Zur Theorie des sechsgliedrigen Krystallsystems

Von

Herrn Dr. **G. Werner,**

Assistent an der kgl. polytechnischen Schule in Stuttgart.

Die gesetzmässige Ordnung, nach welcher die Flächen eines und desselben Krystalls durch den Zonen-Zusammenhang mit einander in Verbindung stehen, ist für die Krystalle aller Krystallsysteme im Wesentlichen die gleiche und diess ist auch der Grund, warum wir durch eine kleine Änderung in den Symmetrieverhältnissen aus dem regulären System alle anderen ableiten können.* Lässt man an einem regulären Krystall irgend ein Paar von einander diametral gegenüberliegenden Flächen im Vergleich mit den übrigen Flächen des Körpers, dem jene beiden angehören, different werden, so wechseln in demselben Moment die Symmetrie-Gesetze des Krystalls in solcher Weise, dass er nun eine Form aus einem der 5 übrigen Krystall-Systeme darstellt. Gehörte jenes Flächenpaar dem Würfel an, so entsteht die Ordnung des viergliedrigen (quadratischen) Systems, das Granatoeder erzeugt, auf gleiche Weise behandelt, zweigliedrige (orthorhombische), jeder Vierundzwanzigflächner zwei- und eingliedrige (klinorhombische), jeder Achtundvierzigflächner eingliedrige (klinorhomboidische) Ordnung. Werden nun die Flächen des Octaeders auf gleiche Weise different, so entsteht dreigliedrige Ordnung, wie sie an den Rhomboedern und Dreikantnern (Skalenoedern) des

---

* Vgl. des Verf. Aufsatz in diesem Jahrbuch *1867*, S. 129 ff., insbesondere S. 137.

sogen. Hexagonalsystems erscheint. Auf den ersten Anblick könnte es nun scheinen, als ob unter allen Körpern der 5 übrigen Systeme allein die Dihexaeder (sechsseitigen Doppelpyramiden) und Sechskantner (symmetrisch zwölfseitigen Doppelpyramiden) nicht aus dem regulären System abgeleitet werden könnten. Allein diess ist dennoch in einem gewissen Sinne möglich und wenn diess nicht in einer ebenso einfachen und auf der Hand liegenden Weise wie bei den dreigliedrigen Körpern (Rhomboeder u. s. w.) der Fall ist, so hängt die Ursache davon mit dem gewiss auffallenden Umstande zusammen, dass die rein sechsgliedrigen Körper (d. h. nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise die reinen Vollflächner des Hexagonalsystemes *) immerhin zu den Seltenheiten gehören. Es ist übrigens von vorn herein gar nicht einzusehen, warum ein Hexaid wie das Rhomboeder, dessen gleiche Flächenpaare bei einer Menge von Mineralien die einzigen oder vorherrschenden Spaltungsrichtungen bilden, nicht ein Vollflächner, sondern ein Halbflächner sein soll, während es kein Mineral gibt, das sich nach den 6 Flächenrichtungen eines Dihexaeders gleichmässig spalten liesse. Es liegt hierin eine Andeutung, dass die oben angeführte Ableitung des dreigliedrigen Systems aus der trigonalen Stellung des regulären ebensoviel Berechtigung hat, als die des viergliedrigen aus der tetragonalen.

Betrachten wir also die dreigliedrigen Körper: Rhomboeder und Dreikantner als Vollflächner und suchen wir durch die Ableitung der 6gliedrigen Körper: Dihexaeder und Sechskantner aus dem regulären System über die Natur derselben und ihr Verhältniss zu den Vollflächnern des dreigliedrigen Systems einigen Aufschluss zu erhalten.

Wir beginnen mit den **Dihexaedern**. Das sechsgliedrige System weist von solchen zwei Reihen auf, die, nach dem gleichen Symmetriegesetz gebaut, sich nur durch ihre Stellung zu einander (und zu den Axen) unterscheiden. Bei gemeinschaftlicher Hauptaxe (Verbindungslinie der Endecken) halbiren die (Verbindungslinien der Seitenecken der einen die Winkel zwi-

* Wir gebrauchen für dieses System vor der Hand zweierlei Namen, nämlich „dreigliedriges System“ für die dreigliedrigen, „sechsgliedriges System“ für die sechsgliedrigen Körper.

schen denen der andern, d. h. beiderlei Dihexaeder erscheinen um einen Winkel von 30° um die Hauptaxe verdreht. Wir werden in einem gewissen Sinne auch an den regulären Körpern zwei solche Reihen von Dihexaedern unterscheiden können, die wir am einfachsten als Dihexaeder der ersten Ordnung und Dihexaeder der zweiten Ordnung unterscheiden.

1) **Dihexaeder der ersten Ordnung.** An einem Achtundvierzigflächner bilden im Allgemeinen die 6 Flächen, welche um eine Würfelecke herumliegen oder was dasselbe heisst, die Stelle der Octaederfläche einnehmen, im Allgemeinen eine 3 + 3kantige Ecke, und zusammengenommen mit ihren Parallelen am entgegengesetzten Ende des Krystalls einen eigentlichen Dreikantner; dieser Dreikantner wird bei vielen Achtundvierzigflächnern in seinen Endkanten gleichwinklig, d. h. er wird, rein mathematisch betrachtet, zum Dihexaeder. Bekanntlich ist diess der Fall, wenn in der allgemeinen Formel eines Achtundvierzigflächners $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : a$, worin $\mu > \nu > 1$ gedacht wird, die Beziehung gilt: $\mu = 2\nu - 1$. Fassen wir die Sache etwas allgemeiner: denkt man sich einen Achtundvierzigflächner auf eine Würfelecke, also eine trigonale Axe senkrecht gestellt, so liegt achtmal ein Kreis von 6 Flächen in gleicher Höhe. Der oberste bildet mit dem untersten im Allgemeinen einen Dreikantner, ebenso der zweite von oben mit dem zweiten von unten, der dritte von oben mit dem dritten von unten, endlich die zwei mittleren mit einander. Wir wollen diese 4 Dreikantner der Reihe nach als ersten, zweiten, dritten, vierten Dreikantner bezeichnen. * Es gilt nun für

---

* Ebenso zerfallen die übrigen Körper des regulären Systems bei der genannten trigonalen Stellung in einzelne trigonale Theilkörper, in Rhomboeder, Dreikantner, Endflächen und sechsseitige Säulen, und zwar in folgender Weise:

Der Würfel bildet ein Rhomboeder.

Das Octaeder zerfällt in ein Endflächenpaar und ein Rhomboeder.

Das Granatoeder „ „ „ Rhomboeder und eine sechsseitige Säule.

Die Pyramidenoctaeder zerfallen in ein erstes und ein zweites Rhomboeder und einen Dreikantner.

Die Leucitoide zerfallen in ein erstes Rhomboeder, einen Dreikantner und ein zweites Rhomboeder.

die allgemeine Formel eines 48-Flächners $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : a$, worin $\mu > \nu > 1$ gedacht wird, die Regel, dass an demselben zum Dihexaeder wird:

der erste Dreikantner, wenn $\mu = 2\nu - 1$,
„ zweite „ „ $\mu = 2\nu + 1$,
„ dritte „ „ $\mu = \nu + 2$,
(„ vierte „ „ $\nu = \mu + 2$).

Der vierte Dreikantner kann in Wirklichkeit nicht zum Dihexaeder werden, da hier $\nu > \mu$ würde, was der Voraussetzung widerspricht. (Jene 4 Bedingungsgleichungen lassen sich leicht beweisen mit Hilfe einer Projection auf die Würfelfläche nach v. Quenstedt's Methode, da sich für jedes Dihexaeder eine Fläche der oberen Pyramide finden lässt, deren Schnittlinie mit ihrer Nachbarfläche der unteren Pyramide den Zonenpunct $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$ haben muss.)

Man kann die oben angegebenen Bestimmungen auch anders ausdrücken und allgemein sagen: Je 6 um eine trigonale Axe symmetrisch liegende Flächen eines 48-Flächners bilden ringsum gleiche Endkantenwinkel, also mit ihren Parallelen ein mathematisch genaues Dihexaeder, wenn $\mu = 2\nu - 1$, und zwar gehören dieselben an:

dem ersten Dreikantner, wenn $\mu > \nu > 1$ und alle 3 positiv,
„ zweiten „ „ $\mu > \nu > 1$ und μ u. ν negativ,
„ dritten „ „ $\mu > 1 > \nu$ und ν negativ.

(Um die Identität dieser Bestimmungen mit den obigen einzusehen, darf man nur in der allgemeinen Gleichung $\mu = 2\nu - 1$ und in den 3 letzten Bestimmungen zunächst ξ für 1 einsetzen und dann jedesmal den kleinsten der 3 Werthe μ, ν und $\xi = 1$ setzen.)

Alle so entstehenden Dihexaeder gehören der gleichen Ord-

(Beim Leucitoeder $\frac{a}{2} : a : a$ wird letzterer zur regelmässig sechsseitigen Säule.)

Die Pyramidenwürfel zerfallen in einen ersten und einen zweiten Dreikantner.

nung, die wir die erste heissen wollen, an, d. h. eine und dieselbe 6seitige Säule stumpft an allen die Seitenkanten (nicht die Seitenecken) ab. Es gehören hieher folgende Dihexaeder:

Bestimmung.	Formel, bezogen auf die tetragonalen Axen des regulären Systems.	Namen, nach dem regul. System.
$\nu = 1$	$a : a : a$	Trigonale Endfläche des Octaeders.
$\nu > 1$ und positiv	$\frac{a}{2\nu-1} : \frac{a}{\nu} : a$	Erster Dreikantner von 48-Flächnern.
$\nu = \infty$	$\frac{a}{2\nu-1} : \frac{a}{\nu} : a \quad (\nu = \infty)$ $= \frac{a}{2+\frac{1}{\nu}} : a : \nu a \quad (\nu = \infty)$ $= \frac{a}{2} : a : \frac{a}{0}.$	Erster Dreikantner eines Pyramidenwürfels.
$\nu > 1$ und negativ	$\frac{a}{-2\nu-1} : \frac{a}{-\nu} : a$ $= \frac{a}{2\nu+1} : \frac{a}{\nu} : -a$	Zweiter Dreikantner von 48-Flächnern.
$\nu = -1$	$\frac{a}{-3} : \frac{a}{-1} : a = \frac{a}{3} : a : -a$	Dreikantner eines Leucitoids.
$\nu < 1$ und negativ	$\frac{a}{-\frac{2}{\nu}-1} : \frac{a}{-\frac{1}{\nu}} : a$ $= \frac{a}{2+\nu} : a : \frac{a}{-\nu}$	Dritter Dreikantner von 48-Flächnern.
$\nu = 0$	$\frac{a}{-1} : \frac{a}{0} : a = a : \frac{a}{0} : -a$	Sechsseitige Säule des Granatoeders.

Die beiden Grenzfälle der ganzen Reihe sind also als unendlich stumpfes Dihexaeder eine trigonale Endfläche am Octaeder und als unendlich spitzes Dihexaeder eine sechsseitige Säule des Granatoeders. Der Werth ν steigt zuerst von 1 durch eine Reihe positiver Werthe bis zum Werth ∞, der die Formel des häufigen Pyramidenwürfels $\frac{a}{2} : a : \frac{a}{0}$ gibt, fällt dann von ∞ durch eine Reihe negativer Werthe bis —1, liefert hier die Formel des bekannten Leucitoids $\frac{a}{3} : a : a$, und sinkt dann noch von —1 bis 0, zwischen hinein fallen die dreierlei Dreikantner von Achtundvierzigflächnern. Wollte man Werthe zwischen 0 und $+1$ für ν einführen, so würde man Formeln erhalten, welche schon unter den übrigen mit inbegriffen sind. Gleichzeitig mit jenem Wechsel der Werthe von ν wächst zuerst μ, jedoch in anderem Verhältniss als ν, von 1 durch eine Reihe positiver Werthe bis ∞ (Pyramidenwürfel) und fällt dann ebenso durch eine Reihe negativer Werthe bis -3 (Leucitoid) und endlich vollends bis -1 (Granatoeder).

2) **Dihexaeder der zweiten Ordnung.** Während die Dihexaeder der 1. Ordnung immer specielle Fälle von Dreikantnern dargestellt haben, so ist diess bei den Dihexaedern der 2. Ordnung nicht der Fall. Sie bilden vielmehr immer eine Combination zweier Rhomboeder, die, nach gleichem Symmetriegesetz gebaut, sich durch ihre Stellung zu einander und zu den Axen unterscheiden, indem sie bei gemeinschaftlicher trigonaler Axe um einen Winkel von 60^0 gegen einander verdreht sind. Wir können also innerhalb dieser Dihexaeder-Reihe jedesmal das eine Rhomboeder als Rhomboeder der ersten Unterordnung, das andere Rhomboeder als Rhomboeder der zweiten Unterordnung unterscheiden. Diese sind im Allgemeinen Theile von Pyramidenoctaedern und Leucitoedern, in speciellen Fällen von Granatoeder, Octaeder und Würfel. (Vgl. S. 292 Anmerk.)

a) Rhomboeder der ersten Unterordnung. Hieher rechnen wir zunächst die Rhomboeder der Pyramiden-Octaeder. Die Formel derselben, bezogen auf die tetragonalen Axen des regulären Systems, ist im Allgemeinen $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : a$; es kann aber μ zum Theil kleiner als 1 werden und dann entstehen Leucitoide; doch gehören die meisten Leucitoide in die andere Unterordnung. Die speciellen Fälle der hieher gehörigen Rhomboeder sind folgende:

Bestimmung.	Formel, bezogen auf die tetragonalen Axen des regulären Systems.	Namen, nach dem regulären System.
$\mu = 1$	$a : a : a$	Trigonale Endfläche des Octaeders.
$\mu > 1$ und positiv	$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : a$	Erstes Rhomboeder von Pyramidenoctaedern.
$\mu = \infty$	$\frac{a}{\infty} : \frac{a}{\infty} : a = a : a : \frac{a}{0}$	Rhomboeder des Granatoeders.
$\mu > 1$ und negativ	$\frac{a}{-\mu} : \frac{a}{-\mu} : a = \frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : -a$	Zweites Rhomboeder von Pyramidenoctaedern.
$\mu = -1$	$\frac{a}{-1} : \frac{a}{-1} : a = a : a : -a$	Rhomboeder des Octaeders.
$\mu < 1$ aber $> \frac{1}{2}$ und negativ	$\frac{a}{-\frac{1}{\mu}} : \frac{a}{-\frac{1}{\mu}} : a = a : a : \frac{a}{-\mu}$	Zweites Rhomboeder von Leucitoiden.
$\mu = -\frac{1}{2}$	$\frac{a}{-\frac{1}{2}} : \frac{a}{-\frac{1}{2}} : a = a : a : \frac{a}{-2}$	Sechsseitige Säule des Leucitoeders.

Es bilden also für diese Unterordnung die trigonale Endfläche des Octaeders und die sechsseitige Säule des Leucitoeders $\frac{a}{2} : a : a$ als unendlich stumpfes und unendlich spitzes Rhomboeder die beiden Grenzfälle und zwischen diesen Grenzfällen gehören ausser beiden Rhomboedern aller Pyramidenoctaeder die Rhomboeder des Granatoeders und des Octaeders, endlich die zweiten Rhomboeder der Leucitoide $\frac{a}{\mu} : a : a$, bei welchen der Werth von μ zwischen 1 und 2 fällt, hieher. Der Werth von μ in der allgemeinen Formel steigt zuerst von 1 durch lauter positive Werthe bis ∞ und fällt von hier durch negative Werthe bis -1 und dann noch bis $-\frac{1}{2}$.

b) Rhomboeder der zweiten Unterordnung. Liegen bei der ersten Unterordnung die Flächen der Rhomboeder um die trigonale Axe, wie beim Würfel die Kanten, so ist dagegen die Lage der Rhomboederflächen der zweiten Unterordnung um die trigonale Axe dieselbe, wie bei den Flächen des Würfels. Ihre allgemeine Formel, bezogen auf die tetragonalen Axen des regulären Systems, ist $\frac{a}{\mu_1} : a : a$. (Zur Unterscheidung von den Formeln der vorigen Reihe wählen wir hier statt μ das Zeichen μ_1.) — Folgende sind die speciellen Fälle dieser Rhomboeder:

Bestimmung.	Formel, bezogen auf die tetragonalen Axen des regulären Systems.	Namen, nach dem regulären System.
$\mu_1 = 1$	$a : a : a$	Trigonale Endfläche des Octaeders.
$\mu_1 > 1$ und positiv	$\frac{a}{\mu_1} : a : a$	Erstes Rhomboeder von Leucitoiden.
$\mu_1 = \infty$	$\frac{a}{\infty} : a : a = a : \frac{a}{0} : \frac{a}{0}$	Würfel.
$\mu_1 > 2$ und negativ	$\frac{a}{-\mu_1} : a : a$	Zweites Rhomboeder von Leucitoiden.
$\mu_1 = -2$	$\frac{a}{-2} : a : a$	Sechsseitige Säule des Leucitoeders.

Die Grenzfälle als unendlich stumpfes und unendlich spitzes Rhomboeder sind wieder wie vorhin die trigonale Endfläche des Octaeders und die sechsseitige Säule des Leucitoeders, welche einen speciellen Fall des zweiten Rhomboeders eines Leucitoids darstellt. Zwischen hinein fallen die ersten Rhomboeder sämmtlicher Leucitoide, und die zweiten derjenigen, in deren Formel $\frac{a}{\mu_1} : a : a$ der Werth μ_1 zwischen 2 und ∞ liegt, sowie als specieller Fall der Würfel. Denn der Werth μ_1 steigt von 1 durch positive Werthe bis ∞ und fällt von hier durch negative Werthe bis -2.

Je ein Rhomboeder der ersten Unterordnung bildet mit einem der zweiten ein Dihexaeder (der zweiten Ordnung) und zwar gilt für die Zusammengehörigkeit der zwei entsprechenden Formeln $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : a$ und $\frac{a}{\mu_1} : a : a$ die Beziehung zwischen μ und μ_1:

$$\mu\mu_1 + 2\mu_1 - 4\mu + 1 = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\mu_1 = \frac{4\mu - 1}{2 + \mu} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{2\mu_1 + 1}{4 - \mu_1}.$$

Es gehören also je folgende zwei Rhomboeder zu einem Dihexaeder der zweiten Ordnung zusammen:

Bestimmung.	Formel des Rhomboeders der ersten Unterordnung.	Name des Rhomboeders der ersten Unterordnung.	Formel des Rhomboeders der zweiten Unterordnung.	Name des Rhomboeders der zweiten Unterordnung.
$\mu = 1$	$a : a : a$	Trig. Endfläche des Octaeders.	$a : a : a$	Trig. Endfläche des Octaeders.
$\mu > 1$ u. pos.	$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : a$	1. Rhomb. von Pyr.-Oct.	$\frac{2+\mu}{4\mu-1}\ a : a : a$	1. Rhomb. von Leucitoiden.
$\mu = \infty$	$a : a : \frac{a}{0}$	Rhomb. des Granat.	$\frac{a}{4} : a : a$	1. Rhomb. eines Leucitoids.
$\mu > 2$ u. neg.	$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : -a$	2. Rhomb. von Pyr.-Oct.	$\frac{\mu-2}{4\mu+1}\ a : a : a$	1. Rhomb. von Leucitoiden.
$\mu = -2$	$\frac{a}{2} : \frac{a}{2} : -a$	2. Rhomb. eines Pyr.-Oct.	$a : \frac{a}{0} : \frac{a}{0}.$	Würfel.
$\mu > 1$ und < 2 und negativ.	$\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\mu} : -a$	2. Rhomb. von Pyr.-Oct.	$-\frac{2-\mu}{4\mu+1}\ a : a : a$	2. Rhomb. von Leucitoiden.
$\mu < 1$ u. $> \frac{1}{2}$ u. negativ.	$a : a : -\frac{a}{\mu}$	2. Rhomb. von Leucitoiden.	$-\frac{2\mu-1}{4+\mu}\ a : a : a$	2. Rhomb. von Leucitoiden.
$\mu = -\frac{1}{2}$	$a : a : -\frac{a}{2}$	Sechsseit. Säule des Leucitoeders.	$-\frac{a}{2} : a : a$	Sechsseit. Säule des Leucitoeders.

Es geht hieraus unter Anderem hervor, dass es bei dem Pyramidenoctaeder $\frac{a}{2} : \frac{a}{2} : a$ drei um eine trigonale Axe symmetrisch gruppirte Flächen gibt, die mit ihren Parallelen eine dem Würfel congruente Form bilden, was auch die unmittelbare Berechnung bestätigt; ferner dass das Leucitoid $\frac{a}{4} : a : a$ in den gebrochenen Würfelkanten Winkel von 120^0 hat u. s. w.

Überschauen wir die im Bisherigen betrachteten beiden Ordnungen von Dihexaedern, so fällt leicht in die Augen, dass dieselben zwar, mathematisch betrachtet, sämmtlich wahre Dihexaeder je mit lauter gleichen Endkanten und gleichen Flächen sind, dass aber die Dihexaeder der ersten Ordnung zwar krystallographisch gleiche Flächen, aber Endkanten von zweierlei krystallographischer Qualität haben; und dass die Dihexaeder der zweiten Ordnung krystallographisch gleiche Endkanten, aber Flächen von zweierlei krystallographischer Qualität haben. Allein wenn in der Natur die Möglichkeit vorhanden ist, dass Krystallelemente, welche nach ihrer krystallographischen Beschaffenheit gleichwerthig sind, dennoch zuweilen physikalisch different werden, wie diess z. B. beim Borazit so auffallend ist, so kann man sagen, dass auch die Möglichkeit nicht abgeleugnet werden könne, dass unter Umständen das Umgekehrte eintrete, dass also krystallographisch differente Krystallelemente physikalisch gleich werden, sobald sie in das Verhältniss mathematischer Gleichheit getreten sind, besonders wenn die letztere noch vervollständigt wird durch das theilflächige (hemiedrische, tritoedrische, tetartoedrische u. s. w.) Auftreten der einzelnen Körper in Folge des Differentwerdens ihrer Flächen in der im Eingang erwähnten Weise. Man brauchte dabei nicht an Zwillingsbildung zu denken, obwohl dieselbe unter Umständen noch dazu kommen kann.

Wenn jene Fälle, für welche oben der Borazit als Beispiel diente, zur Hemiedrie gerechnet werden, so könnte man vielleicht unsern Fall des Gleichwerdens sonst differenter Krystallelemente mit dem Namen der „Diploedrie“ bezeichnen. Hemiedrie und Diploedrie stünden dann unter sich in einem ähnlichen Verhältniss, wie Dimorphismus und Isomorphismus; denn hier werden in dem einen Fall chemisch gleiche Substanzen physikalisch different, im andern chemisch verschiedene Substanzen (bis auf einen gewissen Grad) physikalisch gleich, dort würden im einen Fall krystallographisch gleiche Krystallelemente physikalisch different, im anderen krystallographisch verschiedene, aber mathematisch gleiche Krystallelemente bis auf einen gewissen Grad physikalisch gleich.

Übrigens ist der Fall wohl denkbar, ja es ist der bei weitem häufigste Fall, dass die beiden Rhomboeder eines Dihexaeders der zweiten Ordnung unter sich different bleiben, so dass das eine fehlt und nur das andere (»haploedrisch«) erscheint, und dass an einem solchen Krystall ein vollständiges Dihexaeder erster Ordnung vorkommt. Dann sind aber an letzterem die Endkanten nur je zu drei und drei physikalisch gleich. Ausgezeichnete Beispiele hiezu liefert der Korund und der Eisenglanz.

Wir gehen über zu der Betrachtung der **Sechskantner**. Ihre Ableitung aus dem regulären System ist nicht anders möglich, als durch (diploedrische) Combination zweier Dreikantner, deren jeder im Allgemeinen einem besonderen 48-Flächner $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : a$ angehört. Die beiden zusammengehörigen Dreikantner müssen der Gestalt nach genau mathematisch congruent, aber um die trigonale Axe, die sie gemeinschaftlich haben, um 60^0 gegen einander verdreht sein. Der eine der beiden gehört einer Reihe von Achtundvierzigflächnern $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : a$ an, welche die Pyramidenkanten der Pyramidenoctaeder zuschärfen und für welche die Beziehung: $\mu + 1 > 2\nu$ gilt, der andere einer zweiten Reihe, deren Glieder die gebrochenen Würfelkanten der Leucitoide zuschärfen, und für die also die Beziehung $\mu + 1 < 2\nu$ gilt, wie sich leicht beweisen lässt. Zwischen beiden Reihen zieht sich die Reihe von jenen Dreikantnern durch, welche gleichwinklige Endkanten haben, in deren Formel also $\mu + 1$ den Grenzwerth 2ν hat. Jede der beiden Reihen beginnt mit der trigonalen Endfläche als unendlich stumpfem Dreikantner, und endigt mit einer Anzahl von unendlich spitzen Dreikantnern, d. h. 6 + 6-kantigen Säulen, von denen aber je eine der einen Reihe mit einer der andern zusammenfällt. Eine solche Säule ist nichts anderes als der vierte Dreikantner eines 48-Flächners, in dessen allgemeiner Formel $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : a$ die Gleichung gilt $\mu = \nu + 1$; solche 48-Flächner haben bekanntlich die Eigenschaft, die Kanten der Granatoeder zuzuschärfen und heissen Pyramiden-Granatoeder. Zwischen hinein fallen die Dreikantner der Pyramidenwürfel (mit Ausnahme des ersten Dreikantners des Pyramidenwürfels $\frac{a}{2} : \frac{a}{0} : a$), die Dreikantner der Leucitoide (mit Ausnahme des Leucitoids $\frac{a}{3} : a : a$), die Dreikantner der Pyramidenoctaeder und der Achtundvierzigflächner (mit Ausnahme der oben genannten ersten, zweiten und dritten Dreikantner von Achtundvierzigflächnern, für welche $\mu = 2\nu - 1$).

Für die Zusammengehörigkeit zweier Dreikantner von Achtundvierzigflächnern, denen die Formeln $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : a$ und $\frac{a}{\mu_1} : \frac{a}{\mu_1} : a$

zukomme, zu einem Sechskantner gelten folgende Bedingungsgleichungen zwischen μ, ν, μ_1, ν_1:

$$(\mu + \nu + 1)(\nu_1 - 1) = (\mu_1 + \nu_1 + 1)(\mu - \nu)$$

$$\text{und } (\mu + \nu + 1)(\mu_1 - 1) = (\mu_1 + \nu_1 + 1)(\mu - 1).$$

Wenn zwei solche mathematisch congruente, aber um die gemeinschaftliche trigonale Axe umgekehrt gruppirte Dreikantner diploedrisch zusammentreten, so entsteht ein wahrer Sechskantner mit 6 + 6 abwechselnd gleichen Endkanten, wie solche unter den Krystallen des sechsgliedrigen Systems vollständig und unzweifelhaft beim Beryll vorkommen.

Als Resultat der bisherigen Betrachtungen lässt sich etwa Folgendes zusammenfassen: Wie das viergliederige (quadratische), zweigliederige (orthorhombische), zweiundeingliederige (klinorhombische) und eingliederige (klinorhomboidische) Krystallsystem dadurch aus dem regulären abgeleitet werden kann, dass man die Körper des letzteren der Reihe nach auf die Fläche des Würfels, Granatoeders, eines Vierundzwanzigflächners, eines Achtundvierzigflächners stellt und dann sich dieselben in verticaler Richtung zusammengedrückt oder gestreckt denkt (indem gleichzeitig mit der Änderung der mathematischen Form die entsprechende Umwandlung in der krystallographischen und physikalischen Gleichwerthigkeit der einzelnen Krystallelemente eintritt), — so entstehen bei gleicher Behandlung der regulären Körper, wenn statt der oben genannten Flächen die Octaederfläche gewählt wird, die dreigliedrigen Körper, nämlich Rhomboeder, Dreikantner, sechsseitige und 6 + 6kantige Säulen und die trigonale Endfläche und zwar erscheinen sie als vollkommen holoedrische Formen, so gut wie die viergliedrigen Octaeder und Säulen und die anderen Körper der übrigen Systeme, welche auf obige Weise aus dem regulären System abgeleitet werden. Während aber in allen jenen andern Fällen keine zwei Körper von verschiedener, auf die Axen des regulären Systems bezogener Formel mit rationalen Coefficienten auf mathematisch congruente abgeleitete Formen führen, so ist diess bei der Ableitung der dreigliedrigen Körper der Fall und es brauchen hier nur die mathematisch vollkommen übereinstimmenden Krystallflächen physikalisch gleich zu werden und Einen (»diploedrisch» combinirten) Krystallkörper zu bilden, so erhält man die sechsgliedrigen Körper: Dihexaeder und Sechskantner, als deren specielle Fälle auch einzelne der haploedrischen (dreigliedrigen) Körper unter Umständen erscheinen können.

In der Natur bleiben aber die meisten dreigliedrigen Körper haploedrisch und von wirklicher Diploedrie bietet vielleicht der Beryll das einzige Beispiel. Bei den haploedrisch-dreigliedrigen Körpern ist es gewiss nicht zufällig, dass bei Combination von Dihexaedern verschiedener Ordnung nur die der einen (der zweiten nach unserer obigen Bezeichnung) in ihre Rhomboeder gespalten erscheinen, die der anderen (ersten) dagegen vollflächig, übrigens dennoch haploedrisch, nämlich in Beziehung auf die Kanten.

Man könnte nun die Frage aufwerfen: Warum kommt denn diploedrisches Auftreten zweier mathematisch gleicher Körper nicht wirklich auch an regulären Krystallen vor? Oder, da die Diploedrie nothwendig zugleich ein Differentwerden zwischen den Flächen eines und desselben Körpers einschliesst (also z. B. eine tetartoedrische Ausbildung der 48-Flächner, da nur einer der 4 Dreikantner eines solchen in Betracht kommt): Warum lassen sich den diploedrisch-sechsgliedrigen Körpern niemals reguläre Axen unterlegen, so dass die trigonale Axe mit den digonalen in's Verhältniss $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ und mit den tetragonalen Axen in's Verhältniss von $\sqrt{3} : 1$ träte? Darauf dient zur Antwort: Schon die Spaltung eines 48-Flächners in seine 4 Dreikantner, wodurch dieselben different werden, oder überhaupt die Spaltung der regulären Körper in ihre trigonalen Theilkörper setzt ein physikalisches und eben damit mathematisches Differentwerden der einen trigonalen Axe gegenüber den übrigen voraus. Da nun die Diploedrie jene Spaltung nothwendig bedingt, so setzt auch sie jene Änderung des Axenverhältnisses voraus, d. h. sie wird eben nur veranlasst dadurch, dass eine physikalische Änderung zwischen der einen trigonalen Axe und den drei übrigen eintritt.

Indem wir nun die dreigliedrigen Körper des sogenannten »Hexagonalsystems« nicht als hemiedrische, sondern als haploedrisch-holoedrische Formen betrachten, so ist damit die Möglichkeit hemiedrischer Formen im dreigliedrigen, wie im sechsgliedrigen System keineswegs ausgeschlossen. Wir beschränken uns darauf, einige Andeutungen hierüber auf Grund der Beziehungen zum regulären System, die wir hervorgehoben haben, zu geben.

Die tetraedrische Hemiedrie erzeugt aus dem regulären Octaeder das Tetraeder, aus den Leucitoiden die Pyramidentetraeder, aus den 48-Flächnern die gebrochenen Pyramidentetraeder u. s. f. Betrachten wir diese Halbflächner in ihrer trigonalen Stellung, so finden wir ihre obere und untere Endigung ganz verschieden und an den abgeleiteten drei- und sechsgliedrigen Körpern wird also dasselbe der Fall sein. Die Rhomboeder, Dreikantner, Dihexaeder erster Ordnung erzeugen Körper, die am einen Ende drei-, $3 + 3 = 6$kantig zugespitzt, dagegen am unteren Ende offen sind. Die 6seitigen und $6 + 6$kantigen Säulen werden, als unendlich spitze Rhomboeder und Dihexaeder betrachtet, zu dreiseitigen und $3 + 3$kantigen Säulen. Der Endfläche fehlt ihre Parallele. Die Dihexaeder der zweiten Ordnung und die Sechskantner werden, je nachdem an beiden diploedrisch vereinigten Rhomboedern und Dreikantnern die positiven oder am einen die positiven, am andern die negativen Flächen die bleibenden sind, entweder gleichfalls zu einerseits sechs- und $6 + 6$flächig zugespitzten andererseits offenen Körpern, oder sie werden zu dreiseitigen und zu $3 + 3$kantigen Doppelpyramiden. Ein ausgezeichnetes Beispiel tetraedrischer Hemiedrie im dreigliedrigen System bietet der Turmalin, wo sie in ganz gleicher Weise wie beim Borazit mit der polarisch-electrischen Beschaffenheit zusammenhängt.

Die pyritoedrische Hemiedrie ist bei Rhomboedern und den Dihexaedern der zweiten Ordnung so wenig möglich, als im regulären System bei Würfel oder Octaeder, dagegen erzeugt sie aus den Dihexaedern der ersten Ordnung Rhomboeder, die zwischen den beiden erwähnten Unterordnungen in der Mitte liegen, aus den Dreikantnern Rhomboeder von noch anderer Stellung, aus den Sechskantnern bei derselben Unterscheidung wie oben entweder Dihexaeder von Mittelstellung oder Dreikantner von Mittelstellung. Die sechsseitigen Säulen bleiben holoedrisch, dagegen werden aus den $6 + 6$kantigen Säulen regelmässig sechsseitige Säulen von Mittelstellung (d. h. mit keiner der sechsseitigen Säulen beider Ordnungen zusammenfallend). (Apatit.)

Die gyroedrische Hemiedrie ist im regulären System nur auf die 48-Flächner anwendbar, alle anderen Körper bleiben holoedrisch. Folglich kann sie unter den drei- und sechsgliedrigen Körpern nur auf die Dreikantner, Dihexaeder erster Ordnung und Sechskantner, sowie auf diejenigen Säulen, welche specielle Fälle der genannten Körper bilden, angewendet werden. Sie erzeugt aus den Dihexaedern erster Ordnung regelmässig dreiseitige Doppelpyramiden, aus den Dreikantnern sogenannte trigonale Trapezoeder. Die Sechskantner werden entweder zu sogen. hexagonalen Trapezoedern oder zu 3 + 3kantige Doppelpyramiden mit horizontalen Seitenkanten.

Obwohl manche Formen, die gewöhnlich für tetartoedrische gelten, unter die im Vorstehenden als hemiedrische beschriebenen gehören, so ist doch noch der Fall einer Tetartoedrie bei drei- und sechsgliedrigen Körpern denkbar, indessen unter den haploedrisch-dreigliedrigen nur bei den Dreikantnern und 6 + 6-kantigen Säulen, da diess die einzigen Körper sind, deren Flächenzahl durch 4 theilbar ist. Es ist ganz gleichgültig, welche zwei der drei Arten von Hemiedrie wir zugleich an einem solchen Körper in Anwendung bringen, immer erhält man als tetartoedrische Ableitung eines Dreikantners eine einfache, auf der Basis offene, dreiseitige, zu den Queraxen schief stehende Pyramide. Treten zwei congruente Dreikantner diploedrisch zusammen, so hängt die Gestalt des diploedrisch-hemiedrischen Sechsflächners ganz davon ab, ob man bei der doppelten hemiedrischen Ableitung der beiden Dreikantner lauter positive oder auch negative Flächen, und in welchen Fällen man die positiven und in welchen Fällen man die negativen Flächen als die bleibenden annimmt. Es sind 4 Fälle denkbar: 1) eine an der Basis offene, gleichseitig-sechsseitige Pyramide; 2) eine gleichfalls an der Basis offene, 3 + 3kantige Pyramide; 3) eine dreiseitige Doppelpyramide von Mittelstellung; 4) ein trigonales Trapezoeder, d. h. einen sechsflächigen, zu beiden Seiten in der trigonalen Axe dreiflächig zugespitzten Körper, dessen Flächen aber unregelmässige, übrigens congruente Vierecke sind. Hieher gehören die »Trapezflächen« des Bergkrystalls, deren vielartiges und unregelmässiges Auftreten sich aus obigen viererlei Möglichkeiten wohl einigermassen erklärt. Der vierte Fall ist der von G. Rose für diese Trapezflächen als normal angenommene, allein bekanntlich kommen auch andere Fälle vor. Die sogenannten Rhombenflächen des Bergkrystalls bilden in dem Fall, welchen Rose als den normalen annimmt (wo sie an einer und derselben Säulenkante oben und unten erscheinen), die gyroedrisch-hemiedrische Form eines Dihexaeders (nach unserer Bezeichnung, die übrigens willkürlich ist, der ersten Ordnung angehörig); ein solches ist einer tetartoedrischen Hemiedrie nicht fähig.

Vorstehende Untersuchungen sollten hauptsächlich den innigen Zusammenhang, in welchem die Krystallsysteme unter einander stehen, auf's Neue in's Licht setzen. So wenig die Richtung einer Krystallfläche von der der übrigen Flächen desselben Krystalls ganz unabhängig ist, so wenig stehen die verschiedenen Krystallsysteme ohne Beziehung zu einander da. Gleichwie vielmehr die Richtungen sämmtlicher Flächen eines und desselben Krystalls beeinflusst werden durch eine bestimmte mathematische Grösse, die z. B. in dem Axenverhältniss zum Ausdruck kommt, so dass dieselben nur verschiedene Functionen jener Grösse darstellen, so sind sämmtliche Krystallsysteme mit einander verbunden durch ein und dasselbe Grundgesetz, das nur in den verschiedenen Systemen auf eine verschiedene Weise sich kund gibt. Übrigens hält der Verfasser die Anschauungsweise, wie sie den vorstehenden Erörterungen zu Grunde liegt, keineswegs für neu, sie ist insbesondere in v. Quenstedt's Schriften überall angedeutet; sondern es war ihm nur darum zu thun, sie für den vorliegenden Fall etwas eingehender durchzuführen.