, werden Null; z. B.

$$A_2 = A_4 = A_6 \text{ etc. } = 0.$$
$$A_9 = A_{25} = A_{27} = A_{45} \text{ etc. } = 0.$$

2. Die übrigen haben zum Absolutwerth den reciproken Werth ihres Index. Das Vorzeichen findet sich genau nach der Regel des vorigen Beispiels; es ist negativ bei ungerader, positiv bei gerader Primfactorenzahl des Index. Ausgenommen ist nur $A_1 = 1$.

$$A_3 = -\frac{1}{3},\ A_5 = -\frac{1}{5},\ A_7 = -\frac{1}{7} \text{ etc.}$$

$$A_{15} = +\frac{1}{15},\ A_{21} = +\frac{1}{21} \text{ etc.}$$

$$A_{105} = -\frac{1}{105},\ A_{165} = -\frac{1}{165} \text{ etc.}$$

Es lässt sich also der Coefficient vom Index $(p.q.r..t)$ darstellen durch die Formel

$$A_{(p.q.r..t)} = \frac{(-1)^l}{p.q.r..t},$$

wo l die Anzahl der ungleichen Primzahlen $p, q, \ldots$ bedeutet. Die Reihe wäre also für diesen Fall

$$\sin x = \frac{\pi}{4} \left\{ \pm (x - \varepsilon_1 2\pi)^0 \mp \frac{(3x - \varepsilon_3 2\pi)^0}{3} \mp \frac{(5x - \varepsilon_5 2\pi)^0}{5} \ldots \right\}$$

Die Absolutwerthe der Coefficienten bilden in diesem Falle eine divergente Reihe und somit wäre also nach § 3 die Zulässigkeit der Entwicklung dahingestellt. Wenn man aber für bestimmte Werthe des x die Reihe anwendet, so findet man, dass sie stets die geforderten Werthe liefert. Zunächst kann man dies durch directe Berechnung sehr vieler Glieder für solche Ordinaten bestätigen, bei welchen keine der periodischen Componenten einen Sprung macht (Siehe Fig.).

Setzt man $x = \frac{\pi}{2}$, so muss

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\left\{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + A_9 \mp \ldots\right\} \text{ oder}$$

$$\frac{4}{\pi} = A_1 - A_3 \pm \ldots \text{ werden.}$$

Für $x = \frac{\pi}{6}$ ergibt sich die periodische Zeichenfolge $+ + + - - -$ und es muss

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}\left\{A_1 + A_3 + A_5 - A_7 - A_9 - A_{11} \ldots\right\}$$

oder $\frac{2}{\pi} = A_1 + A_3 + A_5 - A_7 \ldots\ldots$ werden u. s. w.

Die Rechnung liefert die entsprechenden Werthe mit einer Annäherung, wie sie bei der schwachen Decrescenz der Coefficienten nicht besser erwartet werden kann, so z. B. bei der Gliederzahl bis zum Index 100 im ersteren Falle 1,287 anstatt 1,273, im zweiten 0,627 anstatt 0,636 u. s. f.

Einen besonderen Zweifel könnten die Sprungstellen der Componenten und deren Nachbarschaft veranlassen. Wir wollen daher einige derselben prüfen. Die Reihe gilt für $x = 0$ und $x = \pi$, da hier alle Componenten nach der Definition Null sind. Wächst x von dem Werthe 0 um ein unendlich Kleines, so springen die Componenten sofort auf die Werthe $A_1\frac{\pi}{4}$, $A_3\frac{\pi}{4}$, $A_5\frac{\pi}{4}$, etc., da ja für die ersten Zweige linker Hand in der Figur die oberen Zeichen der Reihe gelten. Man erhält also durch Superposition unendlich nahe beim Anfangspunkte der Coordinaten die Ordinate

$$y = \frac{\pi}{4}\left\{A_1 + A_3 + A_5 + \ldots\right\} = \frac{\pi}{4} \cdot S.$$

Soll die Giltigkeit für diese Formel bestehen, so muss, da $\sin x$ für verschwindende x selbst verschwindet, S den Grenzwerth Null haben. Dies bestätigt nun sowohl eine directe Berechnung sehr vieler Glieder, als folgende Betrachtung.*) Die Glieder der

*) Dieser Betrachtung will ich übrigens keinen höheren Werth beimessen, als der directen Berechnung vieler Glieder, denn die Darstellung der vorliegenden Zahlenreihe in Form eines Productes ist nicht frei von Einwänden.

Summe S lassen sich nämlich auch darstellen, indem man das fortlaufende Product aus Binomen

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdots$$

ohne Reduction ausmultiplicirt, wobei die Nenner die Primzahlen durchlaufen. Es lässt sich zeigen, dass dieses Product verschwindet bei unbegrenzter Factorenzahl. Zunächst ist der Grenzwerth des Productes

$$\sigma=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdots,$$

in welchem die Nenner durch alle ungeraden Zahlen gebildet werden, bekannt, denn es ist dieses Product beim k^{ten} Factor abgebrochen

$$\sigma_k=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{2k}{2k+1}=\frac{2^k.k!}{\frac{(2k)!}{2^k k!}(2k+1)}=\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)(2k)!}$$

Bekanntlich ist aber

$$\lim\frac{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k}{k!}=1 \text{ oder } k!=\sqrt{2\pi k}.\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

für sehr grosse k. Dies auf unseren Fall angewandt, gibt

$$\sigma_k=\frac{\sqrt{k\pi}}{2k+1} \text{ oder } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \text{ in der Gränze.}$$

Dies verschwindet aber, daher σ in der Gränze Null wird. Nun ist S kleiner, als der Werth, welchen σ annimmt, wenn man in letzterem Producte den 2., 4., 6. etc. Factor weglässt, da diese Factoren jedenfalls viel dichter gedrängt sind, als diejenigen, deren Nenner nicht Primzahlen sind. Es ist kurz

$$v=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdots\cdots>S.$$

Nun ist aber

$$\sigma=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdots\right)\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{13}\cdots\right)=v.w, \text{ wobei offenbar } v<w$$

und $v^2<vw$. Da nun $\sigma=v.w=\lim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$, also jedenfalls

auch $v^2 < \lim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ oder $v < \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}}$ und $S < v$, so ist $S < \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{\pi}{k}}}$ oder bei wachsendem k verschwindet S. Die Reihe gilt also auch in unendlicher Nähe des Coordinatenanfangspunktes, desgleichen in der Nähe von $x = \pi$.

Gehen wir nun zu einer Sprungstelle auf der Strecke zwischen 0 und π über. Für $x = \frac{\pi}{3}$ z. B. springen alle diejenigen Componenten, deren Indices Vielfache von 3 sind. Diese werden hier Null und die Ordinate der darzustellenden Curve hat den Werth

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}\left\{A_1 + 0 - A_5 + A_7 + 0 - A_{11} + A_{13} + 0 \ldots\right\},$$

oder es muss $\frac{2}{\pi}\sqrt{3} = A_1 - A_5 + A_7 - A_{11} \pm \ldots$ werden. Die Rechnung gibt bis zum Index 100 die Zahl 1,102 anstatt 1,097.

Lassen wir x noch um ein sehr Kleines über diese Sprungstelle hinaus wachsen, so erhält die Ordinate den Zuwachs

$$z = \left\{-A_3 - A_{15} - A_{21} - A_{33} - \ldots\right\} = \frac{\pi}{4} \cdot s,$$

wie durch eine einfache Betrachtung zu finden ist. Setzt man aber für die A ihre Werthe aus dem obigen Coefficientengesetze ein, so ersieht man sofort, dass die Glieder der Summe s auch dargestellt werden können durch Entwicklung des Productes

$$s = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right) \ldots,$$ in welchem die Nenner durch die Reihe der Primzahlen gebildet werden. Daraus würde folgen:

$$\frac{s\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}} = S \text{ oder } s = \frac{1}{2} S,$$

unter S die oben bereits betrachtete Summe aller A verstanden. Wenn diese verschwindet, so verschwinden auch s und z. Die directe Berechnung von s bestätigt die Convergenz nach dem Werthe Null. Beim Ueberschreiten der Sprungstelle $x = \frac{\pi}{3}$ erfährt also die Ordinate keinen endlichen Zuwachs. Eine ähnliche Betrachtung lässt sich auch bei allen übrigen Sprungstellen wiederholen.

Da die Reihe für die obigen Werthe von x gilt, so ist es erlaubt zu schliessen, dass nun auch die Giltigkeit für jeden Werth von x zwischen 0 und π besteht, denn es gibt ja keinen Punkt auf dieser Strecke, in welchem die darzustellende oder darstellende Function durch irgend eine besondere Eigenthümlichkeit von den bereits geprüften Stellen verschieden wären. Wenn nun auch diese inductive Schlussweise nicht den Werth eines strengen Beweises hat, so dürfte sich doch in dem vorliegenden Falle kaum ein ernstlicher Einwand gegen dieselbe erheben lassen.

Es wäre nun weiter durch Anwendung des § 3 zu folgern, dass auch die gebrochene Linie des Beispiels II und der Parabelbogen des Beispiels III durch $f(x) = \frac{\pi}{4}$ periodisch darstellbar sind.

B e i s p i e l V. Es sollen zum Schluss noch einige Beispiele hinzugefügt werden, bei denen die darstellende Function $f(x)$ oder die darzustellende $F(x)$ auf der Strecke 0 bis π discontinuirlich sind. Sei $f(x)$ eine Function, welche folgenden Verlauf habe

$$f(x) \begin{cases} = \frac{\pi}{6} \text{ für } 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ = \frac{\pi}{3} \text{ für } \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \\ = \frac{\pi}{6} \text{ für } \frac{2\pi}{3} < x < \pi; \end{cases}$$

hier macht also $f(x)$ für $x = \frac{\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$ Sprünge und diese kommen natürlich auch in den einzelnen Zweigen aller übrigen periodischen Componenten (s. Fig. 5) vor. Nun ist α_n gegeben durch die Summe dreier Integrale

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{6} \sin n x \, d x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\pi}{3} \sin n x \, d x + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{\pi}{6} \sin n x \, d x$$

$$\text{oder} \quad \alpha_n = \frac{2}{3n}\left\{\frac{1}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{6} - \frac{1}{2}\cos n\pi\right\}.$$

Dies ist Null für alle geraden n und solche, welche Vielfache von 3 sind; für alle übrigen Werthe von n ergibt sich $\alpha_n = \frac{1}{n}$; es ist also

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 11x}{11} + \frac{\sin 13x}{13} + \cdots$$

Die zu entwickelnde Function sei der Einfachheit halber $F(x) = \frac{\pi}{4}$. Die zugehörigen a sind aus den vorigen Beispielen bekannt. Für die A ergibt sich das einfache Gesetz

$$\begin{aligned} A_1 &= +1 \\ A_3 &= +\frac{1}{3} \\ A_9 &= +\frac{1}{9} \\ A_{27} &= +\frac{1}{27} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Alle übrigen verschwinden. Die Fig. 5 zeigt die Superposition der 3 ersten Glieder. Da hier $f(x)$ so gewählt ist, dass man dieselbe zwischen 0 und π nicht durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen kann, so muss man sich mit der Form

$$F(x) = \frac{\pi}{4} = \pm 1 . f[\pm (x - \varepsilon_1 2\pi)] \pm \frac{1}{3} . f[\pm (3x - \varepsilon_3 2\pi)] \pm \ldots.$$

begnügen, in welcher jedoch f die obige specielle Bedeutung hat. Da die Absolutwerthe der Coefficienten die Summe $\frac{1}{2}$ haben, so ist die Entwicklung zulässig. Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist beispielsweise

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{27} - \frac{\pi}{81} \pm \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

An den Stellen, an welchen die Componenten springen, also doppelwerthig sind, soll nach § 1 der Mittelwerth der beiden zugehörigen Ordinaten genommen werden. So springt z. B. bei $x = \frac{\pi}{3}$ das erste Glied der Reihe von $\frac{\pi}{3}$ auf $\frac{\pi}{6}$. Bei der Superposition

(Fig. 5) ist also der Werth $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{4}$ zu setzen. An dieser Stelle springen alle übrigen Glieder von ihren positiven auf die entgegengesetzten Werthe. Ihre Werthe sind Null und die Reihe liefert also $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Ist $x=\frac{\pi}{9}$, so ist das erste Glied $\frac{\pi}{6}$, das zweite $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}$ $=\frac{\pi}{12}$ alle übrigen Glieder sind Null, also $F\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$ u. s w. Es bestätigt sich also wiederum die Giltigkeit der Reihe für die Sprungstellen, wenn man für diese nach der Definition die Mittelwerthe gelten lässt.

Umkehrung. Wenn man in dem eben behandelten Beispiel die darstellende Function zur darzustellenden, die dargestellte zur darstellenden macht, so erhält man die Coefficienten

$$A_1=+1,\quad A_3=-\frac{1}{3}.$$

Alle übrigen fallen aus und die nur aus 2 Gliedern bestehende Reihe entspricht der Fig. 6; ihre Giltigkeit ist daher selbstverständlich. An den beiden Sprungstellen $x=\frac{\pi}{3}$ und $x=\frac{2\pi}{3}$ ist der Werth des ersten Gliedes $\frac{\pi}{4}$, der des zweiten Null. Die Reihe liefert also $F(x)=\frac{\pi}{4}$. An diesen Stellen springt die darzustellende Function von $\frac{\pi}{6}$ auf $\frac{\pi}{3}$ (und umgekehrt). Die Reihe liefert also das arithmetische Mittel aus den benachbarten Functionswerthen, wenn die zu entwickelnde Function discontinuirlich wird; sie stimmt also in dieser Beziehung mit der Entwickelung nach Fourier überein.

Beispiel VI. Wir wollen noch an einem zweiten sehr übersichtlichen Falle die Entwicklung nach der unstetigen Function des vorigen Beispieles zeigen. Es sei darzustellen die geneigte gerade Linie

$$F(x)=\frac{x}{2}=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}\pm\ldots.$$

Die darstellende Function sei, wie vorher

$$f(x)=\sin x+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 11x}{11}+\cdots$$

Für unsere Coefficientenreihe gelten folgende Regeln:

1. Alle Coefficienten werden Null, deren Indices nicht ausdrückbar sind durch Potenzen von 2 oder 3 oder durch Producte dieser Potenzen

$$A_5=A_7=A_{10}=A_{11} \text{ etc.} =0.$$

2. Die Absolutwerthe sind die reciproken Werthe der Indices. Positives Zeichen haben hierbei die Potenzen von 3, alle übrigen erhalten negatives Zeichen.

$$A_1=1,\ A_3=\frac{1}{3},\ A_9=\frac{1}{9},\ A_{27}=\frac{1}{27} \text{ etc.}$$

$$A_2=-\frac{1}{2},\ A_4=-\frac{1}{4},\ A_6=-\frac{1}{6},\ A_8=-\frac{1}{8},\ A_{12}=-\frac{1}{12} \text{ etc.}$$

Diese Coefficientenreihe absolut genommen lässt sich darstellen durch Entwicklung des Productes der beiden Potenzreihen

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)=2\,\frac{3}{2}.$$

Die Entwicklung ist also jedenfalls zulässig, was man leicht für eine Anzahl von Punkten bestätigen knnn.

Auch $F(x)=\sin x$ gibt bei der Darstellung durch obige unstetige Function ein einfaches Coefficientengesetz. Man erhält dasselbe unmittelbar, wenn man von den Coefficienten des Beispiels IV diejenigen Null setzt, deren Indices Vielfache von 3 sind. Dieser Fall muss wiederum durch eine Betrachtung für sich bestätigt werden.

Beispiel VII. Es sei noch hinzugefügt, dass die darstellende Function unter Umständen für $x=\frac{\pi}{2}$ einen kleineren Werth haben darf, als an anderen Stellen der Strecke $x=0$ bis $x=\pi$. Setzt man

$$f(x)\begin{cases} =\frac{\pi}{3} & \text{für } 0<x<\frac{\pi}{3} \\ =\frac{\pi}{6} & \text{"} \ \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3} \\ =\frac{\pi}{3} & \text{"} \ \frac{2\pi}{3}<x<\pi \end{cases}$$

und entwickelt $F(x)=\frac{\pi}{4}$, so werden alle A zu Null, ausser

$$A_1=1,\ A_3=-\frac{1}{3},\ A_9=\frac{1}{9},\ A_{27}=-\frac{1}{27} \text{ etc.}$$

Die Reihe ist auch hier anwendbar.

§ 5.

In der allgemeinen Betrachtung wurde die Wahl der zur Reihenentwicklung benutzten Functionen ganz offen gelassen. Man überzeugt sich leicht, dass für diese Wahl Beschränkungen existiren, wenn auch ein allgemeiner Ausdruck für dieselben vorläufig nicht gegeben werden kann. Unmittelbar einzusehen ist allerdings, dass der erste Coefficient α_1 der darstellenden Function, wenn man diese nach Fourier in den Sinus ganzer Vielfacher von x entwickelt, nicht verschwinden darf, da sonst die A der Reihe (10) unendlich werden.

Ausserdem findet man bei der Anwendung der Reihe manche Fälle, in welchen dieselbe unbestimmte Werthe liefert. Hierbei kommt es vor, dass die Reihe für gewisse charakteristische Punkte der darzustellenden Curve giltig sein kann, während sie andere Punkte unbestimmt lässt. Ich will dies der Vollständigkeit halber wenigstens an einem Beispiele erläutern.

Beispiel VIII. Sei $F(x)=\frac{\pi}{4}$, $f(x)=\frac{x}{2}$, so findet man, dass $A_1=1$, ferner:

$$A_2=A_4=A_8=A_{16} \text{ etc. } =\frac{1}{2}.$$

Alle übrigen Coefficienten werden Null. Die Reihe ist graphisch durch Fig. 7 verdeutlicht. Sie wäre zu schreiben:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{x-\varepsilon_1 2\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-\varepsilon_2 2\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4x-\varepsilon_4 2\pi}{2}+\ldots\ldots$$

da die Doppelzeichen hier stets $+$ liefern und die Vorzeichen durch die Werthe des ε an sich bestimmt sind. Obschon nun die Coefficientenreihe divergirt, so werden alle Ordinaten an den Sprungstellen der periodischen Glieder richtig dargestellt.

$$\text{für } x=\frac{\pi}{2} \text{ ist } y=\frac{\pi}{4}+0+0\ldots.$$

$$„\ x=\frac{\pi}{4}\ „\ y=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}+0\ldots.$$

$$„\ x=\frac{3\pi}{4}\ „\ y=\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}+0\ldots$$

$$„\ x=\frac{\pi}{8}\ „\ y=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}+0\ldots.$$

$$„\ x=\frac{3\pi}{8}\ „\ y=\frac{3\pi}{16}+\frac{3\pi}{16}-\frac{\pi}{8}+0\ldots \quad \text{u. s. w.}$$

Für andere x erscheint der Werth der Reihe unter unbestimmter Form, z. B. für $x=\frac{\pi}{3}$

$$y=\frac{\pi}{6}\left\{1+1-1+1-1\pm\ldots.\right\}$$

Je nachdem man diese Summe beim $2k^{\text{ten}}$ oder $(2k+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht, erhält man $\frac{\pi}{3}$ oder $\frac{\pi}{6}$, d. h. das Resultat schwankt um den geforderten Werth $\frac{\pi}{4}$ herum; u. s. f.

Auch $F(x)=\sin x$, nach $f(x)=\frac{x}{2}$ entwickelt, gibt ein ganz ähnliches Resultat.

In den Beispielen des vorigen Paragraphen, in welchen die Reihe als zulässig erwiesen wurde, war $f(x)$ stets so gewählt, dass ihre graphische Darstellung eine zur Ordinate bei $x=\frac{\pi}{2}$ symmetrische Figur bildete, kurz es war stets $f(x)=f(\pi-x)$. Ich muss an dieser Stelle bemerken, dass diese Eigenschaft nicht massgebend ist für die Zulässigkeit, wie man aus den Beispielen leicht vermuthen könnte.*) Im Allgemeinen existirt eine solche Beschränkung jedenfalls nicht, da auch leicht Beispiele für das Gegentheil anzuführen sind. Setzt man z. B. $F(x) = \frac{\pi}{4}$ und

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \text{ für } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} \text{ für } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, \text{ so folgen die Coefficienten}$$

$$A_1 = 1, \ A_2 = -\frac{1}{3}, \ A_4 = \frac{1}{9}, \ A_8 = -\frac{1}{27} \text{ etc.}$$

Die übrigen werden Null und es ist sofort ersichtlich, dass die Reihe auch hier Giltigkeit hat.

Es scheint jedoch die Entwickelung nicht zulässig zu sein in solchen Fällen, in denen die darstellende Function zwischen $x = 0$ und π auf einer oder mehreren endlichen Strecken den constanten Werth Null hat, während zugleich die darzustellende innerhalb derselben Gränzen von Null verschieden ist; wenigstens zeigte sich dies in einer grösseren Anzahl von untersuchten Beispielen, deren Mittheilung zu weitläufig sein würde.

Die Mehrzahl der Beispiele, welche ich im vorhergehenden Paragraphen zur Erläuterung anführte, hat keine specielle Bedeutung für die physikalischen Zwecke der Untersuchung. Ich habe dieselben dennoch wegen der eigenthümlichen Zahlenreihen mitgetheilt, welche sehr häufig bei der Coefficientenberechnung zum Vorschein kommen. Vielleicht können diese periodischen Reihen unter Umständen in der Zahlenlehre brauchbare Dienste leisten.

Endlich sei noch bemerkt, dass die in Obigem durchweg gebrauchte Bezeichnungsweise für die darstellenden periodischen Functionen vielleicht etwas zu weitschweifig erscheinen mag; man kann dieselbe ohne Schwierigkeit durch eine kürzere ersetzen. Ich bin jedoch in den folgenden Abschnitten bei der ursprünglichen Form stehen geblieben, da dieselbe zu numerischen Berechnungen ganz geeignet ist.

*) In meiner bereits oben citirten „vorläufigen Bemerkung" vermuthete ich, dass eine solche Beschränkung bestehe, was hiermit seine Berichtigung findet.

§ 6.

Wir wollen nun unsere allgemeinen Betrachtungen fortsetzen und zunächst auf Grundlage der Eigenschaften des Ausdruckes

$$(12)\quad y = \frac{\beta_0}{2} + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \ldots + \beta_n \cos nx + \ldots.$$

eine zweite erweiterte Reihenentwickelung ableiten. Die obige Function ist periodisch mit dem Intervall 2π, weil $\cos n(x + 2\pi) = \cos nx$ ist; es ist aber auch $\cos n(-x) = \cos nx$, also sind die Werthe der Function dieselben für entgegengesetzte x. Hieraus folgt die graphische Darstellung Fig. 8. Die Zweige zwischen $x = 2\pi$ und $x = 3\pi$, dann -2π und $-\pi$, kurz zwischen $x = 2k\pi$ und $x = (2k+1)\pi$, wo k alle ganzen Zahlen bedeutet, sind Wiederholungen des Zweiges von $x = 0$ bis $x = \pi$; alle übrigen Zweige erhält man, indem man das System der vorigen um die Ordinatenachse umgekehrt denkt.

Fallen die Werthe der Reihe (12) zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ zusammen mit den Werthen einer bestimmten gegebenen Function $f(x)$, in welchem Falle

$$\beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$$

zu setzen ist, so kann man ähnlich, wie es im § 1 geschah, eine periodische Functionsbezeichnung einführen, indem man schreibt:

$$(13)\ \ldots\quad f[\pm(x - \varrho\, 2\pi)] = \frac{\beta_0}{2} + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \ldots\ldots;$$

hierbei hat ϱ die Bedeutung, wie in den früheren Paragraphen, desgleichen gilt für die Wahl des Vorzeichens dieselbe Regel. Auch bezüglich der Unstetigkeitsstellen gelten die im § 1 gemachten Bemerkungen.

Man kann nun wieder den Versuch machen, durch ein der Betrachtung des § 2 ganz analoges Verfahren die eben definirte periodische Function zur Entwickelung anderer Functionen in Reihen zu benutzen. Sei also gegeben

$$(14)\ldots\quad F(x) = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots,$$

so setzen wir

$$(15) \quad . \quad F(x) = \frac{B_0}{2} + B_1 y_1 + B_2 y_2 + \ldots + B_n y_n + \ldots$$

Die Glieder dieser Reihe sind definirt durch die Gleichung

$$y_n = \frac{\beta_0}{2} + \beta_1 \cos n x + \beta_2 \cos 2 n x + \ldots,$$

wo n die Reihe der ganzen positiven Zahlen durchläuft. Eine der früheren ganz entsprechende Additionsweise ergibt

$$\begin{aligned}
B_1 y_1 &= B_1 \left[\frac{\beta_0}{2} + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \beta_3 \cos 3x + \ldots \right] \\
B_2 y_2 &= B_2 \left[\frac{\beta_0}{2} \qquad\qquad + \beta_1 \cos 2x + \ldots \qquad\qquad \right] \\
B_3 y_3 &= B_3 \left[\frac{\beta_0}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad + \beta_1 \cos 3x + \ldots \right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Fügt man zu dieser Summe noch das unbekannte $\frac{B_0}{2}$ hinzu und setzt die Coefficienten der unter einander geschriebenen cosinus mit denselben Bogenwerthen gleich den Coefficienten der Reihe (14), so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$(16) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned}
b_0 &= B_0 + \beta_0 [B_1 + B_2 + B_3 + \ldots] \\
b_1 &= B_1 \beta_1 \\
b_2 &= B_1 \beta_2 + B_2 \beta_1 \\
b_3 &= B_1 \beta_3 + B_3 \beta_1 \\
b_4 &= B_1 \beta_4 + B_2 \beta_2 + B_4 \beta_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned} \right.$$

aus denen, wie früher, die Coefficienten B zu bestimmen sind. Bezüglich der Zulässigkeit der Reihe (15) gelten offenbar mutatis mutandis die Bemerkungen des § 3, weshalb dieselben hier nicht wiederholt zu werden brauchen.

Man erkennt hier sofort, dass die Summe $(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots)$ convergent werden muss, wenn B_0 einen endlichen Werth haben soll; indessen kann man hierin keine b e s o n d e r e Beschränkung erblicken, denn es gilt ja auch für die Reihe (12) nach Fourier eine analoge Bedingung; dieselbe gilt nämlich auch für $x = 0$, woraus folgt, dass die Summe $(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots)$ einen endlichen Werth haben muss. — Uebrigens könnte man zur Vereinfachung der obigen Formeln $y_n - \frac{\beta_n}{2} = z_n$ setzen und nun nach z_n entwickeln.

Unsere Betrachtung führt also zu einer Reihe, welche sich zur Darstellung von Functionen gemäss Gleichung (9) gerade so verhält, wie die Entwickelung nach sinus ganzer Vielfacher (Fourier) zu jener nach den cosinus. Durch Einführung von $f(x)$ an Stelle unserer y erhalten wir die Form

$$(17)\begin{cases} F(x) = \frac{B_0}{2} + B_1 f[\pm(x-\varepsilon_1 2\pi)] + B_2 f[\pm(2x-\varepsilon_2 2\pi)] + \\ \quad + \ldots + B_n f[\pm(nx-\varepsilon_n 2\pi)] + \ldots\ldots, \end{cases}$$

wobei die Bedeutung des ε_n aus dem Früheren zu entnehmen ist.

In der graphischen Darstellung hat diese Reihe die Deutung, dass die Ordinaten einer darzustellenden Curve hervorgehen aus der Superposition der Ordinaten von periodischen Componenten, welche die an Fig. 8 erläuterten Eigenschaften haben.

Da, wie schon erwähnt, die Gleichung (12) auch für die Gränzen $x=0$ und $x=\pi$ giltig bleibt, da also, wie aus der Fig. 8 zu ersehen, die einzelnen Zweige der periodischen Componenten sich stetig an einander schliessen, so ist keine besondere Rücksicht auf diese Uebergangsstellen zu nehmen; zwar wird im allgemeinen Gliede

$$y_n = f[\pm(nx-\varepsilon_n 2\pi)]$$

für $x=(2k+1)\frac{\pi}{n}$ der Werth des ε_n zweideutig; denn es wird hier $\frac{nx}{2\pi} = k+\frac{1}{2}$, also ε_n sowohl $=k$, als auch $=k+1$; wir haben also, je nachdem wir wählen

$$\varepsilon_n = k,\ k+\frac{1}{2} > \varepsilon_n, \text{ das obere Zeichen, oder}$$

$$\varepsilon_n = k+1, \text{ also } k+\frac{1}{2} < \varepsilon_n, \text{ das untere Zeichen zu}$$

setzen. Dann erhalten wir für y_n die beiden Werthe

$$f\left[n(2k+1)\frac{\pi}{n} - k\,.\,2\pi\right] = f(\pi) \text{ oder}$$

$$f\left[-n(2k+1)\frac{\pi}{n}+(k+1)2\pi\right]=f(\pi),$$

also in beiden Fällen denselben Functionswerth, wie auch unmittelbar aus der Figur hervorgeht. Bei zweideutigem ϱ ist es also gleichgiltig, welcher Werth gewählt wird und die Entwickelung bleibt daher giltig bei allen Uebergangsstellen der periodischen Componenten.

Endlich ist zu bemerken, dass die Reihe (17) selbst wieder die periodischen Eigenschaften der Reihe (12) besitzt; sie liefert nämlich gleiche Werthe für entgegengesetzte x und ist periodisch mit dem Intervall 2π. Schreibt man in (17) $F[\pm(x-\varrho_1 2\pi)]$ anstatt $F(x)$, so gilt die Gleichung von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$. Einige Beispiele werden genügen, um die Anwendung zu zeigen.

Beispiel IX. $F(x)=\cos x$, $f(x)=x$ oder nach (13) entwickelt

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right].$$

Die Anwendungen der Gleichungen (16) ergeben das Resultat, dass die Coefficienten B_1, B_2, $B_3\ldots$ ihrem Absolutwerthe nach mit den A_1, A_2, $A_3\ldots$ des Beispieles II in § 4 identisch sind. Die Zeichenfolge erhält man, indem man in letzterem Beispiele das Vorzeichen aller derjenigen A ändert, deren Indices die Form $4k+1$ haben. So ist z. B.

$$B_2=B_4=B_6 \text{ etc. }=0$$
$$B_9=B_{25}=B_{27}=B_{45} \text{ etc. }=0$$
$$B_1=-\frac{\pi}{4};\ B_5=+\frac{1}{5^2}\frac{\pi}{4};\ B_{13}=+\frac{1}{13^2}\frac{\pi}{4};\text{ etc.}$$
$$B_3=\frac{1}{3^2}\frac{\pi}{4};\ B_7=\frac{1}{7^2}\frac{\pi}{4};\ B_{15}=-\frac{1}{15^2}\frac{\pi}{4};\text{ etc.}$$

Dieses Resultat lässt sich durch Betrachtung der zu Beispiel II gehörigen graphischen Darstellung (Fig. 3) sofort verstehen. Denkt man sich dieselbe nämlich über $x=\pi$ hinaus erweitert, so sieht man unmittelbar, dass der Verticalstreifen der Zeichnung, welcher zwischen die Ordinaten für $x=\frac{\pi}{2}$ u. $x=\frac{3\pi}{2}$ fällt, nichts weiter ist, als eine graphische Darstellung von $\cos x$ zwischen 0 und π, erhalten aus der Superposition von periodischen

Componenten, wie sie in dem vorliegenden Falle gefordert werden. Nur sind diese periodischen Componenten in der Zeichnung, wenn sie für diesen Fall passen sollen, je um eine gewisse Grösse in der Richtung der Yachse verschoben zu denken. Man hat hierbei jede der Componenten so weit nach oben oder unten zu verschieben, dass die Spitzen der Zickzacklinien, welche in Fig. 3 in der Ordinate bei $x = \frac{\pi}{2}$ liegen, auf die Xachse fallen. Dann stellen dieselben die periodischen Glieder unseres Falles graphisch dar. Man findet nun ferner

$B_0 = -\pi(B_1 + B_3 + B_5 + \ldots)$ oder nach obiger Bemerkung $= \pi(A_1 - A_3 + A_5 \mp \ldots)$, wo die A sich auf das Beispiel II beziehen. Die eingeklammerte Summe wurde aber dort $= \frac{2}{\pi}$ gefunden, daher ist $B_0 = 2$, also $\frac{B_0}{2} = 1$. Es sei nebenbei bemerkt, dass dieser Werth von $\frac{B_0}{2}$ hier nichts weiter ist, als die Summe der Verschiebungen, welche wir in Fig. 3 mit den periodischen Componenten vornehmen mussten, um sie unserem Beispiel anzupassen, wie sich ohne weitere Erörterung einsehen lässt.

Ueberhaupt ist zu ersehen, dass alle früher behandelten Fälle, in welchen nur periodische Componenten mit ungeradem Index vorkommen, sich in ähnlicher Weise sofort in die Form der Reihe (17) bringen lassen und als Beispiele für diese letztere gelten können.

Beispiel X. $F(x) = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = x$; Man erhält $B_1 = B_2 = = B_3 = \ldots = B_n = 0$. Es bleibt nur das eine Glied

$$\frac{B_0}{2} = \frac{b_0}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Die beiden behandelten Beispiele zeigen, dass bei Functionen, für welche die Reihe (10) unbrauchbar wird, die Anwendbarkeit von (17) nicht ausgeschlossen ist. — Dasselbe gilt umgekehrt; denn entwickelt man z. B.

$F(x) = x$ nach $f(x) = \frac{\pi}{4}$ gemäss Glchg. (17), so haben die B den Werth ∞, und für bestimmte x ergibt die Reihe die unbestimmte Form: $+\infty-\infty$. Die Entwickelung (17) ist also nicht zulässig, während (10) in Beispiel 1 zu einem convergenten Resultate führte. Dies ist übrigens a priori einleuchtend, denn $f(x)=\frac{\pi}{4}$ stellt bei ihrer periodischen Wiederholung nach dem Schema der Fig. 8 auch ausserhalb der Gränzen 0 und π eine unendliche Gerade parallel der Xachse dar und ebenso alle anderen Glieder der Reihe, durch deren Superposition offenbar keine andere Curve erhalten werden kann.

§ 7.

Im Allgemeinen und besonders bei physikalischen Anwendungen wird die Entwickelung von Functionen verlangt, die in einem weiteren Sinne periodisch sind, als es bei den Reihen (10) und (17) der Fall ist. Sie sollen nur der einen Bedingung genügen, dass die Functionswerthe in gegebenen, gleichen Intervallen wiederkehren.

Zu dem Ende kann man eine Combination der beiden Entwickelungen (10) und (17) anwenden, welche ganz ähnlich derjenigen ist, durch welche man von den Reihen (2) und (13) zu der allgemeinen Fourier'schen Reihe gelangt, die gleichzeitig nach sinus und cosinus ganzer Vielfacher fortschreitet.

Zunächst kann man das Intervall 0 bis π, welches in den Glchgn. (10) und (17) für die darzustellende Function massgebend war, durch eine einfache Transformation in bekannter Weise erweitern. Es sei z. B. gefunden, dass die Reihe (10) des § 2 giltig sei zwischen 0 und π für zwei gewisse Functionen $F(x)$ und $f(x)$. Will man nun statt dieser Gränzen die Gränzen 0 und l einführen, so setze man in der Entwickelung $x=x'.\frac{\pi}{l}$; man erhält, indem man die Accente gleich weglässt

$$a_m=\frac{2}{l}\int_0^l F\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \text{ und}$$

$$\alpha_m=\frac{2}{l}\int_0^l f\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Es sind die A durch Substitution in (8) zu berechnen. Das allgemeine Glied der Reihe (10) heisst nun

$$\pm f\left[\pm\left(\frac{m\pi x}{l} - \varepsilon_m 2\pi\right)\right] = \pm f\left[\pm\frac{\pi}{l}\left(mx - \varepsilon_m 2l\right)\right],$$

wo nun ε_m diejenige ganze Zahl bedeutet, welche dem Werthe $\frac{mx}{2l}$ am nächsten liegt. Die Reihe heisst dann

$$(18) \;.\;.\; \left\{\begin{aligned} F\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \pm A_1 f\left[\pm\frac{\pi}{l}(x - \varepsilon_1 2l)\right] \\ \pm A_2 f\left[\pm\frac{\pi}{l}(2x - \varepsilon_2 2l)\right] \pm \ldots \end{aligned}\right.$$

und sie gilt natürlich in allen Fällen, in welchen die Giltigkeit von (10) bewiesen ist. Man kann für den practischen Gebrauch noch einen Schritt weiter gehen und den Factor $\frac{\pi}{l}$ gleich mit in die allgemeinen Functionszeichen F und f einrechnen, wodurch man erhält:

$$a_m = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \text{ u. } \alpha_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx,$$

$$(19) \quad F(x) = \pm A_1 f[\pm(x - \varepsilon_1 2l)] \pm A_2 f[\pm(2x - \varepsilon_2 2l)] \pm \ldots$$

Indessen muss ich zur Vermeidung von Missverständnissen ausdrücklich hervorheben, dass, wenn für irgend 2 Functionen F und f die Reihe (10) giltig ist, nur die Transformation (18) als unmittelbar bewiesen betrachtet werden darf. Bei der Formel (19) haben sich die a und α, somit auch die A geändert, daher muss die Zulässigkeit von Fall zu Fall wieder näher untersucht werden, so lange keine allgemeineren Anhaltspunkte für die Beurtheilung geboten sind. Jedoch gibt es auch Fälle, in denen (19) durch (10) bewiesen ist und der Leser wird in dem Beispiele I des § 4 einen Beleg dafür finden.

Für die Reihe (17) ist nun ohne Weiteres eine ganz analoge Transformation auszuführen.

Zum Schluss wollen wir nun noch erwähnen, wie man zu verfahren hat, um eine Function im weiteren Sinne periodisch darzustellen. Der Kürze halber setzen wir das Intervall wieder

$= 2\pi$. Sei die gegebene Function $Y = F(x)$, so kann man dieselbe in zwei Bestandtheile Y_1 und Y_2 derart zerlegen, dass

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \frac{F(x) + F(-x)}{2} \\ Y_2 &= \frac{F(x) - F(-x)}{2} \end{aligned}\right\} \quad Y_1 + Y_2 = Y \text{ ist.}$$

Hierbei hat Y_1 die Eigenschaft, für $+x$ und $-x$ dieselben Werthe zu liefern, während Y_2 für entgegengesetzte x auch entgegengesetzte Werthe annimmt. Y_1 und Y_2 haben diese characteristischen Eigenschaften mit den im § 2, resp. 6, behandelten Reihen gemein. Daher kann Y_1 auf der ganzen Strecke von $-\pi$ bis $+\pi$ nach den cos ganzer Vielfacher von x, oder auch nach einer hierzu etwa geeigneten anderen Function $\varphi(x)$ gemäss der Reihe (17) entwickelt werden. Desgleichen ist Y_2 durch die sinus oder irgend eine Function $\psi(x)$ nach Schema (10) ebenfalls zwischen $-\pi$ und $+\pi$ darzustellen. Man hat daher

$$Y_1 = \frac{b_0}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots \text{ und}$$

$$Y_2 = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots, \text{ wobei}$$

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{F(x) + F(-x)}{2} \cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos mx\,dx \quad \text{und}$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{F(x) - F(-x)}{2} \sin mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \sin mx\,dx \quad \text{ist.}$$

Man habe nun 2 Functionen gewählt

$$\varphi(x) = \frac{\beta_0}{2} + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \ldots$$

$$\psi(x) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin 2x + \ldots, \text{ worin}$$

$$\beta_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \cos mx\,dx \quad \text{u.} \quad \alpha_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(x) \sin mx\,dx,$$

und man habe sich überzeugt, dass die nach Substitution der

b und β, a und α aus den Gleichungen (16) und (8) hervorgehenden Coefficienten B und A absolut convergiren, oder dass überhaupt Y_1 und Y_2 durch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ periodisch darstellbar sind, so ist bewiesen, dass

$$(20)\left\{\begin{array}{l} F(x)=\frac{B_0}{2}+B_1\,\varphi\,[\pm(x-\varepsilon_1 2\pi)]+B_2\,\varphi\,[\pm(2x-\varepsilon_2 2\pi)]+\ldots \\ \pm A_1\,\psi\,[\pm(x-\varepsilon_1 2\pi)]\pm A_2\,\psi\,[\pm(2x-\varepsilon_2 2\pi)]\pm\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Diese Gleichung gilt für $-\pi<x<+\pi$, nicht aber im Allgemeinen für $x=-\pi$ u. $+\pi$ selbst. Hier liefert die Reihe, wie die Fourier'sche, den Werth $\frac{F(+\pi)+F(-\pi)}{2}$. Die Werthe der Reihe, welche zwischen $x=-\pi$ u. $x=+\pi$ liegen, wiederholen sich ausserhalb dieser Gränzen nach der positiven und negativen Seite in Intervallen von je 2π, wodurch also der geforderten Periodicität entsprochen ist.

Unter Benutzung der §§ 4 und 6 lassen sich nun leicht Beispiele für diese in weiterem Sinne periodische Reihe aufstellen. Endlich sei bemerkt, dass Reihe (20) einer Erweiterung des Periodicitäts-Intervalls ebenso fähig ist, wie es bei der Reihe (10) demonstrirt wurde und es sind bei weiterer Transformation ganz dieselben Rücksichten im Auge zu behalten, so lange kein directes Erkennungsmittel für die Zulässigkeit geboten ist.

§ 8.

In den voraufgehenden Abschnitten habe ich die formelle Analogie der Reihen (10), (17), (20) mit den Fourier'schen nur deshalb bis zum Ende verfolgt, um damit anzudeuten, wie diese Reihen zu benutzen wären. Man kann dieselben unmittelbar auf die Zerlegung der Schwingungen anwenden. Die Reihen bedeuten nämlich nach Einführung der Zeitgrössen als Variable die Zerlegung periodischer Bewegungen in periodische Componenten nach einem allgemeinen Schema, und zwar sind diese Componenten periodisch im Sinne der Functionen der §§ 2 resp. 6. Zur Vermeidung von Weitschweifigkeit will ich mich hierfür der Ausdrucksweise „Periodicität I resp. II“ bedienen. Die gedachte Zerlegung soll zunächst an einem Beispiel erläutert werden.

Es sei die einfache Pendelschwingung $y=c\sin 2\pi\frac{t}{T}$ zu zerlegen in periodische Bewegungen, bei denen der bewegte Punkt mit constanter (aber abwechselnd positiver und negativer) Bahngeschwindigkeit um die Ruhelage oscillirt. Die gleichförmige Bewegung wollen wir bezeichnen durch $y = 2\pi \frac{t}{T}$, welcher Ausdruck mit einer willkührlichen Constanten multiplicirt jeder Geschwindigkeit entspricht. Soll diese Bewegung eine periodisch hin- und rückgängige sein, so können wir dies mit den bisher benützten Hilfsmitteln in zweierlei Weise ausdrücken.

Entweder denken wir uns den beweglichen Punkt zur Zeit 0 durch die Ruhelage gehen, zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ die grösste Elongation erreichen, welche daher $= \frac{\pi}{2}$ ist; dann kehre der Punkt um, überschreite zur Zeit $t = \frac{T}{2}$ wieder die Ruhelage, um bei $t = \frac{3T}{4}$ die grösste negative Elongation zu erreichen u. s. f. Dieser Vorgang ist nun darzustellen, indem man die Werthe der Function

$$\psi\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 2\pi \frac{t}{T} \text{ für } 0 < t < \frac{T}{4}, \\ 2\pi \frac{\left(\frac{T}{2} - t\right)}{T} = \pi - 2\pi \frac{t}{T} \text{ für } \frac{T}{4} < t < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

ausserhalb der Zeitgränzen 0 und $\frac{T}{2}$ nach der Periodicität I wiederkehren lässt. Wir besitzen aber noch ein zweites Mittel, denselben Bewegungsvorgang darzustellen. Wenn wir die gleichförmige Bewegung zur Zeit $t = 0$ mit der grössten negativen Elongation $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ beginnen lassen, so dass die Ruhelage mit positiver Geschwindigkeit zur Zeit $t = \frac{T}{4}$ durchlaufen wird u. s. w., so ist die Bewegung zwischen den Zeitgränzen 0 und $\frac{T}{2}$

$$\varphi\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 2\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{2}.$$

Wiederholt sich dies nach der Periodicität II ausserhalb der Gränzen $t = 0$ und $\frac{T}{2}$, so ist auch hiedurch die gewünschte Bewegung ausgedrückt. Eine andere Ausdrucksweise nach unseren beiden Periodicitäten ist nicht denkbar.

Unsere Aufgabe, die Pendelschwingung in Componenten obiger Art zu zerlegen, läuft also darauf hinaus, (indem wir $2\pi\frac{t}{T} = z$ setzen),

$$F(z) = c \sin z \text{ zu entwickeln nach}$$

$$\varphi(z) = z - \frac{\pi}{2} \text{ und}$$

$$\psi(z) = \begin{cases} z \text{ für } 0 < z < \frac{\pi}{2} \\ \pi - z \text{ für } \frac{\pi}{2} < z < \pi. \end{cases}$$

Dies geschieht mit Benutzung der Reihe (20). Es ist

$$\varphi(z) = -\frac{4}{\pi}\left\{\cos z + \frac{\cos 3z}{3^2} + \frac{\cos 5z}{5^2} + \ldots\right\}$$

$$\psi(z) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin z - \frac{\sin 3z}{3^2} + \frac{\sin 5z}{5^2} \pm \ldots\ldots\right\},$$

wodurch die α und β für die Gleichungen (8) und (16) gegeben sind. Ferner ist für diesen Fall

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} c \sin z \sin m z \, dz$$

und dies ist c für $m = 1$, jedoch Null für jedes andere m; ferner ist

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} c \sin z \cos m z \, dz = 0,$$

daher werden in Gl. (20) alle B gemäss (16) zu Null; es bleibt nur der Theil der Reihe (20), welcher die ψ enthält, und zwar ist das allgemeine Glied dieser Reihe

$$\pm \psi\left[\pm \frac{2\pi}{T}(mt - \varepsilon_m T)\right],$$

wo ε_m diejenige ganze Zahl bedeutet, welche dem Werthe $\frac{mt}{T}$ am nächsten liegt und die oberen, resp. unteren Zeichen gelten, je nachdem $\frac{mt}{T} \gtrless \varepsilon_m$ ist. Die Werthe der Coefficienten A in (20) sind dabei, wie man aus Obigem sofort erkennt, das c-fache der Coefficienten des Beispiels II im § 4; nennt man diese Werthe allgemein C, so hat man die Zerlegung:

$$c \sin 2\pi \frac{t}{T} = \pm C_1 \phi\left[\pm \frac{2\pi}{T}(t - \varepsilon_1 T)\right] \pm$$
$$\pm C_3 \phi\left[\pm \frac{2\pi}{T}(3t - \varepsilon_3 T)\right] \pm \ldots\ldots$$

welche Reihe nach § 3 zulässig ist.

Nach dem Vorgange dieses Beispiels sind auch andere Zerlegungen zu behandeln. Man sieht ohne Weiters, dass, wenn eine gegebene periodische Bewegung gedacht wird als zusammengesetzt aus Componenten einer bestimmten Form, nur eine einzige Art der Zerlegung nach dieser Bewegungsform möglich ist.

Man erkennt ferner, dass, obwohl sich vorläufig nicht sagen lässt, in welchem Zusammenhange die Zulässigkeit der Reihen mit der Natur der darstellenden oder darzustellenden Functionen steht, dennoch unzählige Fälle existiren, in denen sowohl nach Pendelschwingungen, als nach anderen periodischen Componenten zerlegt werden kann, da ja unzählige Reihen mit absolut convergenten Coefficienten denkbar sind. Es wäre gewiss interessant zu untersuchen, ob sich ausser den Pendelschwingungen noch andere periodische Bewegungen finden, nach welchen jede andere zerlegt werden kann.

Auch auf andere Aufgaben kann die Vorstellung von der erweiterten Zerlegbarkeit übertragen werden. Es sei hier nur noch das bekannte Beispiel der Saitenschwingung erwähnt. Der Zustand eines Theilchens eines gespannten Fadens ist bekanntlich allgemein gegeben durch die Gleichung

$$y = \Phi(ct + x) + \Psi(ct - x),$$

worin Φ und Ψ zwei ganz willkürliche Functionen bezeichnen. Der Ausdruck hat die Deutung, dass zwei im Allgemeinen von einander unabhängige Bewegungsvorgänge sich mit entgegengesetzten, constanten Geschwindigkeiten über den Faden fortpflanzen. Soll der Anfangspunkt $x=0$ des Fadens ein Fixpunkt sein, so folgt daraus bekanntlich

$$\Phi=-\Psi,$$

und ist noch ein zweiter Punkt im Abstande $x=l$ fixirt, so folgt, dass

$$\Phi(u)=\Phi(u+2l),$$

d. h., dass die Function Φ periodisch ist mit dem Intervall $2l$. Man hat also für den in zwei Punkten befestigten Faden

$$y=\Phi(ct+x)-\Phi(ct-x),$$

wobei das periodische Φ gegeben ist, wenn man den Anfangszustand der Saite kennt. Die Function ist entweder darstellbar in den sin und cos ganzer Vielfacher der Variablen oder aber in zwei anderen hierzu geeigneten Functionen φ und ψ, so zwar, dass nach Gl. (20)

$$\Phi(u)=\sum_{m=1}^{m=\infty} B_m\,\varphi[\pm(u-\varepsilon_m 2l)]+\sum_{m=1}^{m=\infty}\pm A_m\,\psi[\pm(u-\varepsilon_m 2l)],$$

wobei man, um den Ausdruck für y herzustellen, $ct+x$, resp. $ct-x$ für u zu substituiren hat. Die Bedeutung des ε, sowie die Zeichenwahl ist nach dem vorhergehenden selbstverständlich.

Um nun bei der obigen physikalischen Deutung der Reihen einem möglichen Missverständniss zu begegnen, muss ich ausdrücklich hervorheben, dass durch die Vorstellung einer erweiterten Zerlegbarkeit der schwingenden Bewegungen die Grundanschauungen, welche den meisten physikalischen, besonders den akustischen Betrachtungen zu Grunde liegen, selbstverständlich keine Aenderung erfahren. In allen Fällen, in welchen die Kräfte mit den Verschiebungen der Theilchen proportional sind (und mit solchen Fällen hat es ja die Schwingungslehre meistens zu thun) hat eine verallgemeinerte Zerlegung nur formelle Bedeutung, da hier die Pendelschwingung thatsächlich die physikalische Grundlage der Erscheinungen bildet. Andere wenn auch analytisch zulässige Zerlegungen wird man in diesen Fällen ebensowenig einführen wollen, als man in der Akustik die pendelartigen Schwingungen zusammengesetzt denken wird aus je zwei entgegengesetzten Kreisbewegungen, obgleich diese Betrachtung geometrisch erlaubt und in der Optik nutzbringend ist (Circularpolarisation). Man wird überhaupt unter den denkbaren Zerlegungen nur solche anwenden, zu welchen die Thatsachen auffordern, wie denn ja auch z. B. die progressive Bewegung durch das Kräfteparallelogramm nur nach denjenigen Richtungen in Componenten zerlegt wird, welche bei der bezüglichen Erscheinung oder Betrachtung einen bestimmten Sinn haben. Daher hat eine erweiterte Anschauung von der Zerlegbarkeit der Schwingungen vorläufig mehr Beziehung zur Phoronomie, als zur speciellen Physik.

Indem ich also nicht glaube, in diesem Punkte missverstanden zu werden, bemerke ich, dass nichts desto weniger eine mehrfache Zerlegung der Schwingungen auch reelle Bedeutung haben kann. Zunächst dürfte es nicht schwierig sein, thatsächliche Belege hiefür zu liefern.

Nach dem am Eingange dieses § gegebenen Beispiel kann ein zum Ohr gelangender einfacher Ton entstanden sein aus dem Zusammentreffen periodischer Luftbewegungen mannigfacher Art. Solche Fälle dürften sich practisch ohne Zweifel verwirklichen lassen und vielleicht am bequemsten in folgender Weise. Der Klang der Lochsirene ist bei der gebräuchlichen Form der Oeffnungen kein einfacher Ton; die Art der periodischen Luftbewegung kann bei diesem Apparate mannigfach modificirt werden durch die Form der ruhenden und beweglichen Oeffnungen, ihren Abstand u. s. f. Der oben behandelte Fall z. B., in welchem die Bewegung der Lufttheilchen in dem austretenden Luftstrome in einiger Entfernung von den Oeffnungen eine gleichförmige, hin- und hergehende sein müsste, liesse sich wahrscheinlich durch sehr einfache Formen der Oeffnungen mit grosser Annäherung erzielen.*) Denkt man sich nun eine solche Sirene mit concentrischen Lochreihen, welche in ihren Dimensionen und Lochzahlen den periodischen Gliedern der obigen oder einer anderen noch convergenteren Entwickelung für die Function $y = c \sin 2\pi \frac{t}{T}$ entsprechen, so hätte man den eigenthümlichen Fall einer Sirene, deren einzelne Lochreihen für sich

*) Prof. Boltzmann beabsichtigte schon vor längerer Zeit die Construction einer Sirene, bei welcher der Klang durch die Form der ruhenden und bewegten Oeffnungen modificirt werden kann. Dieser Gedanke liesse sich also bei obigem Versuche verwerthen.

angeblasen einen bestimmten Klang mit deutlich wahrnehmbaren Obertönen geben, während alle Lochreihen zusammen einen starken einfachen Ton geben müssten, dessen Reinheit um so grösser wäre, je mehr Glieder der Reihe man berücksichtigt. Schon bei obigem Beispiel würden verhältnissmässig wenige Lochreihen genügen. Es dürfte jedoch bei einem solchen Versuche, wenn er gelingen soll, die Resonanz des Windkastens zu beachten sein. Für den Erfolg ist es natürlich ganz gleichgiltig, ob die Partialbewegungen von ein und demselben Luftstrome erregt werden, wie bei dem angedeuteten Versuch, oder ob dieselben aus verschiedenen Quellen und verschiedenen Entfernungen herstammen, wenn sie nur beim Ohr, oder beim Resonator anlangend die von der Reihenentwickelung geforderten Intensitäten und Phasen haben.

Bei diesem oder irgend einem anderen der Theorie noch besser entsprechenden Verfahren würden weder das Ohr noch die Resonatoren die Luftbewegung in die Componenten auflösen, aus denen dieselbe hervorging, da von beiden die Pendelschwingung nicht weiter zerlegt werden kann. Es könnte übrigens dieses Factum, welches eintreten wird, so lange das Princip der Superposition gilt, durchaus nichts Befremdendes haben. Ohr und Resonator können ja auch nicht unterscheiden, ob ein einfacher Ton herstammt von einer irgendwo wirklich einfach erregten Luftschwingung oder durch das Zusammentreffen beliebig vieler solcher einfachen Schwingungen von gleicher Wellenlänge und beliebiger Phase, welche sich bekanntlich stets zu einer einfachen Schwingung zusammensetzen. Ebensowenig kann das Ohr errathen, ob ein einfacher Ton entstanden ist durch das Zusammentreffen von periodischen Luftbewegungen, deren Partialtöne zufällig solche Phasen und Amplituden haben, dass sie sich alle bis auf einen einzigen vernichten.

Wir denken uns in einem unbegränzten Medium, wie es die Luft ist, kleine periodische Bewegungen wellenartig fortgepflanzt. Wenn wir eine solche fortgepflanzte periodische Bewegung in der mathematischen Theorie als eine Summe pendelartiger Schwingungen betrachten, so ist dies zunächst nur eine willkürliche Fiction zur Bequemlichkeit der Theorie eingeführt ohne eine reelle Bedeutung.*) Eine solche gewinnt die Zerlegung erst durch Beziehung auf die

*) Helmholtz, die Lehre von den Tonempfindungen, Seite 220. u. a.

Erscheinungen, welche mit der fortgepflanzten Bewegung im Zusammenhange stehen. Geschieht die Erregung durch ein System pendelartig schwingender elastischer Körper, so hat es einen Sinn, auch in der resultirenden Gesammtbewegung nach Pendelschwingungen zu zerlegen. Oder aber, wenn die lebendige Kraft der fortgepflanzten Luftbewegung (sei auch ihr Ursprung unbekannt) auf mitschwingende elastische Systeme gelangt (Ohr, Resonatoren etc.), welche eben nur Pendelschwingungen aus der Bewegung herausnehmen, so ist es durchaus vortheilhaft, sich die Pendelschwingungen, welche der Fourier'schen Zerlegung entsprechen, auch in der fortgepflanzten Luftbewegung vorzustellen, da diese Vorstellung in unmittelbarstem Zusammenhange mit den physiologischen Wirkungen steht. Das zerlegende (unbewaffnete oder bewaffnete) Ohr erkennt auch Abweichungen vom Prinzip der Superposition durch das Auftreten der Combinationstöne in der Reihe der Partialbewegungen.

Das oben kurz angedeutete Beispiel der Sirene zeigt aber, dass die thatsächlichen Verhältnisse auch zu anderen periodischen Zerlegungen auffordern können und diese haben alsdann eine reelle, wenn auch nicht physiologische Bedeutung. Man denke sich eine bestimmte Luftbewegung, wie sie z. B. beim Erklingen eines musikalischen Instrumentes vorkommt, und für diese Luftbewegung sei die Reihenentwickelung möglich nach irgend einer nicht pendelartigen Form von periodischen Partialbewegungen. Es sei nun die Aufgabe gestellt, durch einen synthetischen Versuch, entweder wie oben mit der Sirene, oder durch ein noch besseres Hilfsmittel die gewünschte Luftbewegung wirklich darzustellen. Man würde sich mathematischerseits zunächst durch directe Anwendung der Reihen die nöthigen Daten verschaffen und durch deren Befolgung beim Versuche aus einer Reihe von gleich gefärbten, aber verschieden hohen Klängen einen Gesammtklang mit wesentlich verschiedener Färbung entstehen sehen. Da hier die Partialbewegungen getrennt erregt werden, so ist man vollkommen berechtigt, sich diese und keine anderen in der entstehenden Luftbewegung vorzustellen, so lange die Superposition gilt.*) Es

*) Auch Abweichungen von der Superposition darf man sich in diesem Falle so vorstellen, als ob noch neue Partialbewegungen derselben Art zu den direct erregten hinzuträten, wenn diese Abweichungen nämlich in derselben Reihenform mathematisch darstellbar sind.

wäre gewiss sehr gezwungen, wenn man sich in diesem Falle jede Partialbewegung für sich in Pendelschwingungen zerlegen wollte, um dann alle diese in der Vorstellung zu einer Gesammtbewegung zusammenzusetzen. Mit Rücksicht auf die Erregung hätte dies keinen Sinn.

Anders ist die Sache, wenn nun die Wirkung auf's Ohr oder mitschwingende elastische Körper in's Auge gefasst werden soll. Dieselbe Gesammtbewegung ist dann nach Fourier zu zerlegen. Man hat also hier für ein und dieselbe Bewegungs-Erscheinung zwei gerechtfertigte Zerlegungsarten, je nach dem Sinne, in welchem die Erscheinung interpretirt werden soll Für die physiologische Seite der Akustik bleibt unter allen Umständen die Bedeutung der Fourier'schen Reihe unberührt.

Hierzu muss noch Folgendes bemerkt werden. Hat man irgend eine Bewegungsform der Lufttheilchen vor Augen, welche den Eindruck einer bestimmten Klangfärbung auf's Ohr macht, so kann man den Partialpendelschwingungen beliebige Phasenverschiebungen ertheilen, ohne dass hiedurch die Klangfärbung geändert würde. Eine unendlich mannigfache Reihe von Bewegungsformen kann daher demselben Klange entsprechen. Dies ist einleuchtend, da der zerlegende Apparat des Ohres eben nur nach dem Vorhandensein und der Intensität der einzelnen Pendelschwingungen fragt, und bekanntlich hat Helmholtz dieses von ihm entdeckte Gesetz durch den directen Versuch bestätigt gefunden. Diese Unabhängigkeit der Klangfarbe von den Phasen der Partialbewegungen lässt sich nun nicht etwa auf andere Zerlegungsweisen einer gegebenen Luftbewegung übertragen, weil dieses Gesetz eine Consequenz der f a c t i s c h e n Zerlegung in Pendelschwingungen ist. An bestimmten Fällen lässt sich das Gesagte leicht einsehen. Wenn wir z. B., wie im Anfang des §, die einfache Schwingung nach anderen Partialbewegungen zerlegen, so genügt die Verschiebung einer einzigen Componente, um als Resultat einen für das Ohr sehr complicirten Bewegungsvorgang zu schaffen.

Will man an der Vorstellung der Pendelschwingungen in den Luftbewegungen consequent festhalten, so kann man immerhin die Entstehung des einfachen Tones durch eine unendliche Reihe von Klängen als einen e i g e n t h ü m l i c h e n F a l l v o n I n t e r f e r e n z auffassen. Man hat aber dabei die Mühe, das Auslöschen der vielen Partialtöne von einem Reihengliede zum anderen zu verfolgen.

Es wurde oben nur von der Verschiebung der Lufttheilchen gesprochen. Das über die erweiterte Zerlegung Gesagte lässt sich nun auch auf die periodischen Geschwindigkeiten und Accelerationen bei den Schwingungen übertragen. Wenn man bestimmte Bewegungen in bestimmter Weise zerlegt, so ist es in einzelnen Fällen nicht uninteressant, die Reihen zu vergleichen, welche dabei für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Accelerationen zum Vorschein kommen. Die Reihen der Beispiele III, IX und IV in den §§ 4 und 6 stehen, wenn sie im Sinne der Mechanik gedeutet werden, in einem solchen Zusammenhange; sie wurden zu einem beabsichtigten Sirenenversuche berechnet. Ich werde hierauf an einem anderen Orte zurückkommen, da ich hier nur allgemeine Gesichtspunkte berühren wollte.

Aus der obigen Darstellung erhellt, dass die besprochenen Reihen bei denjenigen physikalischen Erscheinungen Anwendung finden können, bei welchen das Gesetz der Superposition gilt und bei denen kleine Bewegungen mit constanter, von der Bewegungsform unabhängiger Geschwindigkeit fortgepflanzt werden. Ich glaube daher, dass es nicht ganz werthlos ist, auf die Möglichkeit von Zerlegungen nach einem allgemeinen Schema, welches den Vorstellungen der Wellenlehre entspricht, und welches meines Wissens bisher bei analytischen Untersuchungen nicht angewendet wurde, aufmerksam gemacht zu haben.

Graz im Juni 1872.

Berichtigung.

Auf Seite 32, Zeile 3 v. o. ist anstatt S_8, S_{10} und ebenda, Zeile 4 v. o. anstatt 10. Sternums, 8. Sternums zu lesen.

Im Selbstverlage.

Druckerei: „Leykam-Josefsthal“ in Graz.

Fig. 1

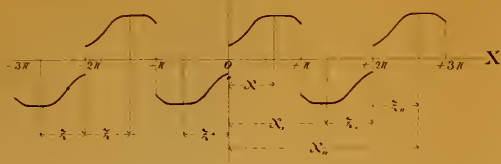


Fig. 8

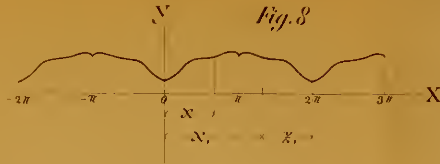


Fig. 5

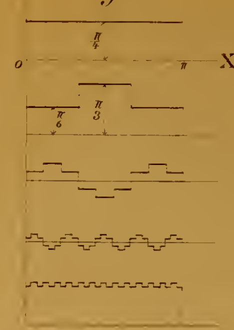


Fig. 2

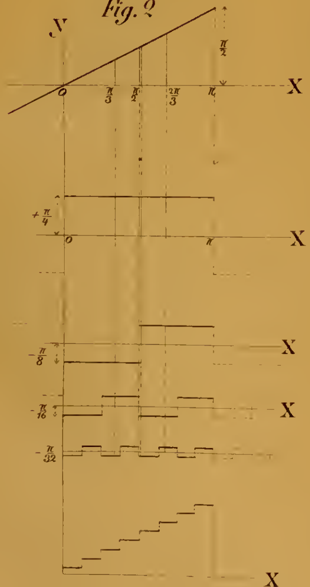


Fig. 3

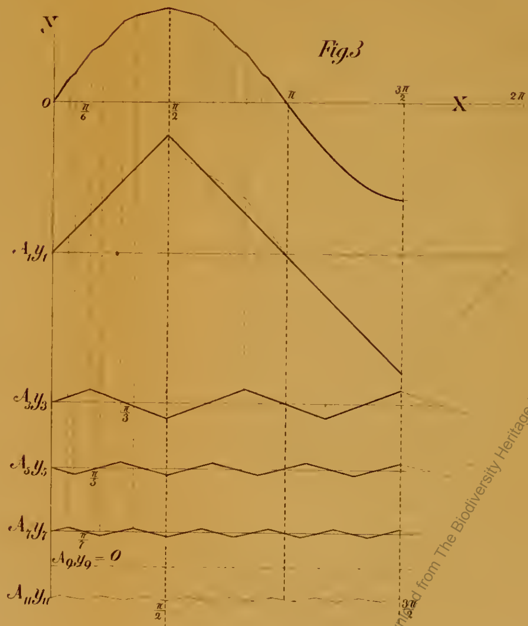


Fig. 4

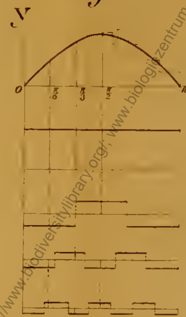


Fig. 6

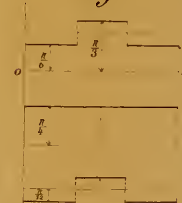


Fig. 7