Die Erscheinung der Totalreflexion zwischen einem isotropen Körper und einem Kristall, sowie eine neue Methode, die drei Hauptbrechungsverhältnisse aus einem beliebigen Schnitt zu bestimmen.

Von

C. Viola in Parma.

Mit 10 Textfiguren.

Mit Hilfe der Totalreflexion in einem isotropen Mittel in bezug auf einen beliebigen Kristallschnitt kann man eindeutig die drei Hauptbrechungsindizes bestimmen, wie immer der mit unbekannter Orientierung versehene Schnitt auch sei. Das Prinzip, auf welches diese eindeutige Bestimmung gegründet ist, besteht darin, daß die Polarisationsebene der einen der vier Richtungen mit Maxima und Minima der Totalreflexion normal ist zu der Einfallsebene und daß eben diese spezielle Richtung von der Berechnung der drei Indizes ausgeschlossen werden muß, da sie zu keiner der drei optischen Hauptebenen des Kristalls gehört.

Ich habe dieses Prinzip 1902 bewiesen[1]; aber da wirft sich die Frage auf, mit welcher Regel man die Richtung erkennen kann, welche jene Eigenschaft besitzt. — Es ist bewiesen, daß in der Totalreflexion der zurückgeworfene Strahl nicht geradlinig

[1] C. Viola, Die Bestimmung der optischen Konstanten eines Kristalls aus einem einzigen beliebigen Schnitte. Zeitschr. f. Krist. **36**. 245. 1902. — F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. Leipzig 1906. p. 133. — L. Duparc et Fr. Pearce, Traité de technique minéralogique et pétrographique. Leipzig 1907. p. 390.

polarisiert wird, wenn der Einfallsstrahl gewöhnliches Licht ist. Pockels[1] schlug streifende Beleuchtung vor, nach einer Uniradialen polarisiert, indem er ein Nicol auf dem Wege des Einfallstrahles einschaltet. Schwietring[2] findet, daß ein einziges Nicol weder genügende Genauigkeit noch Garantie bietet, und schlägt daher vor, zwei Nicols zu benützen, wovon das eine der Polarisator, das andere der Analysator sein soll.

Die Erfahrung hat mir gezeigt, daß es außerordentlich schwer ist, die Lage der Polarisationsebene festzustellen; daß ein Nicol schon das Gesichtsfeld ungemein schwächt, daß zwei Nicols die großen Vorzüge vernichten, die man aus der Methode der Totalreflexion erhält, mit Hilfe welcher man alle optischen Konstanten eines Kristalls gewinnt, von dem man einen einzigen Schliff zur Verfügung hat, wie bei den Dünnschliffen der Gesteine. — Es ist daher durchaus nicht überflüssig, wenn man das von mir bewiesene Prinzip auf anderem Weg in die Praxis umsetzt.

Wenn man mit Φ den Winkel der Totalreflexion bezeichnet und mit N_0 den Brechungsindex des isotropen Mittels, so gibt der Ausdruck

$$N_s = N_0 \sin \Phi$$

im allgemeinen nicht den Brechungsindex des Krystalles für die in Frage stehende Richtung; es wird aber allgemein angenommen, daß er ihn nur in dem Falle angibt, wenn die Richtung in eine der drei optischen Hauptebenen des Kristalls fällt. Nun ist aber dieser letztere Satz nicht richtig.

Nehmen wir vorerst an, daß durch die Methode der Totalreflexion die vier Richtungen A, B', B'', Γ (Fig. 1) gefunden werden, nach welchen der Winkel der Totalreflexion ein Maximum oder ein Minimum ist, die wir mit Φ_α, Φ', Φ'', Φ_γ respektive bezeichnen, indem Φ_α der kleinste und Φ_γ der größte dieser Winkel ist.

Während es bekannt ist, daß die zwei Richtungen A und Γ sich in den optischen Hauptebenen des Kristalls befinden, bleibt es hingegen zweifelhaft, welche der beiden Richtungen B' oder B'' in die Ebene der optischen Achsen fällt.

---

[1] F. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. Leipzig 1906, p. 133, 202.

[2] Fr. Schwietring, Eine allgemeine Methode für die eindeutige Bestimmung der drei Hauptbrechungsindizes an einem beliebigen Schnitt eines optisch zweiachsigen Kristalls. Dies. Jahrb. 1912, I. p. 21.

Es ist bekannt. daß SORET[1], um diesen Zweifel zu beseitigen, die Aufgabe löste, indem er die Beobachtung auf zwei Schliffe des Kristalls ausdehnte.

Wenn B' die Richtung ist, welche in die Ebene der optischen Achsen des Kristalls fällt, so wäre die Richtung B'' diejenige, deren Polarisationsebene im Kristall normal ist zur Einfallsebene. — Indem die drei Richtungen A, B', Γ durch diese Hypothese

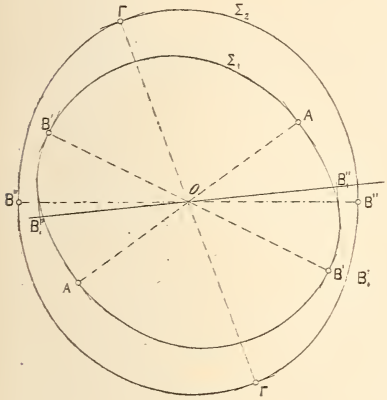

Fig. 1.

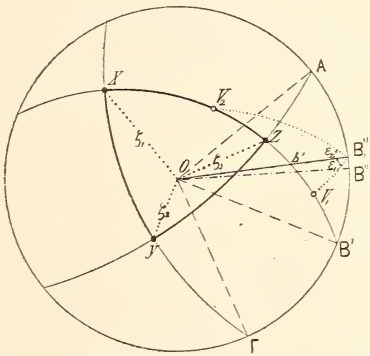

Fig. 2.

festgestellt sind, kann man die Orientierung des Indexellipsoides des Kristalls mit den folgenden höchst einfachen Relationen konstruieren (Fig. 2):

$$\operatorname{tang}^2 \zeta_1 = -\frac{\cos \Gamma B'}{\cos B' A \,.\, \cos \Gamma A},$$

$$\operatorname{tang}^2 \zeta_2 = -\frac{\cos \Gamma A}{\cos \Gamma B' \,.\, \cos B' A}.$$

$$\operatorname{tang}^2 \zeta_3 = -\frac{\cos A B'}{\cos \Gamma A \,.\, \cos B' \Gamma}.$$ [2]

[1] CH. SORET, Sur la réflexion totale à la surface des corps biréfringents. Compt. rend. **106**. 1885. p. 176, 479; Arch. d. sc. phys. et nat. Genève 1885. **14**. 96; — Über die Anwendung der Erscheinungen der Totalreflexion zur Messung der Brechungsexponenten zweiachsiger Kristalle. Zeitschr. f. Krist. **15**. 1889. p. 45. — A. BRILL, Math. Ann. **34**. (1889.) p. 297; Münchner Sitz.-Ber. **13**. (1883.) 423. — L. PERROT, Compt. rend. **108**. (1889.) p. 137; — Arch. sc. phys. nat. Genève (3.) **21**. (1889.) p. 113. — A. LAVENIR, Bull. soc. min. **14**. (1891.) p. 100.

[2] C. VIOLA, Sulla determinazione delle costanti ottiche dei cristalli. R. Accademia dei Lincei: Rendiconti 1899. I. p. 279; — Über die Bestimmung der optischen Konstanten eines beliebig orientierten zweiach-

Die Hauptbrechungsindizes berechnet man mit Leichtigkeit folgendermaßen:

$$\alpha = N_0 \sin \Phi_\alpha, \quad \beta = N_0 \sin \Phi', \quad \gamma = N_0 \sin \Phi_\gamma.$$

Mit genügender Wahrscheinlichkeit berechnet man auch den Halbwinkel der optischen Achsen, den diese mit der Richtung Z bilden, durch den Ausdruck:

$$\cos^2 V = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}.$$

Nach dieser Feststellung der optischen Hauptrichtungen des Kristalls (die Pole X, Y, Z in der Fig. 2) und derjenigen der optischen Achsen (die Pole V_1 und V_2 in der Fig. 2) kann man annähernd die Richtung B'' feststellen, deren Polarisationsebene normal zur Einfallsebene ist. — Man ziehe zu diesem Zweck die Maximalkreise resp. durch V_1 und V_2 von einem Punkt B_1'' des Grundkreises aus, in der Weise, daß der Durchmesser B_1'' O mit den beiden Kreisen den gleichen Winkel, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, einschließt. — Die so konstruierte Richtung O B_1'' wird zwar nicht genau die gesuchte Richtung B'' sein, aber sie wird sich dieser sehr stark nähern, da die Wellenebene für die Richtung O B_1'' normal zur Grenzebene des Kristalls ist, während die Wellenebene der Richtung B'' ein wenig geneigt ist, man sehe auch die Fig. 7. — Wäre diese Neigung bekannt, wenn z. B. der Pol der Wellenebene der Richtung B'' (Fig. 3) E'' wäre, so hätte dieser Pol die Eigenschaft, daß die durch E'' gehende Richtung O B'' den gleichen Winkel, $\varepsilon_1' = \varepsilon_1''$, einschließen würde mit den Maximalkreisen, die durch E'' und resp. durch die Pole der optischen Achsen V_1 und V_2 (Fig. 3) gehen. Jedenfalls, wenn man den kleinen Winkel in Betracht zieht, den der Lichtstrahl mit der Wellennormalen bildet, so werden die zwei Richtungen B_1'' und B'' so nahe sein, daß es erlaubt ist, eine mit der andern zu vertauschen.

Der Punkt b', der die Richtung B_1'' bestimmt (Fig. 2), kann mit der Relation

$$\frac{\sin b' V_1}{\sin b' V_2} : \frac{\sin B' V_1}{\sin B' V_2} = -1$$

---

sigen Kristallschnittes. Zeitschr. f. Krist. **31**. 40. 1899. — A. Cornu, Compt. rend. **133**. (1901.) p. 125, 463. — C. Viola, Détermination des trois paramétres optiques principaux d'un cristal. Bull. de la soc. franç. de minéralogie. **25**. 1902. p. 147. — F. Pockels, l. c. p. 131.

konstruiert werden, sowie der Punkt b, der die Richtung B'' (Fig. 3) bestimmt, mit der Relation

$$\frac{\sin b V_1}{\sin b V_2} : \frac{\sin B V_1}{\sin B V_2} = -1,$$

da B der gemeinschaftliche Pol sowohl für die Ebene der optischen Achsen, als auch für den durch E'' gehenden zu O B'' normalen Kreis. — Aus diesen Bedingungen erkennt man, daß b' nicht mit b übereinstimmen kann, aber daß sie sich sehr nahe kommen, wie eben auch die Richtungen B_1'' und B''. —

Und man wird dann den Schluß ziehen, daß, wenn die so konstruierte Richtung B_1'' sehr nahe an die durch die Beobachtung

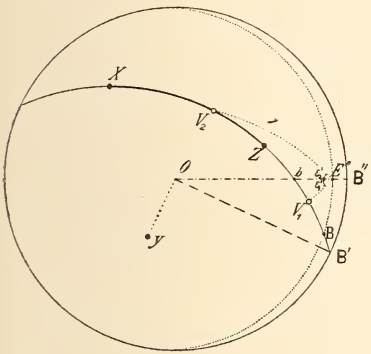

Fig. 3.

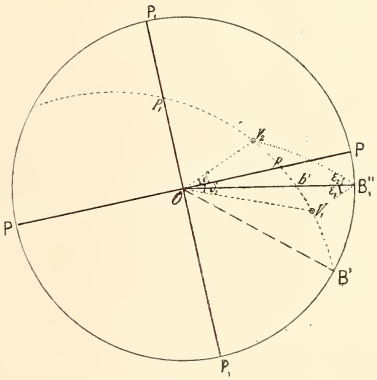

Fig. 4.

festgestellte Richtung B'' fällt, auch die Hypothese, daß nämlich B' auf die Ebene der optischen Achsen des Kristalls zu liegen kommt, vollkommen gerechtfertigt erscheint. — Sollte B_1'' sehr weit entfernt von B'' herauskommen, empfiehlt es sich, eine zweite Hypothese aufzustellen, nämlich B'' als die in der optischen Achsenebene liegende Richtung anzunehmen. Wenn man ferner die Berechnung und die Konstruktion wiederholt, erhält man eine Kontrolle, ob diese zweite Hypothese genügend ist. —

Diese einfache Methode, die ich die Konstruktionsmethode nennen möchte, kann durch eine andere ersetzt, ausgebildet und verbessert werden, wenn man eine dritte Richtung des Kristallschnittes zu Hilfe nimmt, d. h. die Auslöschungsrichtung des-

selben. — Die beiden aufeinander senkrechten Auslöschungsrichtungen des Kristallschnittes seien P und P_1, Fig. 4, welche mit ziemlich großer Genauigkeit durch das Orthoskop oder Mikroskop angegeben werden können. — Es seien wieder V_1 und V_2 die Pole der optischen Achsen, und B' die Spur dieser Ebene auf der Grenzebene. — Indem man die nahe der Richtung B'' liegende Richtung B_1'' in Betracht zieht, welche denselben Winkel, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ mit den Kreisen $B_1'' V_1$ und $B_1'' V_2$ einschließt, stellen wir die Relation wie vorher auf:

$$\frac{\sin b' V_1}{\sin b' V_2} : \frac{\sin B' V_1}{\sin B' V_2} = -1.$$

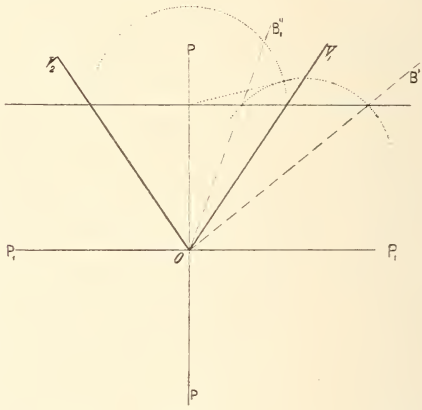

Fig. 5.

Da aber auch die Auslöschungsrichtungen P und P_1 die Eigenschaft besitzen den Winkel $V_1 O V_2$ zu halbieren, so besteht auch die Relation

$$\frac{\sin p V_1}{\sin p V_2} : \frac{\sin p_1 V_1}{\sin p_1 V_2} = -1.$$

Die beiden letzten Doppelverhältnisse sprechen aus, daß die zwei Richtungen $O V_1$ und $O V_2$ den rechten Winkel $P O P_1$ sowie den Winkel $B' O B_1''$ harmonisch teilen; sie werden daher von der Größe des Winkels der optischen Achsen unabhängig, sowie auch davon, ob die Richtung B' oder die Richtung B_1'' in die Ebene der optischen Achsen fällt. — In der Fig. 5 ist die Konstruktion der Richtungen $O V_1$, $O V_2$ ausgeführt, worin die Richtungen P, P_1, B', B_1'' gegeben sind. — Indem man daher die Auslöschungs-

richtungen in Betracht zieht, hat man in der Hand, die Richtungen B' und B_1'' zu vertauschen, ohne daß damit weder der Winkel der optischen Achsen noch die Auslöschungsrichtungen des Kristallschnittes geändert werden. — Will man nun die Aufgabe lösen, so braucht man nur noch die Pole X und Z hinzuzusetzen, und daraus die Richtungen Δ und Γ herauszuerhalten. —

In der Fig. 6 ist die ganze Konstruktion ausgeführt für den Albit von Amelia, Schnitt $\perp$ zu (010). — Aus den Richtungen B' und B_1'' sowie den beiden Auslöschungsrichtungen P und P_1 sind die Richtungen OV_1 und OV_2 konstruiert mit dem Prinzip der harmonischen Teilung, wie in der Fig. 5. — Der Winkel der

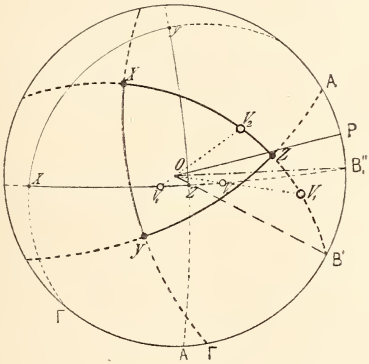

Fig. 6.

optischen Achsen kommt ferner hinzu sowohl für die Hypothese, daß die Richtung B' in die Ebene der optischen Achsen fällt, als auch für diejenige, daß B_1'' in die Ebene der optischen Achsen fällt. — Mit dieser Konstruktion werden die Pole der optischen Achsen V_1 und V_2 festgestellt. — Für beide Hypothesen ist auch die Lage von X, Y, Z dadurch hervorgegangen, und daraus diejenige von Δ und Γ (Fig. 6).

Man sieht auf der Stelle, daß die Lage von Δ und Γ in beiden Fällen so verschieden voneinander ist, daß es unmöglich ist zu erkennen, welche der beiden Hypothesen der Wahrheit entspricht. —

Wir haben bis jetzt zwei Konstruktionsmethoden kennen gelernt, durch welche die Zweideutigkeit der Aufgabe gehoben ist. Die eine besteht darin, die der Richtung B'' nahegelegene

Richtung B_1'' aus den beobachteten Richtungen A, B', Γ und dem Winkel der optischen Achsen zu konstruieren, und mit der beobachteten Richtung B'' zu vergleichen. —

Diese Konstruktionsmethode hat den großen Nachteil, vier mit großer Ungenauigkeit festgestellte Richtungen A, B', B'', Γ in Rechnung ziehen zu müssen.

Die zweite Konstruktionsmethode ist einfacher und übersichtlicher als die erste, und ist unabhängig von dem Fehler, mit welchem die Lage von A und Γ behaftet sein mag. — Sie gründet sich auf die Auslöschungsrichtungen des Kristallschnittes, welche mit viel größerer Sicherheit als A und Γ angegeben werden können. — Sie löst die Aufgabe vollständig, wie immer auch der Kristallschnitt in bezug auf die optischen Hauptebenen orientiert sein mag. — Wir werden aber bald sehen, daß dieselbe Aufgabe direkt ohne irgendwelche Rechnung oder geometrische Konstruktion gelöst werden kann. —

Bevor wir aber zu der Beobachtungsmethode übergehen, wollen wir die Methode der Totalreflexion näher betrachten und die Frage eingehender untersuchen, wie viele Brechungsindizes die Totalreflexion im allgemeinen zu liefern vermag. —

Zu diesem Zwecke stellen wir uns vor, daß die Gerade G G (Fig. 7 a) in vertikaler Projektion die horizontale Grenzebene darstelle, die das untere isotrope mit dem Brechungsindex N_0 versehene Mittel von dem oberen anisotropen Mittel trennt, so daß in der Fig. 7 a die Einfallsebene oder die Reflexionsebene mit der Zeichnungsebene zusammenfällt. — Die Fig. 7 b ist die Horizontalprojektion dessen, was in Fig. 7 a angegeben ist; deshalb ist in der Fig. 7 b die Grenzebene die Zeichnungsebene selbst, und die Spur der Einfallsebene die Gerade J J.

Der Einfallsstrahl S_0 Fig. 7 a soll mit dem Einfallswinkel Φ die Grenze der Totalreflexion darstellen. — Es sei der Kreis K Fig. 7 a und respektive K Fig. 7 b der Repräsentant einer Kugel, mit dem Halbmesser V_0, der der Lichtgeschwindigkeit im isotropen Mittel proportional ist. — In dem gleichen Maßstab konstruiere man auch die aus zwei Falten bestehende Wellenfläche des Kristalls. — In der Vertikalprojektion, Fig. 7 a, stellt die Kurve C eine einzige Falte dieser Wellenfläche dar, und in der Horizontalprojektion, Fig. 7 b, wird der Schnitt der Wellenfläche mit der

Grenzebene G G durch die Linie Σ dargestellt. — Der Einfallsstrahl S_0 soll die Grenze der Totalreflexion im isotropen Mittel darstellen. Wenn dem so ist, muß seine tangent zur Kugel K und normal zu S_0 entsprechende Wellenebene als Spur auf der Grenzebene eine Gerade sein, welche zur Wellenfläche und daher zur Spur Σ tangent ist. — Durch dieselbe Spur $E_t E_t$ geht auch die gebrochene Welle (oder resp. die gebrochenen Wellen) im Kristall, die in der Fig. 7 a mit E s bezeichnet ist, tangent in s, Fig. 7 a, und $s' E_t$ in Fig. 7 b. — Daß, wenn man diese Bedingungen aufstellt, der Einfallsstrahl S_0 wirklich die Grenze der Totalreflexion sei, kann man davon ableiten, daß für einen Einfallswinkel größer als Φ keine gebrochenen Wellenebenen möglich sind, und daher wird alles Licht von der Grenzebene im isotropen Mittel total reflektiert. —

Um im Kristall die Geschwindigkeit der Wellenebene E zu bekommen, fällt man darauf die Normale, dann stellt eben O v in der angewandten Skala die gesuchte Geschwindigkeit dar, die wir mit V bezeichnen wollen. — Aus den zwei Dreiecken O v s und $O v_0 s$ leitet man ab:

$$O u = \frac{O v}{\sin \varphi} = \frac{O v_0}{\sin \Phi} = U \qquad \text{oder } \frac{1}{U} = \frac{\sin \Phi}{V_0},$$

indem U die Geschwindigkeit des Lichts in der Richtung von O u bedeutet. —

Da nun der Brechungsindex N_0 umgekehrt proportional zu V_0 ist, und wir mit N_u eine zu U umgekehrt proportionale Zahl bezeichnen, erhält man

$$N_u = N_0 \sin \Phi,$$

da

$$N_u = \frac{n}{\sin \varrho}$$

ist, wo ϱ den Brechungswinkel bedeutet, der demjenigen der Totalreflexion Φ genau entspricht. — Das hier oben erreichte Ergebnis beweist, daß mit dem Winkel der Totalreflexion Φ, wenn man das Produkt bildet

$$N_0 \sin \Phi,$$

man den Brechungsindex der Wellenebene im Kristall nicht erhält für irgendwelche gegebene Einfallsebene, sondern vielmehr das Brechungsverhältnis der Spur der Wellenebene auf der Grenz-

fläche, durch welche man als Umhüllungskurve die Linie Σ. Fig. 7 b, konstruiert, welche der Wellenfläche angehört. —

Nur für gewisse Richtungen der Einfallsebene stimmt der Brechungsindex N_u mit dem Brechungsindex N der Wellenebene überein, natürlich dann und nur dann, wenn $\varrho = 90^0$ ist, d. h. wenn die Wellenebene im Kristall normal zur Grenzebene ist. Und wir werden beweisen, daß es vier solcher Richtungen gibt, im allgemeinsten Fall, und nur vier. — Ferner muß die Spurkurve Σ vier Maximal und Minimalwerte von 0^0 bis 180^0 aufweisen; sie entsprechen der Bedingung, daß der Punkt s' in den Punkt u', Fig. 7 b, fällt. —

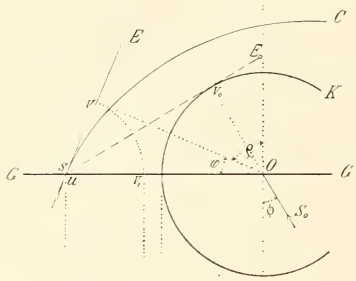

Fig. 7 a.

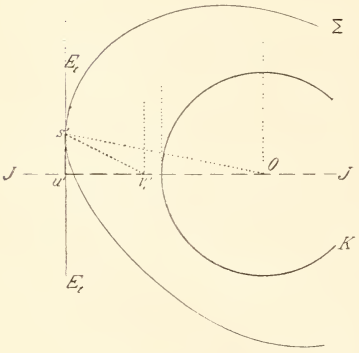

Fig. 7 b.

In der Fig. 7 b ist ein in der Wellenebene E liegendes Dreieck $s'u'v_1'$ gezeichnet, dessen Ecken dem Fußpunkt der Normalen O v, demjenigen des Lichtstrahles O s' und dem der in der Einfallsebene liegenden Richtung O u' entsprechen. —

Die oben verlangte Bedingung, $\varrho = 90^0$, wandelt sich in die Bedingung um, daß das Dreieck $s'u'v_1'$ Null wird, da v_1' in u' fällt; und die Bedingung eines Maximal- oder Minimalwertes der Spurkurve Σ drückt man so aus, daß die Punkte s' und u' zusammenfallen, d. h. daß der Lichtstrahl in die Einfallsebene zu liegen kommt. —

Wenn nun die Richtung J J der Einfallsebene in eine der drei Hauptebenen des Kristalls zu liegen kommt, so ist sowohl der Bedingung, daß $\varrho = 90^0$, als auch der Bedingung, daß s' mit u' zusammenfällt. Genüge geleistet, da in diesem Fall der Lichtstrahl in der zur Wellenebene gehörenden Normalen liegt. — So hat also für die drei mit A, B', Γ bezeichneten Richtungen, die in den optischen Hauptebenen des Kristalls liegen, die Curve Σ Maxima

oder Minima, und die entsprechenden Winkel der Totalreflexion Φ_α, Φ', Φ_γ geben die Hauptbrechungsindizes durch die Formel:

$$\alpha = N_0 \sin \Phi_\alpha,$$
$$\beta = N_0 \sin \Phi',$$
$$\gamma = N_0 \sin \Phi_\gamma.$$

Die vierte spezielle Richtung, wo die Spurkurve Σ ein Maximum oder ein Minimum haben muß, ist mit B'' angegeben. — Sie genügt der Bedingung, daß der Punkt s′ in den Punkt u′ Fig. 7 b fällt, d. h. daß der Lichtstrahl und die zur Wellenebene gehörende Normale sich in der Einfallsebene befinden, oder anders gesagt, daß die Polarisationsebene zur Einfallsebene normal sei. — Wie aus der Fig. 3 hervorgeht, genügt eine einzige Richtung B'' dieser Bedingung. — In der Fig. 8 a sind von neuem die Kugelfläche K und die von den Kurven C_1 und C_2 wiedergegebenen Wellenflächen des Kristalls gezeichnet. — Die der Totalreflexion entsprechende Wellenebene für die Richtung B'' ist mit der Tangente E″ bezeichnet in vertikaler Projektion, Fig. 8 a und mit der Tangente E″ zur Kurve Σ_2 in der Horizontalprojektion, Fig. 8 b. Da die Wellenebene E″ zur Grenzebene G G nicht normal ist, erfolgt daraus, daß der Ausdruck

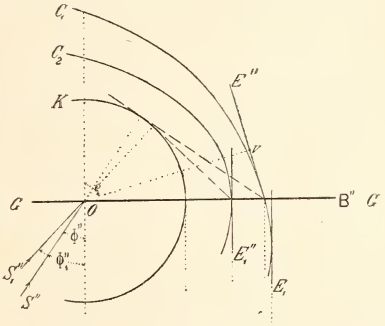

Fig. 8 a.

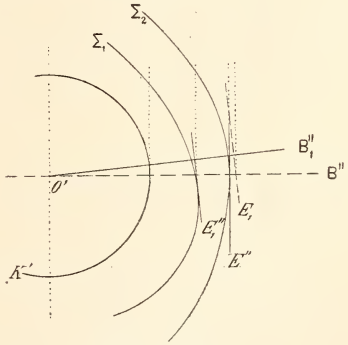

Fig. 8 b.

$$N_s'' = N_0 \sin \Phi''$$

nicht den Brechungsindex derselben angibt, sondern ihre Spur mit der Grenzebene.

In der Fig. 8 a ist ebenfalls mit der Tangente E_1 eine zur Grenzebene G normale Wellenebene angegeben, deren Polarisationsebene auf die Grenzebene G selbst fällt; und in der schon ge-

sehenen Fig. 2 ist die Konstruktion gegeben, wie die Richtung B_1'' der Einfallsebene sich ergeben kann, wo die Wellenebene E_1 Fig. 8 a, 8 b dieser Bedingung Genüge leistet. — Die Konstruktion selbst lehrt uns, daß eine einzige dieser Wellenebenen möglich ist. — Auch in der Horizontalprojektion Fig. 8 b ist die Spur der Wellenebene E_1 sichtbar und die Richtung B_1'' normal zu dieser: natürlich ist E_1 nicht tangent zur Kurve Σ_2, welche die Spur der Wellenfläche ist, da E_1 nicht eine der Totalreflexion entsprechende Wellenebene sein kann. —

Einmal die Wellenebene E_1 gefunden, wird wohl auch ihre parallele Wellenebene E_1'' vorhanden sein müssen, welche die Eigentümlichkeit besitzt, daß die entsprechende Polarisationsebene zu derjenigen der Wellenebene E_1 normal und daher auf der Einfallsebene gelegen ist. — In der Fig. 8 a und Fig. 8 b, Vertikal- und Horizontalprojektion, ist die Wellenebene E_1'' durch eine zur Wellenfläche Tangente bezeichnet. — Aus dieser Bedingung der Wellenebene E_1'' geht hervor, daß der entsprechende Strahl und die gehörige Normale in der Grenzebene G G liegen, und daß infolgedessen E_1'' tangent zur Kurve Σ_1 ist, und der Erscheinung der Totalreflexion entspricht. — Und da die Wellenebene E_1'' zur Grenzebene senkrecht steht, also $\varrho = 90^0$ ist, ergibt sich der Ausdruck

$$n = N_0 \sin \Phi_1'',$$

wo n der Brechungsindex des Kristalls in der Richtung B_1'' der Einfallsebene ist. —

Indem wir auf die Fig. 1 zurückkommen, bemerkt man, daß in den vier Richtungen A, B', B'', Γ, und nur in diesen, Maxima und Minima der Totalreflexion existieren, deren drei A, B', Γ in die optischen Hauptebenen des Kristalls fallen und mit den entsprechenden Winkeln der Totalreflexion Φ_α, Φ', Φ_γ die Hauptbrechungsindizes geben. — Die vierte mit B'' bezeichnete Richtung der Maxima und Minima liegt der Richtung B_1'' ganz nahe, wo der Winkel der Totalreflexion Φ_1'' einen vierten Brechungsindex n des Kristalls bestimmt, so daß man im ganzen folgende vier Indizes durch die Totalreflexion erhält:

$$\alpha = N_0 \sin \Phi_\alpha,$$
$$\beta = N_0 \sin \Phi',$$
$$\gamma = N_0 \sin \Phi_\gamma,$$
$$n = N_0 \sin \Phi_1''.$$

Während die Zunahme des Winkels der Totalreflexion gleich Null ist für die Lage B'', muß sie ein Maximum sein für die Lage B_1'', da hier der Lichtstrahl mit der Wellennormalen in der Grenzebene liegt. — Es sei noch hervorgehoben, daß, wenn B'' und B_1'' nahe gelegene Richtungen sind, diese sich auf zwei Falten der Wellenfläche beziehen, die wir mit den Spurkurven Σ_1 Σ_2 bezeichnet haben. Wenn also der Winkel Φ'' der Richtung B'' auf die Spurkurve Σ_2, Fig. 8 b, sich bezieht, so entspricht der Winkel Φ_1'' der Richtung B_1'' der inneren Spurkurve Σ_1 und umgekehrt. —

Man kann daher den Schluß ziehen, daß die Richtung B_1'' die folgenden zwei Eigenschaften besitzt, durch welche sie auch erkannt werden kann:

1. Die Richtung B_1'' liegt ganz nahe der Richtung B'',
2. die Zunahme des Winkels der Totalreflexion in der Nähe der Richtung B_1'' ist ein Maximum.

Wenn wir einen Blick werfen auf die Lage von B', wo die Zunahme des Winkels der Totalreflexion ebenfalls gleich Null ist wie in B'', so bemerkt man auf der andern Falte der Wellenfläche in der Nähe der Richtung B' einen Punkt B_1', wo die Zunahme des Winkels der Totalreflexion nicht ein Maximum erreicht, oder nicht ein scharfes Maximum wie in B_1'', denn dort ist die Wellennormale und der entsprechende Lichtstrahl nicht in der Grenzebene gelegen. —

Mit diesem Merkmal wird es in sehr vielen Fällen möglich sein, die die Richtung B'' besitzende Eigenschaft von der Richtung B', welcher dieselbe fehlt, zu unterscheiden.

Ich ziehe einige Beispiele aus meinen Beobachtungen heraus. — Der Schnitt des Albits von Lakous ist parallel der Fläche (110). Die Maximal- und Minimalwerte der Winkel der Totalreflexion in den Richtungen B' und B'' sind in der folgenden Tabelle angegeben. Dabei sind auch die Zunahmen der Totalreflexionswinkel in der Nähe von B_1' und B_1'' berechnet. —

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich, daß in der äußeren Kurve und in der Richtung von B'' ein Maximum der Zunahme des Winkels Φ für $\omega = 1^0$ existiert, d. h. eine Zunahme von 9,6″; während in der inneren Kurve entsprechend der Richtung B' kein Maximum der Zunahme des Winkels Φ vorkommt. Ein Maximum findet man erst bei dem Azimute von 100° ca. Dies erlaubt den Schluß zu ziehen, daß die Richtung B' diejenige ist, die in der

Horizontal-Azimut ω	Innere Grenzkurve Vertikalkreis Winkel Φ	Zunahme $\frac{\Phi}{\omega}$	Äußere Grenzkurve Vertikalkreis Winkel Φ	Zunahme $\frac{\Phi}{\omega}$
100°	B_1' 54°03′55″	8,8″	54°17″04″	
110	54 05 23	6,5	54 14 35	
120	54 06 28	4,0	54 13 38	
122	54 06 36	5,0	54 13 16	
129½	54 07 14	4,0	B' **54 13 0**	
130	54 07 16	2,0	—	
134	54 07 24	2,0	54 13 08	2,7″
137	54 07 30	2,0	54 13 16	9,6
143	B'' **54 07 42**	1,0	B_1'' 54 14 24	9,3
152	54 07 24	5,9	54 15 48	8,2
160	54 06 37		54 17 54	17,6
170	—	—	54 20 50	

Ebene der optischen Achsen des Kristalls liegt, und daß die Richtung B'' diejenige ist, welche von der Berechnung der Hauptindizes ausgeschlossen werden muß. — Der Winkel der Totalreflexion

$$\Phi_1'' = 54^0 14' 24'',$$

kann somit für die Berechnung eines Brechungsindex nach der Formel

$$n = N_0 \sin (54^0 14' 24'')$$

verwendet werden.

Da nun aus den früheren Bestimmungen sich ergeben haben:

$$\Phi_\alpha = 53^0 59' 45'' \text{ und } \Phi_\gamma = 54^0 29' 20''$$

und $N_0 = 1{,}89010$, so liefert der Schnitt (110) des Albits von Lakous mit Hilfe der Totalreflexion folgende vier Brechungsverhältnisse des Na-Lichtes:

$$\alpha = N_0 \sin (53^0 59' 45'') = 1{,}5290,$$
$$\beta = N_0 \sin (54\ 13\ \ 0\ ) = 1{,}5333,$$
$$\gamma = N_0 \sin (54\ 29\ 20\ ) = 1{,}5386,$$
$$n = N_0 \sin (54\ 14\ 24\ ) = 1{,}5338.$$

Für den Albit von Amelia Co. (Virginia) verfügte ich über zwei zu (010) normale und parallele Schliffe, und so wäre es hier nicht angebracht, die Unsicherheit in Betracht zu ziehen, die aus einem einzigen Schliff entstehen kann, da einer den anderen er-

gänzt. — Immerhin betrachten wir einmal die Winkel der Totalreflexion eines derselben, und zwar des zu (010) Normalen, wie sie in folgender Tabelle dargestellt sind:

Horizontal-Azimut ω	Innere Grenzkurve Vertikalkreis Winkel Φ	Innere Grenzkurve Zunahme $\frac{\Phi}{\omega}$	Äußere Grenzkurve Vertikalkreis Winkel Φ	Äußere Grenzkurve Zunahme $\frac{\Phi}{\omega}$
50°	54° 11′ 18″		54° 24′ 36″	
60	54 11 24	0,6″	B_1' 54 21 24	19,2″
67	B' **54 11 24**	0,0	54 17 42	31,9
70	54 11 12	4.0	54 16 30	24,0
80	54 09 48	8.4	54 12 18	25,2
87	54 07 23	20,0	B'' **54 12 00**	2,6
90	B_1'' 54 06 06	28,0	54 12 00	0,0
100	54 02 24	22,2	54 12 18	1,8
110	54 00 36	10,8	—	—

Hier kommt ein Maximum der Zunahme von Φ in der Stelle von B_1'' zutage, d. h. von 28,0″ für $\omega = 1^0$. — Gestehen muß man allerdings, daß in diesem Fall ein Maximum der Zunahme auch in der Nähe von B' in der äußeren Kurve erscheint, nämlich von 31,9″ für $\omega = 1^0$. Aber das Maximum der Zunahme von 28,0″ in B_1'' ist schärfer als in der Richtung von B'. Der Winkel der Totalreflexion in der Stelle von B_1'' kann als das arithmetische Mittel von naheliegenden Werten 54° 7′ 23″ und 54° 6′ 6″ gelten, d. h. $\Phi_1'' = 54^0\, 6'\, 44''$. Infolge davon ergeben die vier mit der Totalreflexion im Schliff $\perp$ zu (010) des Albits von Amelia Co. bestimmten Indizes, wie folgt, da $N_0 = 1{,}89040$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= N_0 \sin(53^0\, 59'\ \ 6'') = 1{,}5291, \\ \beta &= N_0 \sin(54\ \ 11\ \ 24\ \ ) = 1{,}5331, \\ \gamma &= N_0 \sin(54\ \ 30\ \ 48\ \ ) = 1{,}5393, \\ n &= N_0 \sin(54\ \ \ 6\ \ 44\ \ ) = 1{,}5315. \end{aligned}\right\} \text{für Na-Licht.}$$

Als drittes Beispiel will ich noch den Albit von Prägraten anführen. —

Die Winkel der Totalreflexion bei diesem Albit, von dem man nur über einen // (001) orientierten Schliff verfügt, sind in der folgenden Tabelle in der Nähe der Richtungen B' und B'' wiedergegeben:

Horizontal-Azimut ω	Innere Grenzkurve Vertikalkreis Winkel Φ	Zunahme $\frac{\Phi}{\omega}$	Äußere Grenzkurve Vertikalkreis Winkel Φ	Zunahme $\frac{\Phi}{\omega}$
10°	54° 01′ 54″	11,4″	54° 15′ 12″	2.4″
20	54 03 48	13,8	54 14 48	7,8
30	54 06 06	38,0	54 13 30	4,3
37	B_1″ 54 10 30	38,0	B″ **54 13 00**	2,0
40	54 12 24	7,8	54 13 06	21,6
50	54 13 42	0,0	54 16 42	27,0
52	B' **54 13 42**	0,7	B_1′ 54 17 36	30,7
60	54 13 36	0,6	54 21 42	25,4
70	54 13 30	1,2	54 25 54	27,6

Auch in diesem Falle springt deutlich das Maximum der Zunahme von Φ in B_1'' nahe der Lage von B'' in die Augen, während ein deutliches Maximum für Φ in der Nähe von B' fehlt. — Infolgedessen wird man annehmen, daß die Richtung von B' in der Ebene der optischen Achsen liegt, wie man in der Tat auch früher angenommen hat. — Das Maximum von $\frac{\Phi}{\omega}$ tritt ein, für den Winkel der Totalreflexion $\Phi = 54^0\, 10'\, 30''$. —

Wenn wir nun die schon früher bestimmten Werte von Φ_α und Φ_γ in Betracht ziehen, bekommt man die folgenden vier Indizes, welche der Schliff (001) des Albits von Prägraten zu liefern vermag:

$$\alpha = N_0 \sin (54^0\, 01'\, 54'') = 1{,}5300,$$
$$\beta = N_0 \sin (54\ 13\ 42\ ) = 1{,}5338,$$
$$\gamma = N_0 \sin (54\ 33\ 24\ ) = 1{,}5401,$$
$$n = N_0 \sin (54\ 10\ 30\ ) = 1{,}5328.$$

Man kann ferner hervorheben, daß der Ausdruck

$$N_s'' = N_0 \sin \Phi''$$

zwar nicht das Brechungsverhältnis der Wellenebene E″, Fig. 8 a, liefert, da diese Wellenebene zur Grenzebene schief steht, aber dennoch annäherungsweise das Brechungsverhältnis der Wellenebene E_1 gibt, oder vielmehr ist er etwas kleiner als dieses; allerdings gehört die Wellenebene E_1 nicht zur Erscheinung der Totalreflexion.

Wir haben demnach zwei Brechungsverhältnisse der Richtung B_1'' dadurch bestimmt, nämlich

$$N_s'' = N_0 \sin \Phi'',$$
$$n = N_0 \sin \Phi_1'',$$

von denen das erste nur ein Annäherungswert, das zweite aber genau ist.

Was die Polarisationsebenen anbelangt, so ist diejenige, deren Welle das Brechungsverhältnis n besitzt, parallel der Einfallsebene, und die für die zweite Welle derselben Richtung, deren Brechungsverhältnis N_s'' ist, steht zur Einfallsebene senkrecht und fällt mit der Grenzebene zusammen. —

Bei der Konstruktion des Indexellipsoides wird also N_s'' auf der Normalen der Grenzebene aufgetragen, n in einer zu B_1'' senkrechten und in der Grenzebene liegenden Richtung. — Aus der Gleichung des Indexellipsoides wird also folgen:

$$\frac{\cos^2 \zeta_1}{\alpha^2} + \frac{\cos^2 \zeta_2}{\beta^2} + \frac{\cos^2 \zeta_3}{\gamma^2} = \frac{1}{\varrho^2},$$

wobei

$$\cos^2 \zeta_1 = \operatorname{cotg} A\Gamma \,.\, \operatorname{cotg} B'A,$$
$$\cos^2 \zeta_2 = \operatorname{cotg} B'A \,.\, \operatorname{cotg} \Gamma B',$$
$$\cos^2 \zeta_3 = \operatorname{cotg} \Gamma B' \,.\, \operatorname{cotg} A\Gamma,$$

zu setzen ist. Dann hat man eine brauchbare Kontrolle $N_s'' = \varrho$.

Für die Kontrolle kann auch das Brechungsverhältnis n benutzt werden, indem man setzt

$$\frac{\cos^2 \zeta_1'}{\alpha^2} + \frac{\cos^2 \zeta_2'}{\beta^2} + \frac{\cos^2 \zeta_3'}{\gamma^2} = \frac{1}{\varrho^2},$$

wobei

$$\cos \zeta_1' = \sin \zeta_1 \cos (B''A),$$
$$\cos \zeta_2' = \sin \zeta_2 \cos (B''\Gamma),$$
$$\cos \zeta_3'' = \sin \zeta_2 \cos (B''B'),$$

zu setzen ist. Und man hat als Kontrolle $n = \varrho$.

Wir haben hier, um B' von B'' zu unterscheiden, eine einfache Methode kennen gelernt, welche auf dem Maximum des Verhältnisses $\frac{\Phi}{\omega}$ beruht, das durch eine einfache Berechnung und eine genaue Beobachtung der Winkel der Totalreflexion in der Nähe der Richtungen B' und B'' der inneren und äußeren Grenzkurve erreicht wird. — Bei dieser Betrachtung sind wir zugleich zu der Erkenntnis gekommen, daß ein Kristallschnitt fünf Brechungsverhältnisse durch die Totalreflexion zu liefern vermag,

wovon eines derselben nur annäherungsweise bestimmt ist. — Mit Hilfe der drei Hauptindizes kann man nun die übrigen zwei berechnen und mit den beobachteten vergleichen. — Damit hat die vorgeschlagene Methode eine scharfe Kontrolle. — Allerdings ist damit die Zweideutigkeit der Aufgabe nicht aufgehoben, wenn der Kristallschnitt nahe der Ebene der optischen Achsen ausgeführt ist. —

Wir werden aber bald eine Beobachtungsmethode kennen lernen, welche einen Zweifel nie zuläßt. —

Zwei verschiedene Beobachtungsmethoden können angewandt werden, um die Zweideutigkeit der fraglichen Aufgabe aufzuheben, d. h. um die Richtungen B' und B'' zu erkennen. — Eine dieser Methoden besteht, wie ich schon nachgewiesen habe, in der Beobachtung der Polarisationsebene der zwei genannten Richtungen; die Richtung B' hat als Polarisationsebene eine gegen die Einfallsebene geneigte Ebene, es ist die Ebene der optischen Achsen, in der die Richtung B' enthalten ist; die Polarisationsebene der Richtung B'' ist normal zur Einfallsebene. — Man wird am besten streifende Beleuchtung anwenden und man schiebe in das Einfallslicht ein Nicol ein, wie Pockels vorgeschlagen hat. Schwietring bildet sich hingegen ein, daß ich keine streifende Beleuchtung angewandt habe, nur deshalb, weil ich dies nicht besonders hervorgehoben habe. —

Aber diese Beobachtungsmethode hat den Nachteil, daß das Auge nicht imstande ist, die Lage des Nicols im Einfallsstrahl genau zu schätzen, damit die Grenze der Totalreflexion in der Lage B'' in der inneren oder äußeren Kurve wahrgenommen werden könne; ein vor das Okular gestellter Analysator verbessert z. T. diesen Mangel, aber es haftet ihm ein anderer an, nämlich daß er das Gesichtsfeld verdunkelt. — Einen zweiten Fehler weist diese Methode auf, indem durch die Unsicherheit der Lage der Polarisationsebenen die Richtung B' sich nicht deutlich von der Richtung B'' abhebt, wenn nämlich die Grenzebene in die Nähe der Ebene der optischen Axen fällt, denn in diesem Fall hat B' die Polarisationsebene sehr nahe an der zur Einfallsebene Normalen. — Die oben erwähnten Nachteile sind vollständig ausgeschlossen bei einer anderen, ebenfalls zur Beobachtung gehörenden Methode. —

Diese Methode besteht darin, den Kristallschliff im konvergenten Licht mittels eines Konoskops oder eines Mikroskops zu beobachten. — Ich verlange von einem solchen Instrument, daß die Kondensorlinse einen größeren Brechungsindex habe als der Kristall, so daß alle Strahlen mit dem Brechungswinkel von 0—90° von dem Immersionsokular aufgenommen werden können. — Der Kristallschliff liege natürlich auf dem Kondensor vermittelst einer stark brechenden Flüssigkeit (z. B. Bromnaphtalin). Zu diesem Zwecke kann, anstatt eines Konoskops oder eines Mikroskops, der Refraktometer selbst in Anwendung kommen, mit dem geeigneten Objektiv und Zubehör, wie sie C. Klein oder F. Pearce vorgeschlagen haben[1]. —

Die Figur, welche man in konvergentem Licht beobachten wird, ist die einer Hyperbel, deren Zweige sich drehen werden um die Pole der optischen Achsen gemäß der Drehung des Präparates in seiner Ebene; die Asymptoten der Hyperbel werden immer parallel bleiben zu den orthogonalen Richtungen der beiden Nicols.

In der Fig. 9 ist die Figur in konvergentem Licht (stereographische Projektion) angegeben für sechs Lagen des Präparates in bezug auf die Hauptrichtungen der Nicols. In No. 1 derselben ist die Ebene der optischen Achsen parallel zu einer Richtung der Nicols; in No. 2 bildet die Spur der Ebene der optischen Achsen 20° mit der Richtung der Nicols; in No. 3 ist das Präparat um 40° gedreht worden in bezug auf die Lage von No. 1; in No. 4, 5, 6 betragen die Drehungen 70°, 120°, 130°. — Gemäß der Drehung des Präparats von No. 1 bis zu No. 3 nähert sich die Horizontalasymptote dem Mittelpunkt des Gesichtsfeldes und in der Lage von No. 3 geht sie durch den Mittelpunkt; wenn wir dann die Drehung des Präparates fortsetzen, so entfernt sich die Horizontalasymptote vom Mittelpunkt des Gesichtsfeldes, während sich die Vertikalasymptote demselben nähert, bis in der Lage der No. 6

---

[1] C. Klein, Totalreflektometer und Fernrohrmikroskop. K. preuß. Akad. d. Wissensch. Berlin 1902. 653. Zeitschr. f. Krist. **39**. 627. — R. Fuess, Katalog No. 132. p. 44. Fig. 63. — H. Rosenbusch und E. A. Wülfing, Mikroskopische Physiographie etc. Stuttgart 1904. p. 221. — L. Duparc et F. Pearce, Traité de technique minéralogique et petrogr. Leipzig 1907. p. 410. Fig. 459. — Société genévoise pour la construction d'instr. phys. etc. Genève. Katalog 1907. No. 2190–2191.

die Vertikalasymptote durch das Zentrum geht. Wenn eine Asymptote der Hyperbel durch das Zentrum geht, wie in No. 3 und 6, so bezeichnet sie eine zum Schliff parallele Richtung im Kristall, deren Polarisationsrichtungen zu den Hauptrichtungen des Nicols parallel liegen; dies ist aber die Richtung B_1'', die den oben angegebenen Bedingungen genügt. —

Wenn man also das Präparat in konvergentem Licht beobachtet und es so einrichtet, daß eine Asymptote der Hyperbel durch den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes geht, gibt diese die Richtung von B_1'', welche annähernd mit B'' übereinstimmt,

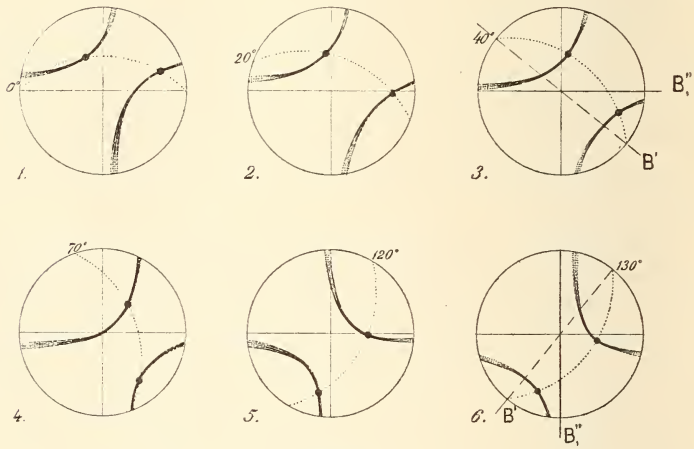

Fig. 9.

während die Richtung von B' in die Spur der Ebene der optischen Achsen fällt und deshalb immer hervorgehoben und erkannt werden kann. —

Die hier angegebene Beobachtungsmethode, vermittelst welcher man imstande ist, die durch das Auftreten der zwei Richtungen B' und B'' entstehende Zweideutigkeit der Aufgabe zu beseitigen, hat einen hervorragenden Vorteil über die oben besprochenen Methoden, nämlich daß sie nicht nur sehr einfach und praktisch ist und die Lösung der Aufgabe sichert, sondern daß sie auch eindeutig die Frage der optischen Orientierung löst, was bei allen anderen Methoden nicht möglich ist. — In der Tat, wenn man die bekannten Methoden anwendet, so hebt man die Zweideutig-

keit der optischen Orientierung nicht auf, da auch, wenn einmal die zwei Richtungen B' und B'' erkannt worden sind, dennoch zwei verschiedene Orientierungen der Richtungen X, Y, Z möglich sind, was man bis jetzt nicht in Erwägung gezogen hat. —

Die Fig. 10 gibt die zwei möglichen Lagen der optischen Hauptrichtungen des Kristalls für die gleichen beobachteten Richtungen A, B', B'', Γ, worin die Richtungen B' und B'' die nämliche

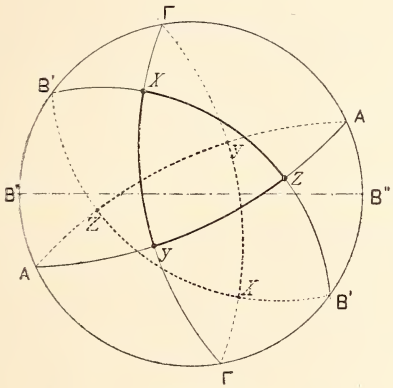

Fig. 10.

Bedeutung haben. Eine Lage derselben geht aus der anderen hervor durch eine Drehung von 180° um die Normale der Grenzebene, oder, was dasselbe ist, beide Orientierungen sind symmetrisch in bezug auf die Grenzebene. — Die hier vorgeschlagene Methode, wo konvergentes Licht in Anwendung kommt, löst natürlich die Aufgabe vollständig, da die Lage der optischen Achsen deutlich zum Vorschein kommt. —

Zusammenfassung.

In gegenwärtiger Arbeit habe ich bewiesen, daß in vielen Fällen die Frage der Bestimmung der Hauptindizes eines Kristalles durch die Totalreflexion mit einem einzigen beliebigen Schnitt lösbar ist. — Durch die einzelnen Methoden ergeben sich nicht nur die Hauptbrechungsindizes des Kristalls, sondern auch die Orientierung des Schnittes in bezug auf die optischen Hauptrichtungen. — Aber wie auch die Methoden ändern, so bleibt doch ein Prinzip aufrecht erhalten, d. h., daß von den zwei Rich-

tungen B' und B'', auf welche sich die Zweideutigkeit der Frage stützt, eine derselben sich von der anderen unterscheidet, indem sie als Polarisationsebene eine zu der Einfallsebene normale Ebene besitzt. — Auch die neue SCHWIETRING'sche Methode gründet sich auf dasselbe Prinzip. —

Wenn man jetzt zur Frage übergehen will, welche von allen diesen Methoden diejenige ist, die in der Praxis vorgezogen werden muß, so müssen wir in Erwägung ziehen, welche derselben die Aufgabe vollständig löst und zugleich die einfachste ist, denn die Bestimmung der Hauptindizes eines Kristalls aus einem einzigen Schnitt ist meistens eine dem Kristallographen, Mineralogen und Petrographen zukommende Aufgabe, und man kann nicht verlangen, daß sie die Zeit mit schweren Rechnungen oder komplizierten Zeichnungen verlieren; sie ziehen natürlich vielmehr die direkte Beobachtungsmethode vor. — Nun, von allen Methoden ist nur eine hier völlig klar auseinandergesetzt worden, welche unsere allgemeine Aufgabe vollständig, eindeutig und einfach löst: das ist die Beobachtungsmethode, wo das konvergente Licht zu Hilfe genommen wird. — Mit derselben ist man immer imstande, die zwei Richtungen B' und B'' zu unterscheiden, wie auch der Kristallschnitt gelegt sein mag, und genau die eindeutige Orientierung der optischen Hauptrichtungen festzustellen. —

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie

Jahr/Year: 1912

Band/Volume: 1912_2

Autor(en)/Author(s): Viola Carlo Maria

Artikel/Article: Die Erscheinung der Totalreflexion zwischen einem isotropen Körper und einem Kristall, sowie eine neue Methode, die drei Hauptbrechungsverhältnisse aus einem beliebigen Schnitt zu bestimmen, 45-66