Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1891.)

Das Gleichungspolynom eines Elementes eines linearen Raumes ist eine lineare Form; hängen die Coefficienten dieser Form von einer Anzahl willkürlich veränderlicher Parameter ab, so beschreibt das Element eine Mannigfaltigkeit. Differentiirt man die Form nach diesen Parametern, so erhält man neue lineare Formen und kann nun infinitesimale invariante Bildungen der gegebenen Mannigfaltigkeit als simultane Invarianten dieses Systems linearer Formen aufstellen.

Aber auch, wenn das lineare Polynom von dem Elemente eines quadratischen Raumes herrührt, wird man diese Methode anwenden können, wie dies in der vorliegenden Arbeit für Strahlencongruenzen, der zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit gerader Linien, geschieht. Zu einem Congruenzstrahl gesellen sich dann sofort zwei lineare Complexe als infinitesimale Covarianten, die Begleitcomplexe des Strahles genannt werden. Sie stehen in einfacher Beziehung zu den Inflexionstangenten der Brennfläche in den Brennpunkten eines Strahles; ihr Doppelverhältniss ist bei Normalencongruenzen eine Grösse dritter Ordnung, welche bei Weingarten'schen Flächen (bei welchen ein Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen ist) den Werth 1 hat und bei Flächen zweiter Ordnung den Werth 9. Dieses Doppelverhältniss steht zudem in einfachem Zusammenhange mit den Krümmungsmassen der Centrafläche in den beiden Hauptkrümmungscentren einer Normale, durch welche Relation ein Halphén'scher Satz über Weingarten'sche Flächen verallgemeinert wird. Auch die Flächenberührung dritter Ordnung wird hiebei in Behandlung gezogen und Herrn Hermite's Resultaten über die Berührung dritter Ordnung von Flächen zweiter Ordnung eine neue Auffassung und Erweiterung gegeben.

Zur Betrachtung der Normalensysteme der Centrafläche werden allgemeinere Congruenzen behandelt, Congruenzen von Centralstrahlen; hierbei ergeben sich unter anderem Herrn Mannheim's Beziehungen der Krümmungsgrössen der Centrafläche.

§. 1. Brennlinien und Inflexionstangenten eines Strahles.

1. Es sei

$$a \equiv \sum_{\varkappa=1}^{6} a_\varkappa x_\varkappa = (ax) = 0$$

die Gleichung einer Geraden, wobei die $x_\varkappa$ als Klein'sche Liniencoordinaten der Relation $\Sigma(x_\varkappa)^2 = (xx) = 0$ genügen und ebenso die $a_\varkappa$ der Relation $(aa) = 0$. Hängen die $a_\varkappa$ von zwei willkürlich veränderlichen Parametern u, v ab, so beschreibt die Gerade eine Strahlencongruenz, und man hat in der Umgebung eines allgemeinen Strahles a die Gleichung:

$$0 = a + (b\,du + c\,dv) + \frac{1}{2}(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2) + \qquad 1)$$

Die b, c, e, f, g sind Differentialquotienten von a bezüglich u, v und hängen demnach linear von den x ab; daher sind $b, c, e, f, g = 0$ Gleichungen linearer Complexe. Zwischen den Coordinaten dieser Complexe müssen, wenn 1) für alle Werthe du, dv eine Gerade und nicht einen linearen Complex vorstellen soll, die Relationen bestehen:

$$\left.\begin{array}{c} (aa), (ab), (ac) = 0 \\ (bb)+(ae), (bc)+(af), (cc)+(ag) = 0 \end{array}\right\}, \qquad 2)$$

welche man auch durch Differentiation der Identität $(aa) = 0$ erhalten kann.

2. Wird a von der benachbarten Geraden $a' = a + da$ geschnitten, so muss[1]

$$\Sigma da_{\varkappa}^2 = 0$$

sein, also hier, da $da = b\,du + c\,dv$ ist, die Bedingung

$$(bb)\,du^2 + 2(bc)\,du\,dv + (cc)\,dv^2 = 0 \qquad 3)$$

erfüllt sein; es gibt daher zwei Nachbarschnittgerade a_1, a_2.

Die letzte Gleichung erhält man auch zur Bestimmung der singulären Complexe des Büschels $b\,du + c\,dv = 0$. Sind α_ν $(\nu = 1,2)$ die Wurzeln der Gleichung

$$(bb)\alpha^2 + 2(bc)\alpha + (cc) = 0\,, \qquad 3')$$

so sind $b\alpha_\nu + c = 0$ die Gleichungen dieser beiden Complexe. Weil (ab), $(ac) = 0$ ist, schneiden die Axen A_ν dieser Complexe die Gerade a, und zwar schneide A_1 in dem Punkte 1 und sei mit a durch die Ebene I verbunden; A_2 liefere analog den Punkt 2 und die Ebene II.

Man kann speciell das Parametersystem u, v so wählen, dass man mit $u =$ const. oder $v =$ const. developpable Regelflächen der Congruenz beschreibt, dass also $du = 0$ und $dv = 0$ die schneidenden Nachbarstrahlen liefern; dann ist überall (bb), $(cc) = 0$, und die Axen A_ν sind identisch mit den Complexen b, c. Nach den Formeln 2) ist hier überall (ae), $(ag) = 0$, und man erhält ferner durch Differentiation auch (be), (bf), (cf), $(cg) = 0$.

3. Die beiden Strahlenbüschel (1, II), (2, I) enthalten die den Complexen $a, b, c = 0$ gemeinsamen Strahlen, welche demnach auch in den Complexen

$$0 = a + da = a + b\,du + c\,dv$$

liegen. Daher schneidet jeder zu a benachbarte Strahl der Congruenz alle Strahlen der beiden Büschel. Da ferner jede Gerade des Büschels, welche a und A_1 enthält, durch die Gleichung $\lambda a + \alpha_1 b + c = 0$ dargestellt ist, so liegt die Nachbarschnittgerade $a_1 \equiv a + \alpha_1 b + c = 0$ in diesem Büschel. Es folgt also, dass 1, 2 die Schnittpunkte, I, II die Verbindungsebenen von a mit den

[1] Siehe F. Klein, Differentialgleichungen in der Liniengeometrie. Math. Annal., Bd. V, S. 293.

Nachbarschnittgeraden sind: Brennpunkte und Brennebenen des Strahles a.

Die drei Complexe $a, b, c = 0$ haben demnach eine in zwei Strahlenbüschel zerfallende Regelschaar gemein, deren Strahlen die Tangenten der Brennfläche in den Brennpunkten 1 und 2, die Brennlinien, sind. Diese Brennlinien schneiden also alle Nachbarstrahlen von a, wesshalb man sagen kann, dass letztere einer unendlich dünnen Regelschaar angehören. Zu dieser Regelschaar gehören auch noch die Strahlen der Büschel (1,I) und (2,II), da diese Strahlen alle Brennlinien schneiden; diese Strahlen sollen Centralstrahlen des Strahles a genannt werden. Die Leitschaar dieser Regelschaar besteht aus allen Brennlinien und aus den unendlich nahen Geraden von a, welche alle Centralstrahlen schneiden.

Ich will nun die Gesammtheit der unendlich nahen Strahlen eines Strahles einer Congruenz als Strahlengarbe bezeichnen (eine Garbe von Halmen an zwei Stellen, den Brennpunkten, geknotet) und spreche dann von den Brennpunkten und Brennebenen dieser Garbe, ihren Brenn- und Centrallinien. Zu jeder Garbe gehört eine conjugirte Garbe; die Brennlinien der einen Garbe sind Centrallinien der anderen; zwei Strahlen conjugirter Garben schneiden einander.

Jeder lineare Complex, welcher alle Garbenstrahlen enthält, enthält auch alle Centrallinien und umgekehrt; die Brennlinien sind für ihn paarweise in Involution, und er ist ferner in Involution zu jedem Complex, welcher die Brennlinien enthält.

Die Axen $A_2 = \alpha_2 b + c$ sind Centrallinien, da sie alle Brennlinien schneiden müssen; für die speciellen Developpablenparameter (Art. 2) sind demnach $b, c = 0$ Centrallinien.

4. Der soeben gefundene Satz kann noch in folgender Weise erhalten werden. a schneide eine Ebene E in einem Punkte $\mathfrak{a}$, der Garbenstrahl a' in dessen Nachbarpunkt $\mathfrak{a}'$. Die Coordinaten dieser Durchstosspunkte in der Ebene E können nun als Parameter u, v gewählt werden. Wenn dann in der Gleichung $\Sigma a_\varkappa(u, v) x_\varkappa = 0$ die $x_\varkappa$ festgehalten werden, so erhält man für $a_\varkappa$ die Coordinaten aller Congruenzstrahlen, welche die Gerade x schneiden, und die Gleichung $(ax) = 0$ stellt dann die Curve $\mathfrak{A}$ dar,

welche der Ort des Durchstosspunktes des Congruenzstrahles mit der Ebene E ist. Diese Curve geht einfach durch den Punkt $\mathfrak{a}$, wenn die Gerade x den Strahl a schneidet, sie hat in $\mathfrak{a}$ einen Doppelpunkt, wenn x auch den Complexen $(bx), (cx) = 0$ genügt. Es gibt also eine Regelschaar von Geraden, deren Curve $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$ einen Doppelpunkt hat. Diese Regelschaar besteht nothwendig aus den Brennlinien der Garbe; denn ist x eine Brennlinie, so wird deren Curve $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{a}$ einen Doppelpunkt haben, weil x alle Garbenstrahlen schneidet, und die Curve demnach alle Nachbarpunkte von $\mathfrak{a}$ enthält. Die Curve hat also einen Doppelpunkt, wenn die Gerade x die Brennfläche berührt und umgekehrt.

Wenn demnach die Gerade x die Brennfläche in zwei aufeinander folgenden Punkten berühren soll, so muss die Curve eine Spitze haben, d. h. es muss

$$\Gamma \equiv (fx)^2 - (ex)(gx) = 0$$

sein. Folglich: $\Gamma \equiv f^2 - e.g = 0$ ist die Gleichung eines Complexes zweiten Grades, welcher aus den Brennlinienbüscheln die Inflexionstangenten der Brennfläche ausschneidet.[1]

Die Axen A_v fallen zusammen, wenn die Discriminante der Differentialform 3) verschwindet, wenn also

$$\Delta = (bc)^2 - (bb)(cc) = 0\,;$$

dann fallen auch die Brennpunkte des Strahles a zusammen und die Brennebenen. Vermöge der Formeln 2) ist dann aber auch

$$(af)^2 - (ae)(ag) = 0\,,$$

wesshalb a dem Complexe Γ angehört, also Inflexionstangente ist. Daher ist $\Delta = 0$ die Differentialgleichung derjenigen Congruenzen, welche aus den Inflexionstangenten einer Fläche bestehen.[2]

---

[1] Auch jede Invariante der Differentialformen, welche in 1) auftreten, gibt einen infinitesimalinvarianten Complex des Strahles a; denn solch eine Invariante bleibt bei einer Veränderung der Parameter u, v und bei linearer Transformation der Strahlencoordinaten invariant.

[2] Vergl. Klein, a. a. O., S. 290.

§. 2. Projectivitäten in den Brennbüscheln.

5. Geht man von dem Strahle a zu dem benachbarten a', so schreitet der Brennpunkt 1 auf der Brennlinie $\mathfrak{t}_1$ nach $1'$, und die Brennebene I dreht sich hiebei um eine Brenntangente τ_2 des Punktes 2 nach I'. In analoger Weise erhält man für den Punkt 2 und die Ebene II die Brennlinien $\mathfrak{t}_2$, τ_1.

Die Geraden $\mathfrak{t}_1$, τ_2 schneiden die Gerade a, a'; sie schneiden auch, weil sie 1, $1'$ verbinden, respective in I, I' liegen, die Nachbarschnittgeraden a_1, a'_1, welche a, respective a', schneiden. $\mathfrak{t}_1$, τ_2 sind demnach diejenigen beiden Geraden, welche a, a_1, a', a'_1 schneiden, also genügen sie den Gleichungen

$$a=0,\quad a_1\equiv a+\alpha_1 b+c=0,\quad a'\equiv a+b\,du+c\,dv=0,$$

aus welchen folgt, dass sie in den Complexen $a, b, c=0$ liegen. Hieraus kann man nebenbei schliessen, dass die Nachbarpunkte $1'$ in den Brennebenen liegen, dass also der Ort der Brennpunkte von den Brennebenen berührt wird.

Die Geraden $\mathfrak{t}_1$, τ_2 befriedigen aber noch die vierte Gleichung:

$$a'_1\equiv a_1+da_1=a+\alpha_1 b+c+b\,.\,du+c\,.\,dv+b\,.\,d\alpha_1+\\ +\alpha_1(e\,.\,du+f\,.\,dv)+f\,.\,du+g\,.\,dv=0,$$

demnach liegen sie in den vier Complexen $a, b, c=0$, $(\alpha_1 e+f)du+$ $+(\alpha_1 f+g)dv=0$. Analog liegen die Geraden $\mathfrak{t}_2$, τ_1 in den Complexen $a, b, c=0$, $(\alpha_2 e+f)du+(\alpha_2 f+g)dv=0$.

Lässt man a' in der Garbe variiren, so beschreiben $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \tau_1, \tau_2$ projective Strahlenbüschel, welche auf die Garbe projectiv bezogen sind. Zwischen den vier Tangenten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, τ_1 τ_2 bestehen demnach sechs Projectivitäten, die wir nun analytisch ausdrücken wollen.

6. Die Projectivitäten $P\equiv(\mathfrak{t}_1)\,\overline{\wedge}\,(\mathfrak{t}_2)$ und $\Pi\equiv(\tau_1)\,\overline{\wedge}\,(\tau_2)$. Für den Strahl $\mathfrak{t}_1$ des Brennbüschels (1) hat man die Gleichung:

$$(\alpha_1(e\mathfrak{t}_1)+(f\mathfrak{t}_1))\,du+(\alpha_2(f\mathfrak{t}_1)+(g\mathfrak{t}_1))\,dv=0$$

und für den Strahl $\mathfrak{t}_2$ des Büschels 2) die Gleichung:

$$(\alpha_2(e\mathfrak{t}_2)+(f\mathfrak{t}_2))\,du+(\alpha_2(f\mathfrak{t}_2)+(g\mathfrak{t}_2))\,dv=0;$$

daher wird die Projectivität P, wenn $(e\mathfrak{t}_1) = e_1$ gesetzt wird, vermittelt durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 e_1 + f_1, & \alpha_1 f_1 + g_1 \\ \alpha_2 e_2 + f_2, & \alpha_2 f_2 + g_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vermöge der Werthe von α_ν geht diese Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} (bb), & (bc), & (cc) \\ e_1, & f_1, & g_1 \\ e_2, & f_2, & g_2 \end{vmatrix} + \sqrt{\Delta}(e_1 g_2 + e_2 g_1 - 2 f_1 f_2) = 0.$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen $(\alpha_\nu e + f)\, du + (\alpha_\nu f + g)\, dv = 0$ mit $(bb)(\alpha_1 - \alpha_2)$ und setzt

$$\left.\begin{aligned} r &= (bb)(\alpha_1\alpha_2 e + (\alpha_1 + \alpha_2) f + g) = (cc)e - 2(bc)f + (bb)g \\ s^\nu &= (bb)(\alpha_\nu^2 e + 2\alpha_\nu f + g),\ du - \alpha_1 dv = du',\ du - \alpha_2 dv = dv' \end{aligned}\right\}, \quad 4)$$

so erhält man

$$r\, du' - s^1 dv' = 0, \quad s^2 du' - r\, dv' = 0. \qquad 5)$$

Aus 5) folgt dann für die Projectivität P

$$r_1 du' - s_1^1 dv' = 0, \quad s_2^2 du' - r_2 dv' = 0$$

und durch Elimination von du, dv die Gleichung:

$$r_1 r_2 - s_1^1 s_2^2 = 0. \qquad 6)$$

Für die Projectivität Π ergibt sich analog:

$$r_1 r_2 - s_2^1 s_1^2 = 0. \qquad 7)$$

Der Complex $r = 0$ schneidet aus den Brennbüscheln zwei Linien aus, welche Hauptbrennlinien des Strahles a genannt werden mögen. Es ist in Folge der Formeln 2):

$$(ar) = 2\Delta,\ (as^\nu) = -[(bb)\alpha_\nu^2 + 2(bc)\alpha_\nu + (cc)] = 0. \qquad 8)$$

Demnach sind $s^\nu = 0$ die Gleichungen derjenigen Complexe der Mannigfaltigkeit $e.du^2 + 2f.du.dv + g.dv^2 = 0$, welche die Gerade a enthalten.

7. Die Projectivitäten $J_\nu \equiv (\mathfrak{t}_\nu) \overline{\wedge} (\tau_\nu)$. Für die Strahlen $\mathfrak{t}_1$, τ_1 gilt respective:

$$(\alpha_1 e+f)\,du+(a_1 f+g)\,dv=0, \quad (\alpha_2 e'+f')\,du+(\alpha_2 f'+g')\,dv=0,$$

so dass man als Gleichung der Projectivitäten, wie oben, erhält:

$$\begin{vmatrix} (bb), & (bc), & (cc) \\ e, & f, & g \\ e', & f', & g' \end{vmatrix} \pm \sqrt{\Delta}(eg'+e'g-2ff')=0. \qquad 9)$$

Nun gilt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} (bb), & (bc), & (cc) \\ e, & f, & g \\ e', & f', & g' \end{vmatrix} = 0,$$

bei festem t_1 die Gleichung eines linearen Complexes, welcher die Gerade A_1 enthält und welcher auch die Gerade a enthält; denn für $x=a$ wird vermöge der Gleichungen 2) die letzte Zeile der Determinante der ersten gleich. Daher enthält dieser lineare Complex jede Gerade des Büschels 1), und die Gleichung besteht für beliebige t_1 und x, die dem Büschel angehören. Demnach reducirt sich die Gleichung 9), wenn wir voraussetzen, dass Δ nicht verschwindet, auf:

$$eg'+e'g-2ff'=0.$$

Dies ist aber die Polarbeziehung des Complexes $\Gamma=0$, wesshalb sich ergibt, dass die Beziehung zwischen t_1, τ_1 involutorisch ist, und dass ihre Doppelstrahlen in dem Complexe $\Gamma=0$ liegen. Da die in Γ liegenden Brennlinien nach Art. 4 Inflexionstangenten der Brennfläche sind, so folgt, dass **die Projectivitäten J_2 mit den Dupin'schen Tangenteninvolutionen der Brennpunkte identisch sind.** Dies Ergebniss ist auch von vornherein geometrisch klar; denn t_1 ist die Verbindungslinie von 1 mit seinem Nachbarpunkte 1', während τ_1 die Schnittlinie der Ebenen II, II' ist, II' ist aber die Tangentialebene des Punktes 1'.

Die Tangente a speciell ist conjugirt der Tangente, welche dem Complexe

$$(ae)g+(ag)e-2(af)f=0$$

angehört oder vermöge der Formeln 2) dem Complexe $r=0$. Daher sind **die Hauptbrennlinien des Strahles a** (siehe

Art. 6) die zu a conjugirten Tangenten der Brennfläche.

Diese beiden Hauptbrennlinien fallen zusammen, wenn das Quadrat der Matrix $|a\,b\,c\,r|$, welche aus den sechs Coordinaten der vier Complexe a, b, c, r gebildet ist, verschwindet.[1] Nun ist nach den Formeln 2)

$$H = |a\,b\,c\,r|^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & (ar) \\ 0, & (bb), & (bc), & (br) \\ 0, & (cb), & (cc), & (cr) \\ (ra), & (rb), & (rc), & (rr) \end{vmatrix},$$

daher ist vermöge Formel 8)

$$H = 4\Delta^3. \tag{10}$$

Durch Einführung der Complexe r, s^ν können die Gleichungen der Involutionen J_ν auch geschrieben werden:

$$rr' - s^1 s^{2\prime} = 0, \quad rr' - s^{1\prime} s^2 = 0.$$

8. Die Projectivitäten $P_1 \equiv (\mathfrak{t}_1) \overline{\wedge} (\tau_2)$ und $P_2 \equiv (\mathfrak{t}_2) \overline{\wedge} (\tau_1)$. P_ν ist gegeben durch

$$(\alpha_\nu e_1 + f_1) \,.\, du + (\alpha_\nu f_1 + g_1) \,.\, dv = 0$$
$$(\alpha_\nu e_2 + f_2) \,.\, du + (\alpha_\nu f_2 + g_2) \,.\, dv = 0$$

oder durch

$$\begin{vmatrix} \alpha_\nu^2, & -\alpha_\nu, & 1 \\ e_1, & f_1, & g_1 \\ e_2, & f_2, & g_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Da ferner die Geraden $\mathfrak{t}_1, \tau_2$ in dem ersten der Complexe 5) liegen, die Geraden $\mathfrak{t}_2, \tau_1$ im zweiten dieser Complexe, so sind die Projectivitäten P_ν auch dargestellt durch die Gleichungen:

$$s_1^\nu r_2 - s_2^\nu r_1 = 0.$$

Fallen für einen Strahl a die Projectivitäten P_ν zusammen, so muss $s_1^1 s_2^2 - s_1^2 s_2^1 = 0$ sein, dann ist aber auch vermöge der Gleichungen 6) und 7) $P \equiv \Pi$. Ist umgekehrt $P \equiv \Pi$, so ist auch $P_1 \equiv P_2$.

---

[1] Siehe Klein, a. a. O., S. 284.

§. 3. Die Begleitcomplexe.

9. Jeder Strahl, welcher in dem Büschel (1, I) liegt, also in dem Büschel, welches durch a und den schneidenden Nachbarstrahl a_1 bestimmt ist, wurde „Centralstrahl des Punktes 1" genannt; derselbe liegt in der Tangentialebene I des Punktes 2 der Brennfläche. Es soll nun gezeigt werden, dass die Centralstrahlen für alle Nachbarpunkte $1'$ des Punktes 1 in einem linearen Complexe liegen, oder aber, dass die Ebenen I' ihren Punkten $1'$ in einem Nullsysteme entsprechen. Hiezu ist bloss nothwendig, nachzuweisen, dass die Gerade $1, 1' = \mathrm{t}_1$ der Schnittgerade $\mathrm{I}, \mathrm{I}' = \tau_2$ bezüglich eines linearen Complexes conjugirt sei. Nun besteht nach dem letzten Artikel zwischen t_1 und τ_2 die Projectivität P_1. Ist t_1 mit a identisch, so auch τ_2, wie dies aus der Gleichung der Projectivität P_1 folgt (es ist nämlich dann:

$$(s^1 a)(r \tau_2) - (s^1 \tau_2)(ra) = 0,$$

weil aber nach Formel 8): $(s^1 a) = 0, (ra) \neq 0$ ist, so folgt $(s^1 \tau_2) = 0$ und $\tau_2 = a$), oder auch geometrisch: wenn 1 auf a weiterrückt, so dreht sich I um a.

In der Projectivität P_1 entspricht sich demnach der Strahl a selbst, wesshalb thatsächlich (nach Sylvester's Erzeugungsweise des linearen Complexes) entsprechende Strahlen conjugirte Polaren bezüglich eines linearen Complexes sind. Diesen Complex nennen wir den Begleitcomplex des Strahles a für den Punkt 1 und bezeichnen ihn mit C^1; er wird also erfüllt von den Strahlen der linearen Congruenzen, deren Leitlinien entsprechende Strahlen t_1, τ_2 sind. Ebenso ergibt sich aus der Projectivität P_2 der dem Punkte 2 zugehörige Begleitcomplex C^2.

Jeder der Begleitcomplexe enthält die Centralstrahlen der Garbe (a), er enthält daher nach Art. 3 auch alle Strahlen der Garbe (a). Der Begleitcomplex C^1 enthält ferner die Garbe $(\mathfrak{a})$ einer beliebigen, von Centralstrahlen gebildeten Congruenz $\mathfrak{C}$, daher enthält er auch nach Art. 3 die Centralstrahlen der Garbe $(\mathfrak{a})$, oder anders ausgedrückt: Die Nullebene des Complexes C^1 eines Brennpunktes eines Centralstrahles $\mathfrak{a}$ für die Congruenz $\mathfrak{C}$ berührt die Brennfläche der Congruenz $\mathfrak{C}$ im anderen Brennpunkte des Strahles $\mathfrak{a}$.

Wenn die Begleitcomplexe eines Strahles in einen zusammenfallen, so enthält dieser Complex die Nachbarschnittgeraden a'_1, a'_2 des Nachbarstrahles a', da diese Geraden Centralstrahlen der Nachbargarbe (a') sind; daher enthält dieser Complex auch alle Strahlen dieser Garbe (a'): Für Strahlen, deren Begleitcomplexe zusammenfallen, liegen die ∞^2 in zweiter Ordnung benachbarter Strahlen in diesem linearen Complexe und umgekehrt.

10. Die Gleichung des Complexes C^1 kann in folgender Weise bestimmt werden. Sind a und a' zwei sich schneidende Gerade, so ist $\lambda a + a_1 = 0$ die Gleichung einer beliebigen Geraden ihres Büschels; daher sind die Centrallinien des Punktes 1 gegeben durch die Gleichung (siehe Art. 5)

$$\lambda a + a_1 \equiv L(a, b, c) = 0,$$

die des Punktes 1′ durch

$$\mu a' + a'_1 \equiv L'(a, b, c) + (\alpha_1 e + f)\, du + (\alpha_1 f + g)\, dv = 0,$$

wobei L, L' linear aus a, b, c abgeleitet sind. Da nun die Coordinaten jedes der fünf Complexe $a, b, c, \alpha_1 e + f, \alpha_1 f + g$ die Determinante sechsten Grades $C^1 \equiv (a, b, c, \alpha_1 e + f, \alpha_1 f + g, x)$ annulliren, so geschieht dies auch für jeden aus diesen fünf Complexen linear abgeleiteten Complex, also auch für die Centrallinien. Demnach sind

$$C^1 \equiv (a, b, c, \alpha_1 e + f, \alpha_1 f + g) = 0 \qquad 11)$$

die Gleichungen der Begleitungscomplexe.

Um die Gleichungen der Begleitcomplexe auch in anderer Weise abzuleiten, bemerken wir, dass ein Begleitcomplex in Involution liegt mit jedem Complexe, welcher ein Paar seiner conjugirten Polaren t_1, τ_2 enthält. Diese Polaren liegen in den Complexen $a, b, c = 0$ und nach Art. 6 im Complexe $r\,du' - s^1 dv' = 0$. Variirt $du' : dv'$, so beschreibt dieser letzte Complex ein Büschel, und man erhält alle Geradenpaare t_1, τ_2; C^1 ist daher mit allen Complexen dieses Büschels in Involution, also auch zu den Complexen r, s^1. Man hat daher zur Bestimmung der Coordinaten des Complexes C^1 die Gleichungen:

$$(a C^1), (b C^1), (c C^1), (r C^1), (s^1 C^1) = 0.$$

Die Gleichung des Complexes C^{ν} ist daher:

$$C^{\nu} \equiv (a, b, c, r, s^{\nu}, x) = 0. \tag{12}$$

Diese Gleichungen der Begleitcomplexe besagen, dass sie beide zum Complexe r in Involution liegen; demnach sind die Hauptbrennlinien, welche der Schnitt von r mit den Complexen a, b, c sind, conjugirt bezüglich beider Complexe: Die Hauptbrennlinien sind die Leitlinien der den Begleitcomplexen gemeinsamen Strahlencongruenz, sie sind ein Paar entsprechender gemeinsamer Strahlen der beiden Projectivitäten P_{ν}; das andere Paar ist im Strahle a vereinigt.

Hienach ist der Begleitcomplex dadurch bestimmt, dass er die Hauptbrennlinien zu conjugirten Polaren hat, und dass er in Involution liegt zu einem der Complexe s^{ν}, oder wie man dies auch ausdrücken kann, dass die unendlich nahe conjugirte Polare seines Strahles a in einem der Complexe s^{ν} liegt.

11. Die Projectivitäten P_{ν}, aus welchen die Begleitcomplexe abgeleitet wurden, sind covariante Gebilde der Congruenz für den Strahl a. Die Invarianten der Begleitcomplexe werden daher infinitesimale Invarianten der Congruenz sein. Mit Hilfe der eingeführten Complexe r, s^{ν} gelingt es, einfache Ausdrücke für diese Invarianten aufzufinden.

Wir suchen zunächst die Bedingung dafür, dass die beiden Begleitcomplexe oder aber, dass die Projectivitäten P_{ν} zusammenfallen, oder, was nach Art. 8 dasselbe ist, dafür, dass die Projectivität P mit Π identisch ist. Die Coordinaten dieser Complexe sind die Unterdeterminanten der Glieder der s^1-, respective s^2-Columne der Determinante

$$T = (a, b, c, r, s^1, s^2);$$

sind also die Complexe identisch, so müssen diese Unterdeterminanten einander proportional sein, wesshalb die Determinante verschwindet. Ist umgekehrt diese Determinante $= 0$, so sind die entsprechenden Unterdeterminanten einander proportional, die Complexe daher identisch. $T = 0$ ist daher die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Begleitcomplexe oder die Projectivitäten P_{ν} zusammenfallen. Nun ist, wenn man die Gleichungen 4) benützt:

$$T = (bb)^2(a,b,c,(cc)e-2(bc)f+(bb)g, \alpha_1^2 e+2\alpha_1 f+g, \alpha_2^2 e+2\alpha_2 f+g) =$$

$$= 2(bb)^2 \begin{vmatrix} (cc), & -(bc), & (bb) \\ \alpha_1^2, & \alpha_1, & 1 \\ \alpha_2^2, & \alpha_2, & 1 \end{vmatrix} D,$$

wenn

$$D = (a, b, c, e, f, g)$$

gesetzt wird. Demnach ist

$$T = -8\Delta^{3/2}.D. \tag{13}$$

Wenn also für einen Congruenzstrahl nicht $\Delta = 0$ ist, d. h. wenn seine Brennpunkte nicht zusammenfallen, so können die Begleitcomplexe noch coincidiren, wenn $(abcefg) = 0$ ist und umgekehrt. Es gibt in jeder Congruenz ∞^1 solcher Strahlen oder es haben alle Strahlen diese Eigenschaft, dann genügt die Congruenz der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $(abcefg) = 0$. Solche Strahlen mit $D = 0$ sind nach Art. 9 diejenigen, für welche die in zweiter Ordnung benachbarten Strahlen demselben linearen Complexe angehören.

12. Die Invarianten $(C^1 C^1)$, $(C^1 C^2)$, $(C^2 C^2)$ der Begleitcomplexe, deren Verschwinden anzeigt, dass sie singulär respective zu einander in Involution liegen, lassen sich als Producte von Δ und von Determinanten dritten Grades darstellen Es ist

$$(C^\nu C^\nu) = |abcrs^\nu|^2, \quad (C^1 C^2) = |abcrs^1|.|abcrs^2|;$$

nun ist

$$(C^\nu C^\nu) = |abcrs^\nu|^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & (ar), & 0 \\ 0, & (bb), & (bc), & (br), & (bs^\nu) \\ 0, & (cb), & (cc), & (cr), & (cs^\nu) \\ (ra), & (rb), & (rc), & (rr), & (rs^\nu) \\ 0, & (s^\nu b), & (s^\nu c), & (s^\nu r), & (s^\nu s^\nu) \end{vmatrix}$$

Vermöge Formel 8) erhält man demnach:

$$(C^\nu C^\nu) = -4\Delta^2 |bcs^\nu|^2 \tag{14}$$

Ebenso erhält man:

$$(C^1 C^2) = -4\Delta^2 |bcs^1|.|bcs^2|. \tag{14'}$$

13. Die Bedingung dafür, dass die Begleitcomplexe einander berühren, d. h. dass die Leitlinien der ihnen gemeinsamen Congruenz zusammenfallen, ist:

$$B \equiv (C^1 C^2)^2 - (C^1 C^1)(C^2 C^2) = 0.$$

Fallen die Begleitcomplexe zusammen, so haben sie gewiss Congruenzen mit zusammenfallenden Leitlinien gemein, daher muss T Factor von B sein. Ausserdem muss der in Art. 7 gefundene Ausdruck H Factor von B sein, da sein Verschwinden anzeigt, dass die Hauptbrennlinien, die ja Leitlinien der Congruenz sind, zusammenfallen. In der That gilt,[1] da

$$T^2 = \begin{vmatrix} (aa) & & (as^2) \\ & & \\ & (s^1 s^1), & (s^1 s^2) \\ (s^2 a) & (s^2 s^1), & (s^2 s^2) \end{vmatrix}$$

ist, die Gleichung:

$$T^2 \frac{\partial T^2}{\partial (s^1 s^1) \partial (s^2 s^2)} = \frac{\partial T^2}{\partial (s^1 s^1)} \cdot \frac{\partial T^2}{\partial (s^2 s^2)} - \left(\frac{\partial T}{\partial (s^1 s^2)}\right)^2$$

oder

$$T^2 . |abcr|^2 = |abcrs^1|^2 . |abcrs^2|^2 - (|abcrs^1| \, |abcrs^2|)^2,$$

demnach:

$$B = -|abcr|^2 . |abcrs^1 s^2|^2 = -H . T^2 = -2^8 \Delta^6 D^2. \quad 15)$$

B ist mit Δ positiv, denn von den Coordinaten der reellen Geraden a sind, als der Relation $\Sigma(a_\varkappa)^2 = 0$ genügend, z. B. entweder drei reell und die drei übrigen rein imaginär, daher hat D den Factor i^3 und D^2 den Factor -1.

Das Doppelverhältniss δ der Begleitcomplexe, welches wir als „Doppelverhältniss des Strahles a" bezeichnen wollen, ist, wenn β_ν die Wurzeln der Gleichung:

$$(C^1 C^1)\beta^2 + 2(C^1 C^2)\beta + (C^2 C^2) = 0 \quad 16)$$

[1] Siehe Brioschi, Theorie der Determinanten, S. 9.

sind:

$$\delta = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{(C^1 C^2) - \sqrt{B}}{(C^1 C^2) + \sqrt{B}}$$

Als absolute Invariante der Begleitcomplexe wählen wir:

$$J = \left(\frac{\delta - 1}{\delta + 1}\right)^2 = \frac{B}{(C^1 C^2)^2} = - \frac{\Delta^2 D^2}{(|bcs^1||bcs^2|)^2}$$

14. Wählt man das Parametersystem u, v in der in Art. 2 angegebenen speciellen Weise, dass also $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = 0$ wird, so wird nach Formel 11)

$$C^1 \equiv (abcefx), \quad C^2 \equiv (abcfgx).$$

Es ist ferner $r = -2(bc)f$, so dass der Complex f die Hauptbrennlinien enthält.

Ferner ist

$$(C^1 C^1) = |abcef|^2 = (bc)^4 . (ee), \; (C^2 C^2) = |abcfg|^2 = (bc)^4 (gg)$$

$$(C^1 C^2) = |abcef| . |abcfg| = (bc)^3 [(bc)(eg) - (bg)(ec)].$$

Bei Congruenzstrahlen mit dem Doppelverhältnisse 1 wird $(abcefg) = 0$, daher sind die Determinanten der Matrix $|abcef|$ den entsprechenden Determinanten der Matricen $|abcfg|$ und $|bcefg|$ proportional. Die Begleitcomplexe fallen daher in den Complex $(bcefgx) = 0$ zusammen.

§. 4. Die Hauptbrennlinien und die Projectivitäten zwischen Nachbarstrahlen und Brennlinien.

15. Bleibt man bloss in dem Systeme der beiden Brennpunkte und Brennebenen, so ist ausser a keine weitere Brennlinie ausgezeichnet. Man muss, um das Brennbüschel durch einen Parameter darstellen zu können, noch Differentialquotienten zweiter Ordnung oder die e, f, g hinzunehmen. Dann sind es die Hauptbrennlinien, welche sich zunächst als ausgezeichnet darbieten.

Die Gleichungen dieser Hauptbrennlinien lauten, da diese Linien Leitlinien der den Begleitcomplexen gemeinsamen Congruenz sind:

$$\beta_\nu C^1 + C^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat aber, wie sich zeigen wird, den Factor D, welcher jetzt ausgeschieden werden muss, um auch für Congruenzen mit $D = 0$ die Gleichungen der Hauptbrennlinien zu haben.

Es ist

$$(C^1C^1)(\beta_1 C^1 + C^2) = (C^1C^1)C^2 - (C^1C^2)C^1 \pm \sqrt{B}\,C^1,$$

da nach Formel $\sqrt{B} = 2^4 i\Delta^3 D$ ist, muss also gezeigt werden, dass auch $(C^1C^1)C^2 - (C^1C^2)C^1$ die Determinante D zum Factor hat. Es ist nun vermöge der Gleichungen 14) und 14'):

$$\begin{aligned}(C^1C^1)C^2 - (C^1C^2)C^1 &= \\ &= -4\Delta^2\{|bcs^1|^2(abcrs^2x) - |bcs^1|\,|bcs^2|(abcrs^1x)\} = \\ &= -4\Delta^2(a, b, c, r, |bcs^1|^2 s^2 - |bcs^1|\,|bcs^2|\,s^1, x) = ,\end{aligned}$$

wenn die Determinanten der Matrix $|abcrx|$ gleich z_x gesetzt werden,

$$\begin{aligned}&= -4\Delta^2|bcs^1|.(|bcs^1|(s^2z) - |bcs^2|(s^1z)) \\ &= -4\Delta^2|bcs^1|.|b, c, s^1(s^2z) - s^2(s^1z)|.\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$(s^1y)(s^2z) - (s^1z)(s^2y) =$$

$$= (bb)^2 \begin{vmatrix} \alpha_1^2, 2\alpha_1, 1 \\ \alpha_2^2, 2\alpha_2, 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (ey), (fy), (gy) \\ (ez), (fz), (gz) \end{vmatrix} = 4\Delta^{1/2} \begin{vmatrix} (bb), (bc), (cc) \\ (ey), (fy), (gy) \\ (ez), (fz), (gz) \end{vmatrix}$$

also ergibt sich

$$bcs^1|.|b, c, s^1(s^2z) - s^2(s^1z)| =$$

$$= 4\Delta^{1/2}|b, c, s^1|.\left|b, c, \begin{vmatrix} (bb), (bc), (cc) \\ e, \quad f, \quad g \\ (ez). (fz), (gz) \end{vmatrix}\right|.$$

Der letzte Ausdruck wird, wenn man die Matricen multiplicirt, mit Benutzung der Gleichungen 2) und 8):

$$= -4\Delta^{1/2} \begin{vmatrix} (bb), & (bc), & (bs^1), & 0, & 0 \\ (cb), & (cc), & (cs^1), & 0, & 0 \\ (eb), & (ec), & (es^1), & (ea), & (ez) \\ (fb), & (fc), & (fs^1), & (fa), & (fz) \\ (gb), & (gc), & (gs^1), & (ga), & (gz) \end{vmatrix} =$$

$$= -2\Delta^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} (ar), & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ (br), & (bb), & (bc), & (bs^1), & 0, & 0 \\ (cr), & (cb), & (cc), & (cs^1), & 0, & 0 \\ (er), & (eb), & (ec), & (es^1), & (ea), & (ez) \\ (fr), & (fb), & (fc), & (fs^1), & (fa), & (fz) \\ (gr), & (gb), & (gc), & (gs^1), & (ga), & (gz) \end{vmatrix} =$$

$$= -2\Delta^{-\frac{1}{2}} . D . (a b c r s^1 z).$$

Führt man nun statt der z wieder die x ein, so wird dies:

$$= -2\Delta^{-\frac{1}{2}} . D . |a b c r s^1| \, |abcrx| = 4\Delta^{1/2} . D . |a b c s^1| . |bcrx|;$$

daher ist endlich:

$$(C^1 C^1) C^2 - (C^1 C^2) C^1 = -2^4 \Delta^{3/2} . D . \mathfrak{C}_1 ,$$

wenn

$$\mathfrak{C}^1 = |a b c s^1| \; |bcrx|$$

gesetzt wird.

Schliesslich ist:

$$(C^1 C^1)(\beta_\nu C^1 + C^2) = 2^4 i \Delta^{3/2} . D . H_\nu .$$

Die Gleichungen der Hauptbrennlinien sind daher:

$$H_\nu \equiv i\mathfrak{C}^1 \pm \Delta^{1/2} C^1 = 0. \qquad 18)$$

16. Dass der Complex $\mathfrak{C}^\nu$ im Büschel der Begleitcomplexe liegt, folgt sofort aus seiner Gleichung; denn es ist $(\mathfrak{C}^\nu x) = 0$ für $x = a, b, c, r$; demnach sind die Hauptbrennlinien bezüglich $\mathfrak{C}^\nu$ conjugirt. Der Complex $\mathfrak{C}^\nu$ ist geometrisch auch dadurch charakterisirt, dass er in Involution zu C^ν liegt; denn multiplicirt man in $\mathfrak{C}^\nu \equiv |a b c s^\nu| . |bcrx|$ die Matricen und setzt in (ax), (bx), (cx), $(s^\nu x)$ die Coordinaten von C^ν, so folgt $(C^\nu \mathfrak{C}^\nu) = 0$.

Setzt man für x die Coordinaten von $\mathfrak{C}^\nu$, so erhält man:

$$(\mathfrak{C}^\nu\mathfrak{C}^\nu) = -2\Delta^2|abcs^\nu|.|bcrs^\nu| = -4\Delta^3|bcs^\nu|^2 = \Delta(C^\nu C^\nu).$$

Man kann nun einfacher die Gleichungen der Hauptbrennlinien finden; dieselben sind conjugirt bezüglich C^ν und $\mathfrak{C}^\nu$, daher ist ihre Gleichung

$$\lambda_\nu\mathfrak{C}^\nu + C^\nu = 0,$$

wobei

$$\lambda_\nu^2(\mathfrak{C}^\nu\mathfrak{C}^\nu) + 2\lambda_\nu(\mathfrak{C}^\nu C^\nu) + (C^\nu C^\nu) = 0$$

ist.

Da nun $(C^\nu\mathfrak{C}^\nu) = 0$ ist, folgt:

$$\lambda_\nu = i\frac{(C^\nu C^\nu)^{\frac{1}{2}}}{(\mathfrak{C}^\nu\mathfrak{C}^\nu)^{\frac{1}{2}}} = \frac{i}{\Delta^{1/2}},$$

demnach ist:

$$H_\nu \equiv i\,\mathfrak{C}^\nu + \Delta^{1/2}C^\nu \qquad 18)$$

Für die Begleitcomplexe, ausgedrückt durch die Hauptbrennlinien, ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta^{1/2}.\,C^1 &\equiv H_1 - H_2 \\ 2\Delta^{1/2}C^2 &\equiv \beta_1 H_2 - \beta_2 H_1 \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

17. Die Gleichung eines Strahles des Brennbüschels 1) sei nun:

$$\lambda(ax) + 4\Delta^2 H_1 = \lambda(ax) + \frac{\beta_1 C^1 + C^2}{4i\Delta^{1/2}D} = 0.$$

Die Geraden t_1, τ_2 liegen (siehe Art. 6) im Complexe $r\,du' - s^1 dv' = 0$, die Geraden t_2, τ_1 im Complexe $s^2 du' - r\,dv' = 0$. Daher erhält man den Parameter $\lambda = t_1$ für die Gerade t_1 aus der Gleichung:

$$t_1(ar)\,du' + \frac{T\,dv'}{4i\Delta^{1/2}D} = (\text{nach } 13)) = t_1(ar)\,du' - \frac{2\Delta}{i}dv' = 0$$

oder vermöge Formel 8):

$$t_1 du' + i\,dv' = 0. \qquad 21)$$

Analog hat man für die Parameter τ_1, t_2, τ_2 von respective τ_1, t_2, τ_2 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1\, dv' - \beta_1\, i\, du' &= 0 \\ t_2\, dv' - \beta_2\, i\, du' &= 0 \\ \tau_2\, du' + i\, dv' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

Durch diese Gleichungen sind die Projectivitäten, welche zwischen den Nachbarstrahlen und den zugehörigen vier Brennlinien bestehen, ausgedrückt.

Die Projectivitäten P und Π sind gegeben durch die Parameterbeziehungen:

$$t_1 t_2 = \beta_2, \qquad \tau_1 \tau_2 = \beta_1,$$

es entspricht daher in der Projectivität P der Geraden $t_1(ax) + 4\Delta^2 H_1 = 0$ die Gerade $\beta_2(ax) + 4\Delta^2 t_1 H_2 = 0$. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen den Parameter t_1, so erhält man die Gleichung des Complexes zweiten Grades, der alle linearen Congruenzen enthält, welche die Geradenpaare t_1, t_2 zu Leitlinien haben, nämlich die Gleichungen:

$$16\Delta^4 H_1 H_2 - \beta_2 (ax)^2 = 0. \qquad 23)$$

Ebenso erhält man für Π den Complex zweiten Grades:

$$16\Delta^4 H_1 H_2 - \beta_1 (ax)^2 = 0. \qquad 24)$$

Für die Projectivitäten P_1 und P_2 ergibt sich $t_1 = \tau_2$ und $\beta_1 t_2 = \beta_2 \tau_1$, und die Involutionen J_1 und J_2 sind gegeben durch $t_1 \tau_1 = \beta_1$ und $t_2 \tau_2 = \beta_2$.

§. 5. Die Inflexionstangenten der Brennfläche.

18. Die Parameter der Inflexionstangenten des Tangentenbüschels (ν) erhält man nach den letzten Gleichungen des Art. 17 aus der Gleichung

$$t^2 = \tau^2 = \beta_\nu; \qquad 25)$$

die Gleichungen der Inflexionstangenten sind demnach

$$4\Delta^2 H_\nu \pm (\beta_\nu)^{\frac{1}{2}} (ax) = 0. \qquad 26)$$

Es lässt sich für die Realität der Inflexionstangenten ein einfaches Kriterium angeben. Drei der sechs Coordinaten a_x sind rein imaginär und ebenso die $b_x, c_x, e_x, f_x, g_x,$ mit gleichem Index und auch die gleichstelligen r_x, s^1_x, s^2_x; daher sind die Bildungen (ar), (bs^1), (cr), reell. Die gleichstelligen Coordinaten des Complexes $\mathfrak{C}^\nu$ sind daher auch rein imaginär, während für den Complex $C^\nu = (abcrs^\nu x)$ die anderen drei Coordinaten rein imaginär sind. $H_\nu = i\mathfrak{C}^1 \pm \Delta^{1/2} C^1 = 0$ ist daher eine reelle Gerade, weil wieder die gleichstelligen Coordinaten rein imaginär sind; aus denselben Gründen ist die durch die Gleichung 26) dargestellte Inflexionstangente reell, wenn $(\beta_\nu)^{\frac{1}{2}}$ reell ist. Ist Δ positiv, so ist nach Art. 13 auch die Discriminante B der Gleichung 16) positiv; dann sind die β reell und es folgt: Die Inflexionstangenten des Brennpunktes ν sind reell, wenn β_ν positiv ist, sonst imaginär.

Ist $\beta_\nu = 0$ oder $= \infty$, so fallen die Inflexionstangenten des Brennpunktes ν zusammen. Es ist daher $(C^\nu C^\nu) = -4\Delta^2 |bcs^\nu|^2 = 0$ oder, wenn $\Delta \neq 0$ ist, $|bcs^\nu|^2 = 0$ die Bedingung dafür, dass einer der Brennpunkte ein Rückkehr- oder parabolischer Punkt der Brennfläche sei.

19. Die Zuwüchse du', dv', welche denjenigen Nachbarstrahlen entsprechen, welchen die Inflexionstangenten zugehören, genügen den Gleichungen, welche man durch Elimination von λ aus der Gleichung 20) und der Gleichung 21): $\lambda du' + i dv' = 0$ erhält, nämlich den Gleichungen:

$$dv'^2 + \beta_\nu . du'^2 = 0\,,$$

oder für die beiden Brennpunkte gemeinsam der Gleichung:

$$dv'^4 + (\beta_1 + \beta_2)\, du'^2 dv'^2 + \beta_1 \beta_2\, du'^4 = 0\,,$$

oder

$$(C^2C^2)\,du'^4 - 2(C^1C^2)\,du'^3 dv'^2 + (C^1C^1)\,dv'^4 = 0; \qquad 27)$$

diese Gleichung gibt also die Zuwüchse derjenigen Nachbarstrahlen, deren Brennpunkte auf einer der vier Inflexionstangenten des Strahles a liegen.

Direct folgt diese Gleichung aus der Bemerkung, dass die Inflexionstangenten gleichzeitig in den Complexen a, b, c und den

Complexen 5) liegen müssen, dass also für diese fünf Complexe, da sie eine Gerade gemeinsam haben sollen, die Beziehung besteht:

$$|a, b, c, r\,du' - s^1 dv', s^2 du' - r\,dv'|^2 = 0,$$

welche Gleichung entwickelt die Gleichung 27) gibt.

Das Doppelverhältniss der Wurzeln dieser Gleichung oder das Doppelverhältniss der vier Nachbarstrahlen in der Garbe ist:

$$\delta' = \left(\frac{\sqrt{\beta_1}+\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1}-\sqrt{\beta_2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{\sqrt{\delta}-1}\right)^2.$$

Sei wieder als absolute Invariante

$$J' = \left(\frac{\delta'-1}{\delta'+1}\right)^2$$

gewählt, so besteht zwischen dieser und der absoluten Invariante J des Strahles (s. Art. 13) die Relation:

$$J + J' = 1. \tag{28}$$

Fallen die Begleitcomplexe zusammen, so ist $\delta = 1$, also $\delta' = 0$, demnach entsprechen sich die Inflexionstangenten der Brennpunkte 1 und 2 in der Projectivität P, welche mit Π zusammenfällt (s. Art. 8).

Für $\delta = -1$ ist $\delta' = -1$, daher entsprechen, wenn die Begleitcomplexe in Involution liegen, die Inflexionstangenten des einen Brennpunktes in den Projectivitäten P und Π conjugirten Tangenten des anderen.

Congruenzen, für welche alle Strahlen dasselbe Doppelverhältniss haben, genügen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$J = \frac{B}{(C^1 C^2)^2} = \text{const.}$$

oder der Gleichung

$$k(C^1C^2)^2 - (C^1C^1)(C^2C^2) = 0. \tag{29}$$

Ein Beispiel solcher Congruenzen sind die obigen mit $\delta = 1$, welche der linearen Differentialgleichung

$$D = (abcefg) = 0$$

genügen.[1] Zu diesen Congruenzen gehören diejenigen, welche einem linearen Complexe angehören, denn sämmtliche Garben einer solchen Congruenz liegen in dem linearen Complexe, also auch alle in zweiter Ordnung zu a benachbarten Strahlen. Desshalb fallen nach Art. 9 die Begleitcomplexe in den gegebenen Complex zusammen.

Ein weiteres Beispiel ist die desmische Congruenz sechster Ordnung zweiter Classe, die collinear zur Normalencongruenz einer Fläche zweiter Ordnung ist, denn die Strahlen dieser Normalencongruenz haben, wie sich in Art. 46 zeigen wird, das constante Doppelverhältniss $\delta = 9$; demnach hat das Doppelverhältniss δ' überall den Werth 4.

§. 6. Congruenzen von Centralstrahlen.

20. Ein Centralstrahl des Strahles a liegt in dem Büschel, welches a und die schneidende Nachbargerade a_1 enthält. Für die Developpablenparameter u, v ist $b = 0$ die Gleichung eines Centralstrahles (s. Art. 3). Daher ist

$$\mathfrak{a}_1 \equiv \lambda a + b = 0$$

die Gleichung eines beliebigen Centralstrahles des Punktes 1.

Ist λ eine Function von u, v, so beschreibt der Centralstrahl eine Congruenz, welche als „Congruenz λ“ bezeichnet werden möge. Die Brennlinien des Strahles $\mathfrak{a}_1$ gehören dann den durch Differentiation erhaltenen Complexen

$$\mathfrak{b}_1 \equiv \lambda_1 a + \lambda b + e = 0, \qquad \mathfrak{c}_1 \equiv \lambda_2 a + \lambda c + f = 0$$

an.

Setzt man in die Gleichung $(abcefx) = 0$ des Begleitcomplexes $x_\varkappa = \mathfrak{a}_{1\varkappa}, \mathfrak{b}_{1\varkappa}, \mathfrak{c}_{1\varkappa}$, so wird sie erfüllt; daher liegt der Begleitcomplex zu den Complexen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ in Involution und muss demnach die Strahlen der Garbe (λ) enthalten.

Mit einer Function $\mu(u, v)$ kann man eine „Congruenz μ“ von Centralstrahlen des Punktes 2 bilden, deren Gleichung ist:

$$\mathfrak{a}_2 \equiv \mu a + c = 0;$$

---

[1] Vergl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces t. II, p. 345.

die Brennlinien des Strahles $\mathfrak{a}_2$ gehören dann den Complexen an:

$$\mathfrak{b}_2 \equiv \mu_1 a + \mu b + f = 0\,, \qquad \mathfrak{c}_2 \equiv \mu_2 a + \mu c + g = 0\,.$$

21. Die Congruenz λ mit der Gleichung $\mathfrak{a}_1 = 0$ bleibt ungeändert, wenn man $\mathfrak{a}_1$ mit einer willkürlichen Function $\varphi(u, v)$ multiplicirt; die Gleichung:

$$\mathfrak{a}_1' \equiv \varphi \,.\, \mathfrak{a}_1 = 0$$

stellt dieselbe Congruenz dar. Ebenso stellt

$$\mathfrak{a}_2' \equiv \psi \,.\, \mathfrak{a}_2 = 0$$

die Congruenz $\mathfrak{a}_2$ vor.

Man kann sich nun die Frage vorlegen: Ist es möglich, die Functionen λ, μ, φ, ψ so zu bestimmen, dass $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$ die Differentialquotienten von $\mathfrak{a}$ nach u, respective v, sind, wobei

$$\mathfrak{a} \equiv \sum_{\varkappa=1}^{6} \mathfrak{a}_\varkappa(u, v) x_\varkappa = 0$$

die Gleichung einer 2-fach unendlichen Mannigfaltigkeit linearer Complexe ist?

Zur Erfüllung dieser Forderung ist nothwendig und hinreichend, dass

$$\frac{\partial \mathfrak{a}_1'}{\partial v} = \frac{\partial \mathfrak{a}_2'}{\partial u}$$

ist oder ausgeführt, dass die Gleichung besteht:

$$\varphi_2 \,.\, (\lambda a + b) + \varphi \,.\, (\lambda_2 a + \lambda c + f) = \psi_1(\mu a + c) + \psi \,.\, (\mu_1 a + \mu b + f)\,.$$

Nun besteht zwischen den vier Complexen a, b, c, f keine lineare Relation; denn wäre $f = \alpha a + \beta b + \gamma c$, so wäre auch

$$(af) = -(bc) = \alpha(aa) + \beta(ab) + \gamma(ac) = 0\,,$$

was wir ausschliessen, da wir Congruenzstrahlen mit $\Delta = (bc)^2 = 0$, also mit zusammenfallenden Brennpunkten, nicht in Betracht ziehen.

Da keine Relation besteht, müssen die Coefficienten von a, b, c in der letzten Identität einzeln verschwinden, es muss also

$$\varphi_2 \lambda + \varphi \lambda_2 = \psi_1 \mu + \psi \mu_1\,, \quad \psi \mu = \varphi_2\,, \quad \varphi \lambda = \psi_1\,, \quad \varphi = \psi$$

sein, daher folgt:

$$\lambda = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \quad \mu = \frac{\varphi_2}{\varphi}$$

Setzt man $\chi = \log\varphi$, so ist $\lambda = \chi_1$, $\mu = \chi_2$, und die lineare Complexmannigfaltigkeit, welche differentiirt diese beiden Congruenzen gibt, ist dann:

$$\mathfrak{a} \equiv e^{\chi} . a .$$

Solche Congruenzen, wie diese λ- und μ-Congruenzen, welche durch Differentiation einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{a}$ erhalten werden können, sollen Differentialcongruenzen genannt werden. Es ergibt sich somit:

Zwei Differentialcongruenzen, welche aus Centralstrahlen der Congruenz a bestehen, werden nur durch Differentiation der Congruenz

$$\mathfrak{a} \equiv \rho(u, v) a$$

erhalten; ihre Gleichungen sind:

$$\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}_1 \equiv \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial u} = 0, \qquad \mathfrak{c} \equiv \mathfrak{a}_2 \equiv \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial v} = 0.$$

Hätten wir nicht die Developpablenparameter u, v zu Grunde gelegt, so wären hier und in den folgenden Sätzen die Differentiationen in den Richtungen $du : dv = \alpha_\nu$ zu nehmen.

22. Die Differentialcongruenzen λ und μ sind eineindeutig aufeinander bezogen, indem die Strahlen, welche demselben u, v zugehören, einander zugeordnet sind. Die Brennlinien des Strahles $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{b}$ liegen noch in den Complexen $\mathfrak{e}, \mathfrak{f} = 0$, die des Strahles $\mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{c}$ in den Complexen $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} = 0$, wobei $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ die zweiten Differentialquotienten von $\mathfrak{a}$ nach u, v sind.

Es seien nun $\mathfrak{o}_{\nu\rho}$ die Brennpunkte des Strahles $\mathfrak{a}_\nu (\nu, \rho = 1, 2)$ und $l_{1\rho}$ seien die Brennlinien des Strahles $\mathfrak{a}_1$, welche $\mathfrak{a}_2$ schneiden. Dieselben liegen in den Complexen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$; in diesen Complexen liegen ebenso die zwei Brennlinien $l_{2\rho}$ des Strahles $\mathfrak{a}_2$, welche den Strahl $\mathfrak{a}_1$ schneiden. Die vier Brennlinien $l_{\nu\rho}$ liegen daher auf der Regelschaar, welche die Complexe $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ gemein haben; daher berühren die Ebenen, welche $\mathfrak{a}_\nu$ mit $l_{\nu\rho}$ verbinden, dieselbe

Regelschaar in den Punkten $\mathfrak{o}_{\gamma\varrho}$, oder: Die Brennflächen zweier Differentialcongruenzen berühren in den Brennpunkten entsprechender Strahlen dasselbe Hyperboloid.

Es lässt sich nun umgekehrt die Frage stellen: Welche Beziehung muss zwischen den Functionen λ und μ bestehen, damit die zugehörigen Centralstrahlencongruenzen die letzte Eigenschaft haben, dass nämlich die Brennflächen dieser Congruenzen in den Brennpunkten entsprechender Strahlen dasselbe Hyperboloid berühren?

Wenn die Strahlen zweier Büschel, welche einen Strahl $\mathfrak{a}_1$ gemein haben und zweier weiteren Büschel, die einen anderen Strahl $\mathfrak{a}_2$ gemein haben, sämmtlich dasselbe Hyperboloid berühren sollen, so gehören diese Strahlen demselben linearen Complexe an; denn die vier Strahlen der Büschel, welche $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ schneiden, gehören der einen Regelschaar des Hyperboloids an, welche in einem Netze linearer Complexe liegt. Unter diesen Complexen gibt es einen, welcher auch die Strahlen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ enthält und somit alle Strahlen der Büschel. Werden umgekehrt in einem linearen Complexe zwei Strahlenbüschelpaare angenommen, die je einen Strahl gemein haben, so berühren die Büschelstrahlen dasselbe Hyperboloid.

Es müssen demnach, wenn die fragliche Beziehung erfüllt sein soll, die Brennlinien des λ-Strahles und die des μ-Strahles demselben linearen Complexe angehören. Die Brennlinien des λ-Strahles liegen aber nach Obigem in den Complexen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1 = 0$, die des μ-Strahles in den Complexen $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2 = 0$; da es nun einen Complex geben soll, der sich linear aus den drei ersten und auch linear aus den drei letzten dieser Complexe ableiten lässt, so muss zwischen diesen sechs Complexen eine lineare Beziehung bestehen, oder es muss ihre Determinante:

$$(\lambda a+b, \lambda_1 a+\lambda b+e, \lambda_2 a+\lambda c+f, \mu a+c, \mu_1 a+\mu b+f, \mu_2 a+\mu c+g) = \\ = (\mu_1-\lambda_2)\,(abcefg)$$

verschwinden; es folgt also:

Die Brennflächen einer λ- und einer μ-Congruenz berühren in den Brennpunkten entsprechender Strahlen dasselbe Hyperboloid, wenn der Strahl a das Doppelverhältniss 1 hat und sonst, wenn

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{\partial\lambda}{\partial v}$$

ist.

Liegen die Linien $l_{\nu\rho}$ hyperboloidisch, so auch die Diagonalen der beiden Vierseite $\mathfrak{a}_\nu, l_{1\rho}$ und $\mathfrak{a}_\nu, l_{2\rho}$. Diese Diagonalen sind aber Centralstrahlen der Garbe $(\mathfrak{a}_\nu)$, daher folgt: Auch die Centrallinien entsprechender Strahlen einer λ- und einer μ-Congruenz berühren dasselbe Hyperboloid, wenn der Strahl das Doppelverhältniss 1 hat oder sonst, wenn $\mu_1 = \lambda_2$ ist.

Die Linien $l_{\nu\rho}$ liegen nach Art. 9 bei $\delta = 1$ im Begleitcomplexe des Strahles a; sie liegen daher auf der Regelschaar, welche b, c mit dem Complexe $(bcefgx) = 0$ (s. Art. 14) gemein haben. Da aber für $\delta = 1$ auch $(bcefga) = 0$ ist, so enthält das Hyperboloid des letzten Satzes bei $\delta = 1$ auch den Strahl a.

23. Nach Art. 3 gehören die Centralstrahlen der Garbe $(\mathfrak{a}_1)$ dem Begleitcomplexe C^1 an, in welchem auch $\mathfrak{a}_2$ liegt. Die Brennlinien $l_{1\rho}$ schneiden alle diese Centralstrahlen, daher geht die conjugirte Gerade z. B. von l_{11} bezüglich C^1 durch $\mathfrak{o}_{12}$, und der Nullpunkt der Ebene $(\mathfrak{a}_1, l_{11})$ liegt auf l_{12}, wesshalb l_{12} die conjugirte Gerade von l_{11} ist. Die Hauptbrennlinien H_ν sind auch conjugirt bezüglich C^1, daher liegen die Linien $l_{1\rho}$ mit den Hauptbrennlinien hyperboloidisch oder in einem Netze linearer Complexe.

Die Linien $l_{2\rho}$ sind bezüglich des Complexes C^2 conjugirt; es folgt also, dass bei Strahlen vom Doppelverhältnisse 1, für welche die Begleitcomplexe zusammenfallen, die vier Linien $l_{\nu\rho}$ hyperboloidisch liegen, wie sich schon oben ergab.

Es gilt ferner: Bei den Congruenzen, für welche

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{\partial\lambda}{\partial v}$$

ist, und nur bei diesen, enthält das Hyperboloid, welches die Brennlinien entsprechender Congruenzstrahlen berührt, auch die Hauptbrennlinien H_ν des Strahles a.

Die Linien $l_{1\rho}$ liegen nämlich ihrer Definition nach in den ∞^3 linearen Complexen

$$\sigma\mathfrak{a}_1 + \upsilon\mathfrak{b}_1 + \tau\mathfrak{c}_1 + \omega\mathfrak{a}_2 = 0\,;$$

unter diesen gibt es nach Obigem ein Netz linearer Complexe, welche die Linien H_ν enthalten, die den Complexen $a, b, c, f = 0$ genügen. Es muss also in der letzten Gleichung der Factor υ von e verschwinden, weil sonst e in Folge von $a, b, c, f = 0$ verschwinden müsste; es müssten demnach die Determinanten der Matrix $|abcef|$ verschwinden, was nicht möglich ist, da der Begleitcomplex $(abcefx) = 0$ nicht identisch verschwindet. Die Complexe, welche die Linien $l_{1\rho}$ und H_ν enthalten, gehören daher dem Netze an:

$$\sigma \mathfrak{a}_1 + \tau \mathfrak{c}_1 + \omega \mathfrak{a}_2 = 0.$$

Ebenso liegen die Linien $l_{2\rho}$, H_ν in den Complexen des Netzes:

$$\sigma' \mathfrak{a}_1 + \tau' \mathfrak{b}_2 + \omega' \mathfrak{a}_2 = 0.$$

Sollen nun die sechs Linien $l_{\nu\rho}$, H_ν hyperboloidisch liegen, so müssen diese Netze identisch sein. Da aber zwischen a, b, c, f keine lineare Relation besteht, so müssen die Gleichungen gelten, die man durch Vergleichung der Coefficienten von a, b, c, f in diesen letzten Gleichungen erhält:

$$(\sigma - \sigma')\lambda + \tau\lambda_2 - \tau'\mu_1 + (\omega - \omega')\mu = 0$$

$$\sigma - \sigma' = \tau'\mu, \qquad \omega' - \omega = \tau\lambda, \qquad \tau = \tau'.$$

Hiezu ist aber nothwendig und hinreichend, dass $\lambda_2 = \mu_1$, womit der obige Satz bewiesen.

24. Ist für ein allgemeines Parametersystem u, v

$$\mathfrak{a}_1 \equiv \lambda(u, v) . a + \alpha_1 b + c = 0$$

ein Strahl der λ-Congruenz, so liegen die Brennlinien seiner Garbe (λ) in den linearen Complexen, die man erhält, indem man die letzte Gleichung nach u und v differentiirt, also in den Complexen:

$$\mathfrak{b}_1 \equiv \lambda_1 a + \lambda b + \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} b + \alpha_1 e + f = 0,$$

$$\mathfrak{c}_1 \equiv \lambda_2 a + \lambda c + \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} b + \alpha_1 f + g = 0.$$

Die singulären Complexe $\mathfrak{n}_\nu$ des Büschels $\gamma \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1 = 0$ haben dann die Gleichungen:

$$\mathfrak{n}_\nu \equiv \gamma_\nu \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1 = 0\,,$$

wo γ_ν der Gleichung genügt:

$$(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1)\gamma^2 + 2(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1) + (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_1) = 0. \tag{30}$$

Wir suchen nun die Bedingung dafür, dass die Brennebenen der Centralstrahlengarbe (λ) aus dem Brennbüschel (1) conjugirte Tangenten der Brennfläche ausschneiden.

Da die Axen $\mathfrak{n}_\nu$ der singulären Complexe $\mathfrak{n}_\nu$ in diesen Brennebenen liegen, so ist die Bedingung aufzusuchen, unter welcher diese Axen conjugirte Tangenten des Büschels (1) schneiden; es müssen die Strahlen $\mathfrak{t}_\nu$ des Büschels (1), welche den Complexen $\mathfrak{n}_\nu \equiv \gamma_\nu \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1 = 0$ angehören, conjugirte Tangenten sein. Diese Strahlen $\mathfrak{t}_\nu$ liegen aber, da sie in den Complexen $a, b, c = 0$ liegen, auch in den Complexen, deren Gleichungen man erhält, indem man in $\mathfrak{n}_\nu = \gamma_\nu \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}_1 = 0$ setzt: $a, b, c = 0$, also liegen sie in den Complexen:

$$\gamma_\nu(\alpha_1 e + f) + \alpha_1 f + g = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $(bb)(\alpha_1 - \alpha_2)$, so übergehen dieselben unter Anwendung der Formeln 4) in:

$$\mathfrak{T}_\nu \equiv (\gamma_\nu - \alpha_1)\, r - (\gamma_\nu - \alpha_2)\, s^1 = 0\,;$$

die durch diese Gleichungen gegebenen Complexe müssen somit die Brennlinien $\mathfrak{t}_\nu$ enthalten.

Ein Strahl des Büschels (1) hat nun nach Art. 17 die Gleichung

$$\lambda(ax) + \frac{\beta_1 C^1 + C^2}{4i\Delta^{1/2} D} = 0\,; \tag{31}$$

die Parameter $\lambda = \mathfrak{t}_\nu$ der Strahlen $\mathfrak{t}_\nu$ ergeben sich daher aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{t}_\nu(a\mathfrak{T}_\nu) + \frac{\beta_1(C^1\mathfrak{T}_\nu) + (C^2\mathfrak{T}_\nu)}{4i\Delta^{1/2} D} = 0. \tag{32}$$

Da aber

$$\left.\begin{aligned}
(a\mathfrak{T}_\nu) &= (\gamma_\nu - \alpha_1)(ar) = 2(\gamma_\nu - \alpha_1)\Delta \\
(C^1\mathfrak{T}_\nu) &= (\gamma_\nu - \alpha_1)(C^1 r) - (\gamma_\nu - \alpha_2)(C^1 s^1) \\
(C^2\mathfrak{T}_\nu) &= (\gamma_\nu - \alpha_1)(C^2 r) - (\gamma_\nu - \alpha_2)(C^2 s^1)
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

ist und sich nach Formel 12) und 14) ergibt, dass

$$(C^{\nu} r) = 0, \quad (C^1 s^1) = 0, \quad (C^2 s^1) = -T = 8\Delta^{3/2} D\,,$$

so folgt:

$$(C^1 \mathfrak{T}_{\nu}) = 0, \quad (C^2 \mathfrak{T}_{\nu}) = -8(\gamma_{\nu} - \alpha_2)\Delta^{3/2} D. \qquad 34)$$

Setzt man 33), 34) in 32) ein, so ergeben sich für die Parameter $\mathfrak{t}_{\nu}$ die Gleichungen:

$$\mathfrak{t}_{\nu}(\gamma_{\nu} - \alpha_1) + i(\gamma_{\nu} - \alpha_2).$$

Wenn nun die Tangenten $\mathfrak{t}_{\nu}$ conjugirt sein sollen, so müssen die zugehörigen Parameter $\mathfrak{t}_{\nu}$ der Gleichung:

$$\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 = \beta_1$$

genügen (s. Art. 17), daher ist die gesuchte Beziehung:

$$\frac{\gamma_1 - \alpha_2}{\gamma_1 - \alpha_1} \; \frac{\gamma_2 - \alpha_2}{\gamma_2 - \alpha_1} = -\beta_1\,,$$

oder, wenn für die symmetrischen Verbindungen von γ_1, γ_2 die Werthe aus Gleichung 30) eingesetzt werden:

$$(\mathfrak{b}_1\alpha_2 + \mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_1\alpha_2 + \mathfrak{c}_1) + \beta_1(\mathfrak{b}_1\alpha_1 + \mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_1\alpha_1 + \mathfrak{c}_1) = 0$$

Sind u, v Developpablenparameter, so ergibt sich die Beziehung

$$\gamma_1\gamma_2 = -\beta_1 \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1)\beta_1 + (\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_1) = 0.$$

Aus den in Art. 20 angegebenen Gleichungen der Complexe $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ ergibt sich dann $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_1) = (ee)$, $(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_1) = -\lambda_2(bc) + (ff)$, daher übergeht die obige Beziehung in:

$$(ee)\beta_1 + (ff) = \lambda_2(bc).$$

Für die Congruenz, welche bei diesen Parametern der Strahl $b = 0$ beschreibt, ist $\mathfrak{b}_1 = e$, $\mathfrak{c}_1 = f$, daher muss, wenn für die Garbe die obige Eigenschaft erfüllt sein soll, die Gleichung bestehen:

$$(ee)\beta_1 + (ff) = 0; \qquad 35)$$

soll auch die Garbe der Congruenz $c = 0$ die Eigenschaft bestehen, so muss

$$(ff)\beta_2 + (gg) = 0 \tag{36)}$$

sein.

Ist die Bedingung zu finden, unter welcher die Brennpunkte der λ-Garbe auf conjugirten Tangenten des Brennbüschels (2) liegen, so hätte man nur in der Gleichung 30) β_2 für β_1 zu schreiben, und es ergibt sich die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\gamma_1 - \alpha_2}{\gamma_1 - \alpha_1} \, \frac{\gamma_2 - \alpha_2}{\gamma_2 - \alpha_1} = -\beta_2 .$$

Wenn also bei einem Strahl vom Doppelverhältnisse 1, für welchen $\beta_1 = \beta_2$ ist, die Brennebenen einer Centralstrahlengarbe conjugirte Tangenten des einen Brennpunktes von a enthalten, so liegen die Brennpunkte der Garbe auf conjugirten Tangenten des anderen Brennpunktes.

25. Es wären eine λ- und eine μ-Congruenz gegeben, welche aber Diffentialcongruenzen seien; es wären also nach Art. 21

$$b = 0, \qquad c = 0$$

die Gleichungen dieser Congruenzen. Dann gilt nach Art. 22 und 23, dass die Brennlinien der Garben dieser Congruenzen dasselbe Hyperboloid berühren, welches auch die Hauptbrennlinien H, des Strahles a enthält.

Wir nehmen ferner an, dass die Beziehung des letzten Artikels erfüllt sei, dass also die Brennebenen des λ-Strahles conjugirte Tangenten t, des Büschels (1) und die Brennebenen des μ-Strahles conjugirte Tangenten des Büschels (2) enthalten.

Bestimmt man jetzt zu einer Geraden g des Hyperboloids, welche zu der Schaar (H) gehört, welche die Hauptbrennlinien enthält, die conjugirte Polare bezüglich des Begleitcomplexes C^1, so erhält man eine Gerade g', welche in derselben Schaar liegt, da die andere Schaar des Hyperboloids dem Begleitcomplexe angehört. Die Geradenpaare g, g' bilden auf dem Hyperboloid eine quadratische Involution, welche aus dem Strahle b des Hyperboloids durch eine Ebeneninvolution projicirt wird, welch' letztere Involution wieder das Strahlenbüschel (1) nach einer Strahleninvolution schneidet. Diese Strahleninvolution ist mit der Dupin'schen Involution conjugirter Tangenten identisch; denn das Ebenenpaar, welches die Brennlinien $l_{1\rho}$, die nach Art. 23 bezüglich C^1 polar sind, projicirt, enthält nach Annahme das Paar t_ν, und das Ebenenpaar, welches die Hauptbrennlinien projicirt, schneidet die Geraden a und H_1 aus dem Büschel (1) aus. Da aber durch die zwei Paare conjugirter Tangenten t_ν und a, H_1 die Dupin'sche Involution bestimmt ist, folgt:

Conjugirte Polaren des Complexes C^ν, welche sich auf der Schaar (H) befinden, schneiden conjugirte Tangenten des Punktes ν.

Die Regelschaar (H) enthält auch zwei Strahlen des Complexes C^1, welche die Doppelstrahlen der Involution conjugirter Polaren g, g' ist; diese Complexstrahlen schneiden daher die Inflexionstangenten des Punktes 1.

Nimmt man eine beliebige Gerade g, welche b schneidet, so schneidet sie noch eine Erzeugende γ der Schaar (H), welche nicht durch den Schnittpunkt von b mit g geht. Die conjugirten Polaren g' und γ' von g und γ bezüglich C^1 schneiden sich, weil sich g und γ schneiden, und sie schneiden auch b, weil b dem Complexe C^1 angehört; daher:

Zwei beliebige conjugirte Polaren des Complexes C^1, welche den Strahl b schneiden, schneiden conjugirte Tangenten des Punktes 1.

Schneidet die Gerade g der Schaar (H) die Tangente t_1 des Büschels (1), so wird die conjugirte Polare g' bezüglich des Complexes C^1 von der conjugirten Tangente τ_1 dieses Büschels geschnitten. Da g, t_1 sich schneiden, so schneiden sich auch ihre bezüglich C^1 genommenen conjugirten Polaren g', τ_2; τ_2 ist hiebei die der Geraden t_1 in der Projectivität P_1 entsprechende Gerade (s. Art. 8). Es ergibt sich hienach, dass die Gerade g' die Geraden τ_1, τ_2 schneidet, also entsprechende Strahlen der Projectivität Π; daher:

Die Erzeugenden der Schaar (H) des Hyperboloids schneiden Strahlen der Büschel (1) und (2), die einander in der Projectivität Π entsprechen.

§. 7. Normalencongruenzen.

26. Wir wenden nun die Resultate der vorigen Paragraphen auf Normalencongruenzen an.

Es sei zunächst noch a der Strahl einer allgemeinen Congruenz, und es seien diejenigen Centrallinien zu bestimmen, welche auf a senkrecht stehen. Sind p_{ik}, q_{ik} die Plücker'schen Coordinaten zweier Geraden, so ist die Bedingung dafür, dass dieselben aufeinander senkrecht stehen:

$$[p, q] \equiv p_{14}q_{14}+p_{24}q_{24}+p_{34}q_{34} = 0.$$

Wenn also der Centralstrahl $\lambda a+b = 0$ auf a senkrecht sein soll, so muss

$$[\lambda a+b, a] = \lambda[a, a]+[a, b] = 0$$

sein. Daher sind die Gleichungen der zu a senkrechten Centralstrahlen:

$$-\frac{[a, b]}{[a, a]}a+b = 0, \qquad -\frac{[a, c]}{[a, a]}a+c = 0.$$

Setzt man $\chi = \log [a, a]^{1/2}$, so ist:

$$-\frac{[a, b]}{[a, a]} = \frac{\partial\chi}{\partial u}, \qquad -\frac{[a, c]}{[a, a]} = \frac{\partial\chi}{\partial v};$$

die Congruenzen der zu a senkrechten Centralstrahlen sind daher Differentialcongruenzen und können durch Differentiation der Congruenz

$$\frac{a}{[a,a]^{1/2}} = 0$$

erhalten werden.

Sind die Coordinaten a_{14}, a_{24}, a_{34} des Strahles a die Richtungscosinus desselben, so ist:

$$[a, a] = 1, \quad [a, b] = 0, \quad [a, c] = 0;$$

daher sind $b = 0$, $c = 0$ die Gleichungen der senkrechten Centralstrahlen.

Soll nun die Congruenz des Strahles a eine Normalencongruenz sein, so müssen bekanntlich die Brennebenen desselben aufeinander senkrecht stehen und umgekehrt; es müssen demnach die zu a senkrechten Centralstrahlen aufeinander senkrecht sein, oder es muss, wenn die Annahme $[a, a] = 1$ gemacht wird,

$[b, c] = 0$ sein. Wir können demnach den Satz aussprechen: Die Normalencongruenzen sind Differentialcongruenzen, oder:

Ist $a(u, v) = 0$ die Gleichung einer Normalencongruenz und sind die Coordinaten a_{14}, a_{24}, a_{34} des Strahles a die Richtungscosinus desselben, so sind

$$b \equiv \frac{\partial a}{\partial u} = 0, \qquad c \equiv \frac{\partial a}{\partial v} = 0$$

die Gleichungen der Normalen der Centrafläche in den Hauptkrümmungscentren der Normale a.

Wären nicht die Parameter u, v der Krümmungslinien zu Grunde gelegt, sondern wäre für diese Linien $du : dv = \alpha_\nu$, so wären auch die Differentiationen in diesen Richtungen $du : dv = \alpha_\nu$ zu nehmen, um aus der Gleichung der Normale die Normalen der Centrafläche zu erhalten.

27. Es sei m ein beliebiger Punkt der gegebenen Fläche m' ein beliebiger Nachbarpunkt der Fläche, a, a' ihre Flächennormalen, (a) die Garbe der unendlich nahen Normalen von a. Die Brennpunkte 1, 2 der Normale in ihrer Congruenz sind die Hauptkrümmungsmittelpunkte, oder kürzer gesagt, die „Hauptpunkte" des Punktes m; die Brennebenen I, II sind die Hauptkrümmungsebenen oder „Hauptebenen" dieses Punktes. Die Hauptebenen I, II berühren die Centrafläche in den Punkten 2, 1.

1', 2' seien ferner die Hauptpunkte des Punktes m', also auf a' und der Centrafläche in der Nähe von 1, respective 2, gelegen. Mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ seien die Normalen der Centrafläche in den Punkten 1, 2, mit $(\mathfrak{a}_\nu)$ die zugehörigen Garben bezeichnet. $\mathfrak{o}_{\nu\rho}$ seien die Hauptpunkte der Centrafläche für den Punkt ν, die Hauptebenen $\mathfrak{O}_{\nu\rho}$ berühren die Centrafläche der Centrafläche in den Punkten $\mathfrak{o}_{\nu\rho}$ $(\nu, \rho = 1, 2)$. Endlich seien $\mathfrak{a}_{\nu\rho}$ die Normalen dieser Flächen und $l_{\nu\rho}$ die Brennlinien der Normale $\mathfrak{a}_\nu$, welche die andere Normale $\mathfrak{a}_\nu$ schneiden.

Die Hauptbrennlinien H_ν der Normale a sind als Schnittlinien aufeinander folgender Hauptebenen der Punkte einer Krümmungslinie die Krümmungsaxen dieser Curven für den Punkt m.

Unter Begleitcomplexen, Doppelverhältniss, absoluter Invariante des Punktes m werden die unter diesen Namen in den vorhergehenden Paragraphen definirten Gebilde seiner Normale in ihrer Congruenz verstanden.

Liegt ein Hauptpunkt der Nachbarnormale a' auf einer Inflexionstangente der Centrafläche, die im Hauptpunkte 1 oder 2 diese Fläche berührt, so soll die Tangente mm' des Punktes m eine **Inflexionstangente zweiter Stufe der gegebenen Fläche** genannt werden. Es gibt vier Inflexionstangenten zweiter Stufe in m, ihr Doppelverhältniss δ' ist an das Doppelverhältniss δ der Begleitcomplexe durch Formel 28) gebunden.

Da wir im letzten Artikel erkannt haben, dass die Normalencongruenzen der Centrafläche Differentialcongruenzen sind, so sind Eigenschaften dieser Congruenzen im letzten Paragraphen enthalten, wir wollen aber einige derselben nochmals direct ableiten.

28. Die Brennlinien der Normale $\mathfrak{a}_1 \equiv b = 0$ liegen in den Complexen $b, e, f = 0$, die der Normale $\mathfrak{a}_2 \equiv c = 0$ in den Complexen $c, f, g = 0$, so dass die Ebenen $\mathfrak{O}_{\nu\rho}$ ein Hyperboloid in den Punkten $\mathfrak{o}_{\nu\rho}$ berühren, das Hyperboloid nämlich, welches die Regelschaar (H) enthält, die den drei Complexen $b, c, f = 0$ gemeinsam ist. In dieser Regelschaar liegen die Hauptbrennlinien, denn diese sind die den Complexen $a, b, c, f = 0$ gemeinsamen Strahlen, und da

$$[b, c] = -[a, f] = 0$$

ist, liegt auch die unendlich ferne Gerade der zu a senkrechten Ebene auf dieser Regelschaar. Das Hyperboloid ist also ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine Directionsebene senkrecht zu a ist. Wir erhalten daher den Mannheim'schen Satz über das Paraboloid der acht Geraden:[1]

Die Centraflächen der Centrafläche berühren in den Hauptpunkten der Hauptpunkte das Paraboloid, welches die Hauptbrennlinien enthält und die senkrechte Ebene zur Normale a zur Directionsebene hat; die acht Geraden desselben sind die Normalen $\mathfrak{a}_\nu$, die Hauptbrennlinien H_ν und die vier Brennlinien $l_{\nu\rho}$. Nach Art. 23 sind die Geraden $l_{\nu\rho}$ bezüglich des Complexes C^γ conjugirt.

[1] Siehe Mannheim, Détermination de la liaison géom. etc., Comptes rend., t. 74, p. 458.

Die Normalen $\mathfrak{a}_{\nu\rho}$ berühren nach dem letzten Satze des Art. 22 ein Hyperboloid, welches die Normalen $\mathfrak{a}_{\nu}$ enthält und bei Normalen vom Doppelverhältnisse 1 die Normale a.

Da die Brennebenen der Garbe $(\mathfrak{a}_{\nu})$ die Tangenten der Krümmungslinien der Centrafläche im Hauptpunkte ν ausschneiden, so gehören die Normalencongruenzen zu den in Art. 25 betrachteten Congruenzen. Es folgt demnach, dass für die Normalencongruenz a die Relationen bestehen müssen:

$$(ee)\beta_1 + (ff) = 0, \qquad (ff)\beta_2 + (gg) = 0,$$

so dass das Doppelverhältniss der Normale a den Werth hat:

$$\delta = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{(ff)^2}{(ee).(gg)},$$

und dass für den Strahl vom Doppelverhältnisse 1 die Beziehung gilt:

$$(ff)^2 - (ee).(gg) = 0.$$

29. Nach Art. 25 ergibt sich, dass die orthogonalen Projectionen jeder Erzeugenden der Regelschaar (H) des Mannheim'schen Paraboloids auf die Hauptebenen von m zwei Brennlinien sind, welche sich in der Projectivität Π entsprechen. Zwei bezüglich des Begleitcomplexes C^{ν} conjugirte Erzeugende von (H) oder zwei beliebige conjugirte Polaren desselben, welche die Normale $\mathfrak{a}_{\nu}$ schneiden, projiciren sich auf die Hauptebene, welche im Punkte ν die Centrafläche berührt, als conjugirte Tangenten der Centrafläche; die Strahlen des Complexes C^{ν}, welche der Schaar angehören, projiciren sich in die Inflexionstangenten des Punktes ν. Für Normalen vom Doppelverhältnisse 1 liegen auch die Hauptpunkte der Normale $\mathfrak{a}_{\nu}$ auf conjugirten Tangenten des anderen Hauptpunktes ν'.

Zu den Erzeugenden der Schaar (H) gehört auch die unendlich ferne Gerade der zu a senkrechten Ebene; projicirt man diese auf die Hauptebene, so erhält man die Brennlinien, welche auf a senkrecht stehen, es entsprechen sich daher in der Projectivität Π die zur Normale a senkrechten Brennlinien.

Nehmen wir nun an, dass für die Zuwüchse $du:dv$ der Normale a' der Hauptpunkt $1'$ auf der zu a senkrechten Brennlinie $\mathfrak{t}_1$ liege, so muss für den Hauptkrümmungsradius r_1 die Relation gelten:

$$dr_1 = \frac{\partial r_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial r_1}{\partial v}\,dv = 0;$$

nehmen wir ferner an, dass auch der zweite Hauptpunkt $2'$ der Normale a' auf der zu a senkrechten Brennlinie $\mathfrak{t}_2$ liege, so muss auch für dasselbe $du:dv$ die Beziehung:

$$dr_2 = \frac{\partial r_2}{\partial u}\,du + \frac{\partial r_2}{\partial v}\,dv = 0$$

bestehen. Daher muss, wenn sich die zu a senkrechten Brennlinien in der Projectivität P entsprechen sollen, die Relation:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u}\,\frac{\partial r_2}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial v}\,\frac{\partial r_2}{\partial u} = 0;$$

stattfinden; geschieht letzteres, so muss sich umgekehrt eine Normale a' finden lassen, deren entsprechende Tangenten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ auf a senkrecht stehen.

Diese Relation sagt aber aus, dass ein Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen, dass die Fläche eine Weingarten'sche Fläche sei. Nun entsprechen sich in den Projectivitäten P und Π im allgemeinen Falle die Geraden a, H_1; H_2, a; da bei Weingarten'schen Flächen diese Projectivitäten, wie soeben gezeigt wurde, noch ein drittes Paar entsprechender Strahlen gemein haben, so sind bei diesen Flächen die Projectivitäten P und Π identisch. Es folgt demnach:

Die Weingarten'schen Flächen sind diejenigen, bei welchen die Projectivitäten P und Π einer Normale zusammenfallen, für welche demnach das Doppelverhältniss aller Punkte den Werth 1 hat.

Dieser Satz folgt auch aus dem Satze des Herrn Ribaucour,[1] welcher aussagt, dass sich bei Weingarten'schen Flächen die Inflexionstangenten der Hauptpunkte in der Projectivität P ent-

[1] Siehe Ribaucour, Note sur les développées des surfaces, Compt. rend. t. 74, p. 1399.

sprechen, was nach Art. 19 nur für Strahlen vom Doppelverhältnisse 1 der Fall sein kann und ist.

30. Man kann nun auch nach Art. 9 sagen:

Die Weingarten'schen Flächen sind diejenigen, für welche die ∞^2 in zweiter Ordnung zu einer Normale benachbarten Normalen in demselben linearen Complexe liegen, welcher mit den zusammenfallenden Begleitcomplexen identisch ist.

Da die Normalen $\mathfrak{a}_\nu$ der Centrafläche Centrallinien der Normale $\mathfrak{a}_\nu$ sind, gilt ferner nach Art. 9 für die Congruenzen der $\mathfrak{a}_\nu$ der Satz:

Die Normalengarben (a) und $(\mathfrak{a}_1)$ liegen im Begleitcomplexe C^1, die Garben (a) und $(\mathfrak{a}_2)$ im Begleitcomplexe C^2. Bei Weingarten'schen Flächen, und nur bei diesen, liegen die drei Garben (a), $(\mathfrak{a}_1)$, $(\mathfrak{a}_2)$ in demselben linearen Complexe.

Die Hauptebenen $\mathfrak{D}_{\nu\rho}$ enthalten die Centrallinien der Garbe $(\mathfrak{a}_\nu)$, diese Linien liegen auch in dem Complexe C^ν, und zu ihnen gehören auch die Normalen $\mathfrak{a}_{\nu\rho}$; es folgt:

In dem Begleitcomplexe C^ν liegen die fünf Normalen a, $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu\rho}$; bei Weingarten'schen Flächen, und nur bei diesen, liegen die sieben Normalen a, $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_{\nu\rho}$ in demselben linearen Complexe.

Es gibt nach Herrn Mannheim ∞^2 lineare Complexe, für welche die unendlich kleine Schraubenbewegung, welche jeder von ihnen definirt, jeden Nachbarflächenpunkt m' des Punktes m wieder in einen Punkt der Fläche überführt. Es sind dies diejenigen Complexe, welche die Normalengarbe (a) enthalten. Es steht nämlich der Translationsstrahl des Punktes m' für die durch einen solchen Complex definirte Schraubenbewegung senkrecht auf der Normale m' von a', wesshalb m' auf der Fläche weiterrückt. Da nun der Begleitcomplex C^ν die Garben (a) und $(\mathfrak{a}_\nu)$ enthält, so ergibt sich die folgende kinematische Definition der Begleitcomplexe:

Es gibt nur eine unendlich kleine Schraubenbewegung, bei welcher gleichzeitig die Nachbarpunkte des Punktes m der Urfläche auf dieser und die Nachbarpunkte eines seiner Hauptpunkte auf der Centrafläche bleiben; nur bei Weingarten'schen Flächen gibt es eine Schraubenbewegung, bei welcher gleichzeitig die Nachbarpunkte von m und beider Hauptpunkte auf ihren Flächen fortschreiten. Diese Schraubenbewegungen sind diejenigen, welche den Begleitcomplexen zugehören. Die Leitlinien der den beiden Complexen gemeinsamen Congruenz sind die Krümmungsaxen der Krümmungslinien des Punktes m.

31. Man kann auf einer Fläche die Curve von Punkten costanten Doppelverhältnisses betrachten; für die Parameter u, v der Curvenpunkte gilt dann die Gleichung 29), in welche die Coordinaten der Normale eingeführt sind, nämlich die Gleichung:

$$\frac{(C^1C^1)(C^2C^2)}{(C^1C^2)^2} = \frac{|bcs^1|^2 . |bcs^2|^2}{(|bcs^1|\,|bcs^2|)^2} = k.$$

Alle diese Curven gehen durch eine Anzahl fester Punkte, welche die Schnittpunkte der Curve $|bcs^1|\,|bcs^2| = 0$, d. i. der Curve vom Doppelverhältnisse -1 mit den Curven $|bcs^\nu|^2 = 0$, also der harmonischen Curve mit dem Orte des Punktes, dessen ein Hauptpunkt ein parabolischer oder Rückkehrpunkt der Centrafläche ist (vergl. Art. 18). Diese festen Punkte sind demnach diejenigen, deren beide Hauptpunkte den letzteren Curven angehören.

Es gibt auch Flächen, deren sämmtliche Punkte dasselbe Doppelverhältniss haben, dieselben genügen der partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung (vergl. Art. 19)

$$|bcs^1|^2 |bcs^2|^2 - k(|bcs^1|\,|bcs^2|)^2 = 0.$$

Besonders hervorzuheben sind unter diesen Flächen diejenigen, für welche $k = 1$ ist, welche also der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$D = (abcefg) = 0$$

genügen. Diese Flächen haben in allen Punkten das Doppelverhältniss 1, sie sind, wie im Art. 29 erkannt wurde, Weingarten'sche Flächen.[1]

[1] Vergl. Darboux, a. a. O.

Auch die Flächen zweiten Grades gehören zu den Flächen constanten Doppelverhältnisses, da sich in Art. 46 zeigen wird, dass das Doppelverhältniss ihrer Punkte überall den Werth 9 hat.

Setzt man die Parameter u, v speciell als Krümmungslinienparameter voraus, so ergibt sich nach Art. 29 als Differentialgleichung der Flächen constanten Doppelverhältnisses die Gleichung:

$$(ff)^2-k(ee)(gg)=0,$$

und für die Weingarten'schen Flächen die Differentialgleichung:

$$(ff)^2-(ee)(gg)=0.$$

§. 8. **Beziehungen in der Tangentialebene.**

32. Es sei eine Fläche unter der Gleichungsform

$$z=f(x,y)$$

gegeben und es seien dann in bekannter Weise $p, q; r, s, t$ die ersten und zweiten Differentialquotienten von z nach x und y, und die dritten Differentialquotienten seien:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=r_1, \quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial x}=r_2=s_1, \quad \frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial y}=t_1=s_2, \quad \frac{\partial t}{\partial y}=t_2 \tag{37}$$

Die Gleichung der Normale der Fläche ist:

$$a\equiv(y+qz)p_{14}-(x+pz)p_{24}+(py-qx)p_{34}+pp_{23}+qp_{31}-p_{12}=0. \tag{38}$$

Wir nehmen nun an, dass das Coordinatensystem so gewählt sei, dass die xy-Ebene die Fläche im Anfangspunkte berührt, und dass die beiden anderen Coordinatenebenen Hauptebenen seien. Dann ist $x=y=z=0$, $p=q=s=0$. Setzt man diese Werthe in die Differentialquotienten nach x und y der Gleichung 38) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} a\equiv p_{12}, \quad b\equiv -p_{24}+rp_{23}, \quad c\equiv p_{14}+tp_{31} \\ e\equiv r_1p_{23}+r_2p_{31}, f\equiv(r-t)p_{34}+s_1p_{23}+s_2p_{31}, \; g\equiv t_1p_{23}+t_2p_{31} \end{array}\right\} \tag{39}$$

Da hier $\alpha_1=\infty$, $\alpha_2=0$ ist, so ergeben sich nach Art. 14 die Gleichungen der Begleitcomplexe als:

$$C^1\equiv(abcefx)=0, \qquad C^2\equiv(abcfgx)=0,$$

wobei aber für $a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa, e_\varkappa, f_\varkappa, g_\varkappa, x_\varkappa$ die Plücker'schen Coordinaten zu setzen sind. Diese Gleichungen geben demnach entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} C^1 \equiv t(r-t)r_1 p_{23} + r(r-t)r_2 p_{31} + (r_1 s_2 - r_2 s_1)p_{12} + \\ (r-t)(r_2 p_{14} - r_1 p_{24}) = 0 \\ C^2 \equiv t(r-t)\, t_1 p_{23} + r(r-t)\, t_2 p_{31} + (t_1 s_2 - t_2 s_1)\, p_{12} + \\ + (r-t)\,(t_2 p_{14} - t_1 p_{24}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Das Doppelverhältniss der beiden Begleitcomplexe berechnet sich als:

$$\delta = \frac{r_1 t_2}{r_2 t_1}$$

33. Der Verbindungslinie $\mathfrak{t}$ des Punktes m mit seinem Nachbarpunkte m' entsprechen die vier Tangenten $\mathfrak{t}_\nu, \tau_\nu$, welche der Normale a' von m' zugehören; zwischen $\mathfrak{t}$ und diesen vier Tangenten bestehen vier Projectivitäten, welche wir jetzt ausdrücken wollen.

Setzen wir die Fläche in derselben speciellen Lage zum Coordinatensysteme wie im vorigen Artikel voraus, so ist in der Gleichung 3′) des Art. 2, welche die schneidenden Nachbarnormalen gibt, $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = 0$, und der Complex, welcher nach Art. 5 die Geraden $\mathfrak{t}_1, \tau_2$ enthält, hat die Gleichung $edx + fdy = 0$, derjenige, welcher $\mathfrak{t}_2, \tau_1$ enthält, die Gleichung $fdx + gdy = 0$, wenn noch $x = u$, $y = v$ gesetzt wird.

Nach den Formeln 39) übergehen diese Gleichungen respective in

$$(r_1 p_{23} + r_2 p_{31})dx + ((r-t)p_{34} + s_1 p_{23} + s_2 p_{31})dy = 0$$
$$((r-t)\, p_{34} + s_1 p_{23} + s_2\, p_{31})\, dx + (t_1 p_{23} + t_2 p_{31})\, dy = 0.$$

Schneiden die Geraden $\mathfrak{t}_1, \tau_1$ auf der y-Axe die Stücke $\mathfrak{t}_1, \tau_1$ ab, dann ist für diese Geraden

$$p_{34} = -1,\ p_{31} = 0 \quad \text{und} \quad p_{23} = \mathfrak{t}_1,\ \text{respective}\ p_{23} = \tau_1;$$

werden diese Werthe in die letzten Gleichungen eingesetzt, so folgen, wenn $\dfrac{dy}{dx} = \mathfrak{t}$ gesetzt wird, die Gleichungen, welche die Projectivitäten ausdrücken:

für die Projectivität $(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_1)$: $r_1\mathfrak{t}_1+(t-r+r_2\mathfrak{t}_1)\mathfrak{t}=0$

„ $(\mathfrak{t}, \tau_1)$: $t-r+r_2\tau_1+t_1\tau_1\mathfrak{t}=0.$

Sind analog $\mathfrak{t}_2, \tau_2$ die respectiven Abschnitte der Tangenten t_2, τ_2 auf der x-Axe, so ist für diese Geraden

$$p_{34}=1, \quad p_{23}=0 \quad \text{und} \quad p_{31}=\mathfrak{t}_2, \text{ respective } p_{31}=\tau_2,$$

und es ergibt sich:

für die Projectivität $(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_2)$: $r-t+t_1\mathfrak{t}_2+t_2\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}=0$

$(\mathfrak{t}, \tau_2)$: $r_2\tau_2+(r-t+t_1\tau_2)\mathfrak{t}=0.$

34. Wir bezeichnen nun auch die Durchstosspunkte der Geraden t_ν, τ_ν mit der Tangentialebene mit $\mathfrak{t}_\nu, \tau_\nu$ und suchen die constructive Beziehung dieser Punkte zu einander auf.

Durch Elimination von $\mathfrak{t}$ aus den Gleichungen der Projectivitäten $(\mathfrak{t}, \tau_\nu)$ erhält man die Gleichung

$$r_2\tau_1-t_1\tau_2=r-t.$$

Construirt man den Punkt w, dessen Coordinaten sind: $x=\tau_2$, $y=\tau_1$, so erhält man daher als dessen Ort eine gerade Linie W. Dieselbe geht durch die Durchstosspunkte der Hauptbrennlinien mit der Tangentialebene; sie liegt demnach auf dem Mannheim'schen Paraboloid.

Da die Punkte $\mathfrak{t}_1, \tau_2$ auf den Geraden t_1, τ_2, also auf conjugirten Polaren des Begleitcomplexes C^1 liegen, so ist ihre Verbindungslinie ein Complexstrahl, der durch den Nullpunkt der Tangentialebene bezüglich C^1 geht. Die Hauptbrennlinien sind auch conjugirte Polaren des Complexes, daher liegt dieser Nullpunkt auf der Geraden W. Sind w_ν die Nullpunkte der Tangentialebene bezüglich der Begleitcomplexe C^ν, so besteht demnach zwischen den Punkten $\mathfrak{t}_\nu$, τ_ν die Beziehung, wie sie durch Fig. 1 veranschaulicht wird. Diese Beziehung folgt übrigens auch aus den zu Anfang des Art. 29 angegebenen Eigenschaften der Erzeugenden der Schaar (H) des Mannheim'schen Paraboloids.

Aus der zuletzt abgeleiteten Gleichung und aus der Gleichung der Projectivität $(\mathfrak{t}, \tau_2)$ folgt:

$$\mathfrak{t} = -\frac{\tau_2}{\tau_1},$$

daher steht die Tangente $\mathfrak{t}$ der Fläche, welcher die Brennlinien $\mathfrak{t}_\nu$, τ_ν entsprechen, senkrecht auf der Geraden *mw*.

Die Durchstosspunkte i_1 der Inflexionstangenten des Hauptpunktes 1 mit der Tangentialebene sind die Doppelpunkte der Involution, deren Paare die Punkte $\mathfrak{t}_1$, τ_1 sind. Diese Involution ist aber bestimmt durch das Paar m, H_1 und durch ihren Mittelpunkt $\mathfrak{w}_1$, wesshalb diese Durchstosspunkte nach Fig. 2 construirt werden können, indem man die Involution auf W, welche H_1, H_2 als Paar und w_1 als Mittelpunkt hat, zu Hilfe nimmt. Die Linien $\mathfrak{i}_1$ sind die Inflexionstangenten zweiter Stufe (s. Art. 27) des Punktes m.

Der Punkt auf $\mathfrak{t}$, dessen Ordinate $\mathfrak{t}_1$ ist, beschreibt bei variablem $\mathfrak{t}$ eine Gerade W_1, welche durch H_1 geht und auf der Geraden W_1 senkrecht steht. Daher besteht zwischen den Punkten $\mathfrak{t}_\nu$, τ_ν auch die Beziehung, welche in Fig. 3 angegeben ist. Um nun die Punkte i_1 zu finden, für welche $\mathfrak{t}_1$, τ_1 zusammenfallen, hat man ein rechtwinkeliges Dreieck zu finden mit dem Scheitel m, dessen andere Ecken auf W_1 und W liegen und dessen Hypothenuse auf der y-Axe senkrecht steht. Zu dem Ende verfahre man folgendermassen (s. Fig. 4): Ist l_2 der Schnittpunkt von W_1 mit der x-Axe, so beschreibe man über $l_2 H_2$ als Durchmesser den Kreis, dieser schneide die y-Axe in zwei Punkten s; die Inflexionstangenten zweiter Stufe sind dann parallel zu $l_2 s$ und die Punkte i_1 liegen auch auf den durch w_1 zu $H_2 s$ gezogenen Parallelen.

Liegt der Nullpunkt w_ν ausserhalb der Strecke H_1, H_2, so ist die Centrafläche im Hauptpunkte 1 hyperbolisch gekrümmt. Das Doppelverhältniss der Begleitcomplexe ist das der Punkte w_ν gegen die Punkte H_ν. Man ersieht, dass bei positivem Doppelverhältnisse beide Schalen der Centrafläche gleich gekrümmt sind, bei negativem entgegengesetzt gekrümmt.

Bei Weingarten'schen Flächen fallen die Punkte w_ν zusammen, daher bestehen die Beziehungen, wie sie in Fig. 5 dargestellt sind; es gibt zwei Tangenten $\mathfrak{t}$, zu welchen dieselben Punkte $\mathfrak{t}_\nu$ gehören, sie trennen die Linien $\mathfrak{i}$ harmonisch. Es ist auch die Beziehung, welche zwischen einer Tangente $\mathfrak{t}$ und ihren entsprechenden Punkten $\mathfrak{t}_\nu$, τ_ν besteht, eingezeichnet.

§. 9. Die Krümmungsgrössen der Centrafläche.

35. Die conjugirten Polaren der unendlich fernen Geraden u der Tangentialebene des Punktes m bezüglich der Complexe des Büschels, das durch die Begleitcomplexe bestimmt ist, erfüllen die Regelschaar (H) des Mannheim'schen Paraboloids. Denn diese Schaar enthält u und ferner die Hauptbrennlinien, da diese die singulären Complexe des Büschels sind. Auf dem Mannheim'schen Paraboloid liegen demnach die Geraden G_ν, welche die conjugirten Polaren von u bezüglich der Begleitcomplexe C^ν sind; sie mögen „die Begleitgeraden des Punktes m“ genannt werden. Sie enthalten die Nullpunkte der zu a senkrechten Ebenen, also auch die obigen Punkte w_ν; sie sind Durchmesser der Complexe oder parallel zu den Axen derselben.

Nach Art. 29 bestimmen die Hauptbrennlinien als Paar und die Geraden G_1, u als zweites Paar eine Involution auf dem Mannheim'schen Paraboloid, deren Doppelstrahlen, auf die Tangentialebene des Punktes 1 projicirt, die Inflexionstangenten dieses Punktes geben. Daher sind die Hauptebenen $\mathfrak{O}_{1\rho}$ des Punktes 1 das Rechtwinkelpaar der Ebeneninvolution, welche aus der Normale $\mathfrak{a}_1$ diese Strahleninvolution des Paraboloids projicirt. Die Punkte, in welchen die Ebenen dieses Rechtwinkelpaares das Mannheim'sche Paraboloid berühren, sind dann nach Art. 28 die Hauptpunkte $\mathfrak{o}_{1\rho}$ des Punktes 1.

Sind also die Normalen $\mathfrak{a}_1$ und die Begleitgeraden G_ν des Punktes m gegeben, so können die Hauptpunkte und die Hauptebenen der Centrafläche in den Punkten ν construirt werden. Die Geraden G_ν sind aber, da sie die Normalen $\mathfrak{a}_\nu$ schneiden, durch ihre Richtungen Γ_ν bestimmt. Man kann daher alle Grössen zweiter Ordnung, die Projectivitäten zwischen den Brennlinien der Normale a, die Hauptpunkte und Hauptebenen der Centrafläche construiren, wenn die Richtungen Γ_ν der Axen der Begleitcomplexe gegeben sind.

Es seien die Geraden G_ν gegeben, sie schnitten die Normale $\mathfrak{a}_\nu$ im Punkte m_ν und die andere Normale $\mathfrak{a}_{\nu'}$ im Punkte μ_ν; m_ν, μ_ν seien auch gleichzeitig die Abstände dieser Punkte von dem Fusspunkte der Normale $\mathfrak{a}_\nu$, auf welcher sie liegen. Es sei ferner η_ν der Schnittpunkt der Hauptbrennlinie H_ν mit der Normale $\mathfrak{a}_{\nu'}$ und η_ν sein Abstand vom Punkte ν'.

Nun bestimmt die Schaar (H) auf den Normalen $\mathfrak{a}_\nu$ projectiv-ähnliche Punktreihen, in welchen den Punkten η_1, 2, μ_1, m_2 die Punkte 1, η_2, m_1, μ_2 entsprechen. Wählt man, wie dies in Fig. 6 geschehen ist, die Ebene $a\mathfrak{a}_2$ als Aufrissebene, $a\mathfrak{a}_1$ als Kreuzrissebene, so laufen daher die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt. Sind x_ν die Abstände entsprechender Punkte von den Punkten ν, so besteht die Relation:

$$\frac{x_1}{\eta_2} + \frac{x_2}{\eta_1} = 1. \tag{41)}$$

Die Haupttangenten $H_{1\varrho}$ des Punktes 1 sind aber nach dem eben Gesagten das Rechtwinkelpaar der Strahleninvolution J_2, welche durch die Paare a, H_1 und $\mathfrak{a}_1, G_1'$ bestimmt ist; denn $\mathfrak{a}_1, G_1'$ sind die Aufrissprojectionen der Geraden u, G_1, welche bezüglich des Complexes C^1 conjugirt sind. Daher können diese Haupttangenten u. A. so construirt werden, wie in Fig. 6 angegeben ist: Man beschreibe den Kreis über 1 2 als Durchmesser und fälle von 2 auf H_1 die Senkrechte; verbindet man den Schnittpunkt q von G_1' mit dieser Senkrechten mit dem Mittelpunkte des Kreises, so schneidet diese Verbindungslinie den Kreis in Punkten der Haupttangenten des Punktes 1. Die Schnittpunkte $w_{1\varrho}$ dieser Haupttangenten haben dann als entsprechende in der projectiv-ähnlichen Punktreihe auf $\mathfrak{a}_1$ die Hauptpunkte $\mathfrak{o}_{1\varrho}$.

36. Ist φ der Winkel, den eine beliebige Brennlinie des Punktes 1 mit a einschliesst, so ist für die Linien a, H_1; $\mathfrak{a}_1, g_1'$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0, \quad \frac{\eta_1}{d}; \quad \infty, \frac{\mu_1}{d},$$

wobei d der Abstand der beiden Hauptpunkte 1, 2 von einander ist. Daher gilt für ein beliebiges Paar der Involution J_2 die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi\left(\operatorname{tg}\varphi - \frac{\alpha_1}{d}\right) + \lambda\left(\operatorname{tg}\varphi - \frac{\mu_1}{d}\right) = 0;$$

für das Rechtwinkelpaar der Involution ergibt sich $\lambda = \frac{d}{\mu_1}$, so dass für dasselbe die Gleichung gilt:

$$\operatorname{tg}^2\varphi - \left(\frac{\eta_1}{d} - \frac{d}{\mu_1}\right)\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0.$$

Setzt man $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{d}$, so geht diese Gleichung über in:

$$x_2^2 - \left(\frac{\eta_1}{d} - \frac{d}{\mu_1}\right) d \,.\, x_2 - d^2 = 0$$

und ihre Wurzeln sind die Abscissen der Punkte $w_{1\rho}$. Wendet man daher die Substitution 41) an, so erhält man die Gleichung:

$$x_1^2 - x_1 \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\eta_1 + \frac{d^2}{\mu_1}\right) + d^2 \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} \frac{\eta_1 - \mu_1}{\mu_1} = 0,$$

deren Wurzeln die Abscissen der Punkte $\mathfrak{o}_{1\rho}$ sind, welche den Punkten $w_{1\rho}$ entsprechen, oder die Hauptkrümmungsradien r_ρ^1 des Punktes 1 sind.

Beachtet man noch, dass $\eta_1 m_1 = (\eta_1 - \mu_1)\eta_2$ ist, weil m_1, μ_2 entsprechende Punkte der projectivähnlichen Punktreihen sind, so folgt für diese Krümmungsradien die Gleichung:

$$r^2 - r\frac{\eta_2}{\eta_1} d\left(\frac{\eta_1}{d} + \frac{d}{\mu_1}\right) + \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{m_1}{\mu_1} d^2 = 0.$$

Man hat daher die Gleichungen:

$$r_1^1 + r_2^1 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{\eta_1}{d} + \frac{d}{\mu_1}\right) d; \quad r_1^1 r_2^1 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{m_2}{\mu_1} d^2; \qquad 41)$$

ebenso erhält man für die Hauptkrümmungsradien des Hauptpunktes 2 die Gleichungen:

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}\left(\frac{\eta_2}{d} + \frac{d}{\mu_2}\right) d; \quad r_1^2 r_2^2 = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{m_2}{\mu_1} d^2 \qquad 42)$$

37. Aus diesen Gleichungen ergibt sich die Relation, welche zwischen den Krümmungsradien r_ρ^ν und dem Doppelverhältnisse δ der Normale a besteht.

Die Punkte m_1, μ_2 sind die Nullpunkte der durch $\mathfrak{a}_1$ gehenden, zu a senkrechten Ebene bezüglich der Begleitcomplexe, da sie auf den Begleitgeraden liegen, und $1, \eta_2$ sind die Schnittpunkte mit den Hauptbrennlinien, welche die Leitlinien der den Complexen gemeinsamen Congruenz sind; daher ist das Doppelverhältniss der Begleitcomplexe gleich dem Doppelverhältnisse dieser Punkte, also:

$$\delta = \frac{m_1(\mu_2 - \eta_2)}{\mu_2(m_1 - \eta_2)}.$$

Nun ist wegen der projectivähnlichen Punktreihen

$$\frac{\mu_2 - \eta_2}{m_1 - \eta_2} = \frac{m_2}{\mu_1};$$

daher ist

$$\delta = \frac{m_1 m_2}{\mu_1 \mu_2};$$

aus den Gleichungen 41) und 42) ergibt sich demnach:

$$\delta = \frac{r_1^1 r_2^1 r_1^2 r_2^2}{d^4}$$

oder anders ausgedrückt:

Das Product der Krümmungsmasse der Centrafläche in den beiden Hauptpunkten eines Flächenpunktes multiplicirt mit dem Doppelverhältnisse dieses Punktes und der vierten Potenz des Abstandes dieser Hauptpunkte von einander ist gleich 1:

$$\delta K_1 K_2 d^4 = 1.$$

Es ist dieser Satz eine Verallgemeinerung eines Halphen'schen Satzes. Für Weingarten'sche Flächen gilt nämlich nach Halphen[1] die Gleichung

$$K_1 K_2 = \frac{1}{d^4},$$

welche aus der obigen folgt, da nach Art. 29 für diese Flächen $\delta = 1$ ist.

38. Die Strecke $r_1^1 + r_2^1$ lässt sich leicht construiren. Wenn $\varkappa_1$ der Schnittpunkt von $\mathfrak{a}_2$ mit der Brennlinie γ_1' ist, welche auf g_1' in 1 senkrecht steht, so ist die Strecke

$$\overline{\eta_1 \varkappa_1} = \eta_1 + \frac{d^2}{\mu_1}$$

[1] Siehe Halphen, Théorème concernant les surfaces dont les rayons etc. Bull. de la soc. math., t. IV, p. 94.

Daher ist

$$r_1^1 + r_2^1 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\eta_1 + \frac{d^2}{\mu_1}\right) = \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \overline{\eta_1 \varkappa_1}\,,$$

also ist $r_1^1 + r_2^1$ gleich der Strecke $\overline{1k}$, wenn k_1 dem Punkte $\varkappa_1$ in den projectivähnlichen Punktreihen entspricht.

Bestimmt man in der Schaar (H) diejenige Gerade γ_1, deren Aufrissprojection γ_1' ist, so ist ihre Kreuzrissprojection identisch mit der Geraden $2k_1$, daher:

Die Erzeugende der Regelschaar (H), welche vom Hauptpunkte ν aus unter rechtem Winkel gegen die Begleitgerade G_ν gesehen wird, schneidet die Normale a_ν in einem Punkte, welcher von dem Hauptpunkte ν die Entfernung $r_1^\nu + r_2^\nu$ hat.

Ist $r_1^1 + r_2^1 = 0$, ist also die Centrafläche im Hauptpunkte 1 eine Minimalflache, so muss die Gerade γ_1 mit der Hauptbrennlinie H_1 identisch sein, und umgekehrt: Ist γ_1 senkrecht zu H_1, so ist $r_1^1 + r_2^1 = 0$. Nun ist G^1 parallel zur Axe des Complexes C^1; wenn diese Axe senkrecht zu H_1 ist, muss sie die Gerade H_2 schneiden, weil diese H_1 conjugirt ist; es folgt demnach der Satz:

Die Centrafläche ist dann und nur dann in einem Punkte eine Minimalfläche, wenn die Axe des Begleitcomplexes dieses Punktes senkrecht steht zur Hauptbrennlinie desselben, oder anders ausgedrückt: wenn diese Axe die Hauptbrennlinie des anderen Hauptpunktes, der mit dem ersten auf derselben Flächennormale liegt, schneidet.

§. 10. In zweiter Ordnung berührende Congruenzen.

39. Wir kehren nun noch einmal zu einer allgemeinen Congruenz zurück und sagen, dass sich zwei Congruenzen in einem gemeinsamen Strahle berühren, wenn er für beide dieselben Brennpunkte und Brennebenen hat, dass sie sich in zweiter Ordnung berühren, wenn die sechs Projectivitäten P, Π, P_ν, J_ν für beide Congruenzen übereinstimmen.

Die den Grössen a, b, c, e, f, g entsprechenden Grössen für die zweite Congruenz seien a', b', c', e', f', g'. Sollen sich beide Congruenzen berühren, so müssen die Complexe a', b', c' die aus den Brennlinien bestehende Regelschaar, welche den Complexen

a, b, c angehört, gemein haben; es müssen daher die a', b', c' aus den a, b, c linear abgeleitet sein. Sind dann ferner zwei von einander verschiedene der sechs Projectivitäten für beide Congruenzen dieselben, so haben sie dieselben Hauptbrennlinien, wobei also der Fall, dass die Projectivitäten P_ν zusammenfallen, vorderhand ausgeschlossen sein mag.

Diese Behauptung erweist sich sofort daraus, dass die Hauptbrennlinien in den Projectivitäten P, Π, J_ν dem Strahle a und in den Projectivitäten P_ν einander zugehören. Nur der Fall, dass z. B. $J_1' \equiv J_1$ und $P' \equiv P$ wäre, ist noch näher zu betrachten. Es ist hier zunächst $H_1' \equiv H_1$, dass aber auch $H_2' \equiv H_2$ ist, folgt daraus, dass in der Projectivität P den Doppelstrahlen von J_1 Brennlinien von (2) entsprechen, die durch a und H_2 harmonisch getrennt sind; in der That ist für diese Doppelstrahlen, die Inflexionstangenten, nach Formel 25): $\mathfrak{t}_1 = \pm\sqrt{\beta_1}$, daher ist für die entsprechenden Strahlen von (2) nach Art. 17: $\mathfrak{t}_2 = \pm\frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1}}$; diese Strahlen haben also die Gleichung:

$$\pm\frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1}}(ax) + 4\Delta^2 H_2 = 0$$

und trennen folglich a und H_2 harmonisch.

4. Es gilt ferner: Sind drei der sechs Projectivitäten P, Π, P_ν, J_ν für einen Strahl, in dem sich zwei Congruenzen berühren, für beide Congruenzen dieselben, so coincidiren auch die übrigen, und die Congruenzen berühren sich in zweiter Ordnung.

Setzen wir zunächst voraus, dass die Projectivitäten P_ν von einander verschieden seien.

Die Involutionen J_2 sind nach Gleichung 26) bestimmt durch die Gleichung des Complexes zweiten Grades:

$$16\Delta^4 H_\nu^2 - \beta_\nu (ax)^2 = 0\,;$$

die Projectivitäten P und Π nach Formel 23) und 24) durch die Gleichung des Complexes zweiten Grades:

$$16\Delta^4 H_1 H_2 - \beta_\nu (ax)^2 = 0\,;$$

die Projectivitäten P_ν sind durch die Begleitcomplexe gegeben, deren Gleichungen nach Formel 19) sind:

$$H_1 - H_2 = 0, \quad \beta_1 H_2 - \beta_2 H_1 = 0.$$

Damit nun die sechs Projectivitäten der ersten Congruenz mit denen der zweiten Congruenz übereinstimmen, müssen die Identitäten bestehen:

$$\begin{gathered}
H_\nu'^2 - \gamma_\nu'(a'x)^2 = \mu_\nu (H_\nu^2 - \gamma_\nu (ax)^2) \\
H_1' H_2' - \gamma_\nu'(a'x)^2 = \xi_\nu (H_1 H_2 - \gamma_\nu (ax)^2) \\
H_1' - H_2' = \chi_1 (H_1 - H_2) \\
\gamma_1' H_2' - \gamma_2' H_1' = \chi_2 (\gamma_1 H_2 - \gamma_2 H_1).
\end{gathered}$$

Nun ist $(a'x) = \sigma(ax)$, und ferner sind nach Obigem, da drei der Projectivitäten übereinstimmen, die Hauptbrennlinien identisch, so dass $H_\nu' = \rho_\nu H_\nu$ ist, daher ergeben sich die Identitäten:

$$\rho_\nu^2 H_\nu^2 - \varepsilon_\nu' (ax)^2 = \mu_\nu (H_\nu^2 - \varepsilon_\nu (ax)^2)$$

und vier weitere Identitäten.

Es müsste also eine Identität von der Form:

$$H_\nu^2 = k(ax)^2$$

bestehen; da dies nicht der Fall, so muss

$$\rho_\nu^2 = \mu_\nu \qquad \text{und} \qquad \varepsilon' = \mu_\nu \varepsilon_\nu$$

sein, oder

$$\rho_\nu^2 \varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu'. \tag{43)}$$

Aus den weiteren Identitäten ergeben sich ferner die Gleichungen:

$$\rho_1 \rho_2 \varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu', \quad \rho_1 = \rho_2, \quad \rho_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2' = \rho_2 \varepsilon_1' \varepsilon_2. \tag{43)}$$

Diese Gleichungen müssen erfüllt sein, wenn die sechs Projectivitäten beider Congruenzen übereinstimmen sollen; dies ist aber der Fall, wenn bloss drei dieser Gleichungen bestehen, womit unsere Behauptung erwiesen.

41. Fallen die Projectivitäten P_ν einer Congruenz zusammen welchen Fall wir oben ausgeschlossen haben, so sind die Geraden jedes Paares t_1, τ_2 Leitlinien einer den Begleitcomplexen gemeinsamen Congruenz und können als Hauptbrennlinienpaar für eine berührende Congruenz genommen werden, so dass in diesem Falle, wenn für beide Congruenzen die Projectivitäten P_ν in eine

zusammenfallen, die Hauptbrennlinien noch von einander verschieden sein können.

Ist $\beta_1 = \beta_2$, fallen also die Projectivitäten P_ν zusammen und wäre die zweite Congruenz so gewählt, dass sie dieselben Hauptbrennlinien hätte, wie die gegebene, dass also $H'_\nu = \rho_\nu H_\nu$ wäre, so gehen die Relationen 43), da vermöge $\beta_1 = \beta_2$ auch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ und $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \varepsilon'$ wird, über in:

$$\rho_\nu^2 \varepsilon = \varepsilon', \qquad \rho_1 \rho_2 \varepsilon = \varepsilon', \qquad \rho_1 = \rho_2 .$$

Ist für die zweite Congruenz der Begleitcomplex derselbe, ist somit:

$$H'_1 - H'_2 = \chi (H_1 - H_2),$$

so ist $\rho_1 = \rho_2$, und die letzten Relationen fallen in die eine

$$\rho_1^2 \varepsilon = \varepsilon'$$

zusammen. Wenn demnach hier die Begleitcomplexe der beiden Congruenzen und die Hauptbrennlinien übereinstimmen, und wenn die letzte Relation erfüllt ist, d. h. wenn eine der vier übrigen Projectivitäten für beide Congruenzen dieselbe ist, so fallen auch die letzten drei Projectivitäten zusammen.

Daher fallen diese Projectivitäten auch zusammen, wenn wir nur annehmen, dass die Begleitcomplexe zusammenfallen und auch eine der Projectivitäten $P (\equiv \Pi)$, J_ν; denn unter dieser Voraussetzung coincidiren, wie man leicht sieht, die Hauptbrennlinien. Es gilt demnach der im vorigen Artikel ausgesprochene Satz auch für Congruenzstrahlen mit zusammenfallenden Begleitcomplexen.

§. 11. Flächenberührung dritter Ordnung.

42. Setzen wir wie im Art. 32 eine Fläche unter der Gleichungsform $z = f(xy)$ und unter der speciellen Lage zum Coordinatensysteme voraus, so ist die Bedingung dafür, dass eine zweite Fläche $z = f'(xy)$ dieselbe im Anfangspunkte in dritter Ordnung berührt, die, dass für ihre Differentialquotienten neben $p' = q' = s' = 0$ die Relationen bestehen:

$$r' = r, \quad t' = t, \quad r'_\nu = r_\nu, \quad t'_\nu = t_\nu .$$

Bestehen diese Beziehungen, so ist aus den Gleichungen 40) der Begleitcomplexe der ersten Fläche ersichtlich, dass sie auch die Begleitcomplexe der zweiten Fläche sind; aber auch umgekehrt gilt: Fallen die Begleitcomplexe des Punktes m der gegebenen Fläche nicht zusammen, so berührt in m eine zweite Fläche in dritter Ordnung, wenn sie für die Hauptpunkte von m dieselben Begleitcomplexe hat, wie die gegebene; denn ist dies der Fall, so bestehen die Proportionen:

$$\left.\begin{aligned} r'_1 s'_2 - r'_2 s'_1 : r'_1 : r'_2 &= r_1 s_2 - r_2 s_1 : r_1 : r_2 \\ t'_1 s'_2 - t'_2 s'_1 \quad t'_1 \quad t'_2 &= t_1 s_2 - t_2 s_1 \quad t_1 \quad t_2 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Aus diesen Proportionen folgt:

$$(s'_2 - s_2)\, r_1 - (s'_1 - s_1)\, r_2 = 0$$
$$(s'_2 - s_2)\, t_1 - (s'_1 - s_1)\, t_2 = 0\,;$$

da nun nach Voraussetzung die gegebene Fläche von einander verschiedene Begleitcomplexe hat, so dass das Doppelverhältniss dieser Complexe von 1 verschieden ist, so ist auch $r_1 t_2 - r_2 t_1 \neq 0$, es muss also $s'_\nu = s_\nu$ sein. Desshalb sind auch die übrigen Differentialquotienten einander gleich, und die Flächen berühren einander in dritter Ordnung.

Man kann daher auch sagen: Wenn die Flächen sich in dritter Ordnung berühren, so sind die Projectivitäten P'_ν identisch mit den Projectivitäten P_ν und umgekehrt. Nun entsprechen in der Projectivität Π der Normale a die Hauptbrennlinien H_ν, also die Strahlen a, H_1 den Strahlen H_2, a, und speciell bei Normalencongruenzen (nach Art. 29) entsprechen sich noch die zur Normale senkrechten Brennlinien. Ist somit $P'_\nu = P_\nu$, worauf dann $H'_\nu = H_\nu$ wird, so ist auch $\Pi' = \Pi$: Wenn also die Begleitcomplexe beider Flächen übereinstimmen, so ist auch $\Pi' = \Pi$. Nach dem Satze des Art. 40 stimmen dann auch die weiteren drei Projectivitäten J_ν, P beider Flächen überein, und es folgt demnach:

Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte in dritter Ordnung, so berühren sich ihre Normalencongruenzen in der gemeinsamen Normale in zweiter Ordnung und umgekehrt.

Wenn allgemeiner zwei beliebige der fünf Projectivitäten P, P_ν, J_ν übereinstimmen, so ist nach Art. 39 $H'_\nu = H_\nu$; es folgt, wie oben, da sich die zu a senkrechten Brennlinien in der Projectivität Π entsprechen, dass $\Pi' = \Pi$ ist, wesshalb nach Art. 40 auch die übrigen Projectivitäten übereinstimmen:

Sind zwei der fünf Projectivitäten P, P_ν, J_ν für beide Flächen dieselben, so berühren sich die Flächen in dritter Ordnung. Hierin ist Herrn Mannheim's Satz[1] enthalten: Zwei Flächen berühren einander in dritter Ordnung, wenn sich ihre Centraflächen in beiden Schalen osculiren.

Zu bemerken ist, dass sich die Parallelflächen gleichen Abstandes zweier Flächen, welche sich in dritter Ordnung berühren, auch in dritter Ordnung berühren, da die Normalensysteme für Parallelflächen dieselben sind.

43. Ist in den obigen Entwickelungen $r_1 t_2 - r_2 t_1 = 0$, fallen mithin die Begleitcomplexe der gegebenen Fläche zusammen, so fallen auch die Proportionen 44), welche aussagen, dass der Begleitcomplex der zweiten Fläche mit dem der gegebenen identisch ist, in die erste Proportion zusammen, aus welcher sich wieder die Gleichung:

$$(s'_2 - s_2)\, r_1 - (s'_1 - s_1)\, r_2 = 0$$

ergibt, so dass die Gleichungen bestehen:

$$\frac{t'_1 - t_1}{r'_2 - r_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{r'_2}{r'_1} = \frac{t'_2}{t'_1}\,. \tag{45}$$

Wird also r'_1 angenommen, so können hieraus die r'_2, t'_ν berechnet werden, ohne dass die zweite Fläche die gegebene in dritter Ordnung berührt. Aus Fig. 1 ist hiezu ersichtlich: Sind die Begleitcomplexe von einander getrennt, so sind es auch die Nullpunkte w_ν der Tangentialebene, ihre Verbindunglinie W schneidet die Hauptbrennlinien und bestimmt sie hienach, wodurch dann ferner die Projectivität Π gegeben ist; fallen aber die Punkte w_ν zusammen, so kann jede Gerade durch den Nullpunkt als Gerade W angenommen werden, es kann für die Fläche ein jedes Paar von Brennlinien, welches bezüglich des Begleitcomplexes

---

[1] Siehe Mannheim, Recherches géom. sur le contact de 3ième ordre. Compt. rend., t. 74, p. 929.

conjugirt ist, als Hauptbrennlinienpaar genommen werden. Haben aber beide Flächen dasselbe Hauptbrennlinienpaar, so folgt nach Art. 41, dass sich dann die Normalencongruenzen in zweiter Ordnung berühren. Dann berühren sich die Flächen in dritter Ordnung; denn nach Formel 41) schneiden die Hauptbrennlinien auf den Haupttangenten des Punktes m die Stücke: $\frac{r-t}{s_1}$, $\frac{t+r}{s_2}$ ab. Sollen demnach die Hauptbrennlinien für beide Flächen übereinstimmen, so muss $s'_\nu = s_\nu$ sein, woraus nach den Formeln 45) folgt, dass auch $r'_1 = r_1$, $t'_2 = t_2$ ist: Zwei Weingarten'sche Flächen berühren einander demnach in einem Punkte in dritter Ordnung, wenn sie in ihm denselben Begleitcomplex haben und für einen Hauptpunkt dieselbe Hauptbrennlinie.

Die Function, welche die Abhängigkeit der Hauptkrümmungsradien bei einer Weingarten'schen Fläche angibt, legt ferner die Projectivität P, also die Hauptbrennlinien fest, wesshalb auch folgt: Zwei Weingarten'sche Flächen, deren zugehörige Functionen dieselben sind, berühren einander in einem Punkte in dritter Ordnung, wenn sie in ihm denselben Begleitcomplex haben.

Soll in einem Punkte einer gegebenen Fläche eine andere in dritter Ordnung berühren, so muss das Doppelverhältniss der beiden Flächenpunkte übereinstimmen, daher: Die Punkte, in denen eine Fläche von Weingarten'schen Flächen in dritter Ordnung berührt wird, liegen auf der Curve vom Doppelverhältnisse 1; um dann die Punkte zu finden, in welchen eine bestimmte Weingarten'sche Fläche mit gegebener Function in dritter Ordnung berührt, hat man diese Curve zu schneiden mit derjenigen, welche Ort der Punktes ist, für den ein Hauptkrümmungsradius in dieser Function von dem anderen abhängt, z. B. für Minimalflächen mit der Curve von Punkten mit aufeinander senkrechten Inflexionstangenten.

44. Sind die Nullpunkte w_ν der Tangentialebene des Punktes m bezüglich der Begleitcomplexe für beide Flächen dieselben, so stimmen die Begleitcomplexe der Flächen überein; dies ist auch der Fall, wenn die Nullpunkte der unendlich fernen Ebene bezüglich der Begleitcomplexe, die Begleitrichtungen Γ_ν (s. Art. 35)

für beide Flächen dieselben sind; dann berühren sich die Flächen in dritter Ordnung. Es ist demnach die nicht invariante Form der 4fachen Bedingung der Flächenberührung dritter Ordnung, welche durch die Gleichheit der dritten Differentialquotienten ausgedrückt ist, durch die invariante 4fache Bedingung der Übereinstimmung der Begleitrichtungen ersetzt.

Diese invariante Beziehung lässt sich aber auch, wie folgt, analytisch formuliren. Die Complexe a, b, c, r der ersten Normalencongruenz haben die Hauptbrennlinien H_ν gemein; bei Berührung dritter Ordnung der zweiten Fläche muss auch der Complex r' der zweiten Congruenz diese Linien H_ν enthalten. Der Complex r' muss daher aus den Complexen a, b, c, r linear abgeleitet sein, wesshalb die Determinanten der Matrix $|abcrr'|$ verschwinden müssen.

Ferner müssen, wenn Berührung dritter Ordnung stattfinden soll, die Begleitcomplexe übereinstimmen, es müssen die Identitäten:

$$(a'b'c'r's^{\nu\prime}x) \equiv \rho\,(a\,b\,c\,r\,s^\nu x)$$

bestehen. Da aber a', b', c', r' sich linear aus den a, b, c, r ableiten, so folgt:

$$(a\,b\,c\,r\,s^{\nu\prime}x) \equiv \sigma(a\,b\,c\,r\,s^\nu x);$$

zur Erfüllung dieser Beziehung ist aber nothwendig und hinreichend, dass

$$(a\,b\,c\,r\,s^\nu s^{\nu\prime}) = 0$$

sei. Es folgt demnach:

Sollen sich zwei Flächen in einem Punkte, in welchem sie schon Hauptpunkte und Hauptebenen gemein haben, in dritter Ordnung berühren, so ist hiezu nothwendig und hinreichend, dass die 2fache invariante Bedingung erfüllt sei, nämlich dass die Determinanten der Matrix $|abcrr'|$ verschwinden und dass die beiden invarianten Gleichungen $(abcrs^\nu s^{\nu\prime}) = 0$ bestehen. Quadrirt man die letzte Gleichung, so übergeht sie wegen der Formeln 2) und 8) auch in $|bcs^\nu s^{\nu\prime}|^2 = 0$.

Ist das Doppelverhältniss des Punktes m gleich 1, so bestehen die Relationen $(abcrs^1s^2) = 0$ und $(abcrs^1s^{2\prime}) = 0$, wesshalb sich s^2 linear aus a, b, c, r, s^1 und $s^{2\prime}$ linear aus $a, b, c, r, s^{1\prime}$

ableitet; daher ist die Gleichung $(abcrs^2s^{2\prime}) = 0$ eine Folge der Gleichung $(abcrs^1s^{1\prime}) = 0$, wesshalb sich die obigen Bedingungen auf das Verschwinden der Determinanten der Matrix $|abcrr'|$ und die Gleichung $|bcs^1s^{1\prime}|^2 = 0$ reduciren.

45. Es ist hier vielleicht am Platze, einer Fläche zu gedenken, welche bezüglich ihrer Grössen dritter Ordnung in einem einfachen Zusammenhange mit der gegebenen Fläche steht. Zwei Flächen, welche in einem gemeinsamen Punkte dieselben Hauptpunkte und Hauptebenen haben, können nämlich auch in der Beziehung zu einander stehen, dass sie für die gemeinsame Normale zwar dieselben Begleitcomplexe haben, dass aber demselben Hauptpunkte für verschiedene Flächen auch von einander verschiedene Begleitcomplexe zugeordnet sind. Hiezu müssen analog den Proportionen 44) die Proportionen bestehen:

$$r'_1 s'_2 - r'_2 s'_1 : r'_1 : r'_2 = t_1 s_2 - t_2 s_1 : t_1 : t_2,$$
$$t'_1 s'_2 - t'_2 s'_1 \quad t'_1 : t'_2 = r_1 s_2 - r_2 s_1 : r_1 : r_2;$$

aus ihnen folgt $s'_\nu = s_\nu$; aber ferner:

$$r'_1 = \frac{r_1 t_2}{t_2}, \quad t'_2 = \frac{r_1 t_2}{t_1}$$

Ist die eine Fläche gegeben, so kann demnach die andere mit verkehrten Begleitcomplexen bestimmt werden. Das Doppelverhältniss der neuen Fläche ist das reciproke des Doppelverhältnisses der gegebenen

$$\bar{\delta} = \frac{r_2 t_1}{r_1 t_2},$$

und für die Krümmungsmasse in ihren Hauptpunkten gilt nach Art. 37 der Satz:

$$d^4 K_1 . K_2 = \delta.$$

Das Product der 8 Hauptkrümmungsradien der Centraflächen zweier zu einander in dieser Beziehung stehenden Flächen ist demnach gleich der achten Potenz des Abstandes der Hauptpunkte von einander.

§. 12. Flächen zweiten Grades.

46. Ist die Gleichung einer allgemeinen Fläche in der Form $F(xyz) = 0$ vorgelegt und sind F_i, F_{ik}, F_{ikl} die ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten von F nach xy, so ist:

$$\left.\begin{array}{ll} F_{11}+rF_3=0, & F_{22}+tF_3=0, \\ F_{111}+3F_{13}r+F_3r_1=0, & F_{222}+3F_{23}t+F_3t_2=0, \\ F_{112}+F_{23}r+F_3r_2=0, & F_{221}+F_{13}t+F_3t_1=0. \end{array}\right\} \quad 46)$$

Für eine Fläche zweiten Grades F^2 ist nun $F_{ikl}=0$, daher ergibt sich:

$$3F_{13}r+F_3r_1=0, \quad 3F_{23}t+F_1t_2=0, \quad F_{23}r+F_3r_2=0,$$
$$F_{13}t+F_3t_1=0;$$

führt man die hieraus folgenden Werthe von r_ν, t_ν in den Werth des Doppelverhältnisses δ, wie er sich in Art. 32 als $\delta=\frac{r_1t_2}{r_2t_1}$ ergab, so folgt:

Das Doppelverhältniss eines Punktes einer Fläche zweiten Grades oder einer ihrer Parallelflächen ist 9.

Um das Product der Krümmungsmasse der Centrafläche in den beiden Hauptpunkten eines Flächenpunktes zu bestimmen, müssen wir den Werth des Doppelverhältnisses $\delta=\frac{m_1m_2}{\mu_1\mu_2}$, der in Art. 37 gefunden wurde, bestimmen, d. h. entscheiden, ob der Ausdruck $\frac{m_1m_2}{\mu_1\mu_2}$ den Werth 9 oder $\frac{1}{9}$ hat. Da m_1 die Abscisse des Punktes von $\mathfrak{a}_1$ ist, dessen Nullebene bezüglich des Complexes C^1 (s. Formel 40) senkrecht zu a ist, so genügt m_1 der Gleichung

$$-t(r-t)r_1+(r_1s_2-r_2s_1)\,rm_1+r(r-t)r_1=0;$$

analoge Gleichungen erhält man für m_2, μ_1, μ_2, so dass sich ergibt:

$$m_1=\frac{(r-t)^2}{r_1s_2-r_2s_1}r_1, \quad \mu_1=\frac{(r-t)^2}{s_1t_2-s_2t_1}r_2;$$
$$m_2=\frac{(r-t)^2}{s_1t_2-s_2t_1}t_2, \quad \mu_2=\frac{(r-t)^2}{r_1s_2-r_2s_1}t_1,$$

und schliesslich:

$$\frac{m_1m_2}{\mu_1\mu_2}=\frac{r_1t_2}{r_2t_1}=\delta=9.$$

Demnach gilt nach Art. 37:

Für die Krümmungsmasse der Centrafläche in den beiden Hauptpunkten einer Normale einer F^2 besteht die Relation

$$9 d^4 K_1 K_2 = 1,$$

ein Resultat, welches sich auch schon bei Halphen, l. c. S. 96 vorfindet.

47. Wir wollen den Satz, dass das Doppelverhältniss der F_2 den Werth 9 hat, noch in anderer Weise ableiten, wobei sich auch andere Sätze ergeben werden.

Es sei die Gleichung der F_2 in der Form vorgelegt:

$$F(xyz) \equiv k^2 x^2 - y^2 + 2z(a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4) = 0;$$

fällt die Tangente t der F_2 mit der Erzeugenden e_1 des Punktes m, deren Gleichung $y - kx = 0$ ist, zusammen, so entspricht ihr eine Tangente τ_1 der Centrafläche, welche mit ε_1 bezeichnet werden möge. Der Abschnitt ε_1 von ε_1 auf der y-Axe ergibt sich nach der Formel des Art. 33 aus der Gleichung:

$$t - r + r_2 \varepsilon_1 + t_1 \varepsilon_1 k = 0,$$

mit Hilfe der Formeln des vorigen Artikels als

$$\varepsilon_1 = \frac{r - t}{r_2 + k t_1} = \frac{F_3 (F_{11} - F_{22})}{F_{23} F_{11} + k F_{13} F_{22}} = - \frac{a_4 (1 + k^2)}{(a_1 - a_2 k) k}.$$

Dieser Werth von ε_1 hat aber auch noch eine andere Bedeutung. Bestimmt man nämlich die Normale des Punktes, dessen Coordinaten

$$x = \frac{a_4}{a_1 - a_2 k}, \quad y = \frac{-k a_4}{a_1 - a_2 k}, \quad z = 0$$

sind, welcher auf der anderen Erzeugenden e_2 des Punktes m liegt, so fällt diese in die xy-Ebene und schneidet auf der y-Axe das Stück ε_1 ab, so dass sie die obige Gerade ε_1 schneidet: die Gerade ε_1, welche der Erzeugenden e_1 als τ_1 entspricht, ist demnach diejenige Brennlinie, welche auf dem Normalenparaboloid der anderen Erzeugenden ε_2 liegt oder wegen der Bedeutung der Linie τ_1 als Schnittlinie aufeinander folgender Hauptebenen: Die Hauptebenen eines Punktes der F^2 werden von den Hauptebenen des auf einer Erzeugenden liegenden Nachbarpunktes in Erzeugenden des Normalenparaboloids der anderen Erzeugenden geschnitten.

In der Projectivität (t, τ_1) entsprechen demnach den beiden Erzeugenden e_1, e_2 der Fläche die beiden Brennlinien $\varepsilon_2, \varepsilon_1$, welche

Erzeugende der Normalenparaboloide für e_2, e_1 sind; ferner entspricht der einen Haupttangente h_1 von F_2 die Normale a. Folglich entsprechen sich auch die Hesse'schen Covarianten der Tripel $a, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ und h_1, e_2, e_1. Nun sind[1] die Inflexionstangenten der Centrafläche der F^2 die Hesse'sche Covariante der drei Strahlen $a, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, daher sind die Geraden t, welche diesen Inflexionstangenten in der vorliegenden Projectivität entsprechen, die Hesse'sche Covariante des Tripels e_1, e_2, h_1.

Erinnern wir uns der Definition der Inflexionstangenten zweiter Stufe eines Flächenpunktes im Art. 25, so ergibt sich eben Gesagten:

Die Inflexionstangenten zweiter Stufe eines Punktes einer Fläche zweiten Grades sind die Hesse'schen Covarianten der beiden Tripel, welche aus dem Erzeugendenpaar und aus einer Haupttangente des Punktes bestehen.

Zwei solche Paare, wie diese Hesse'schen Covarianten der beiden Tripel e_1, e_2, h_1 und e_1, e_2, h_2, bei welchen h_1, h_2 von e_1, e_2 harmonisch getrennt ist, sind aber, wie man leicht zeigt, vier Strahlen vom Doppelverhältnisse 4; daher ergibt sich für das Doppelverhältniss δ' der Inflexionstangenten zweiter Stufe oder der Nachbarnormalen, die einen Hauptpunkt auf einer Inflexionstangente der Centrafläche haben, der Werth $\delta' = 4$. Es folgt also nach Formel 28) für das Doppelverhältniss des Punktes F^2 der Werth $\delta = 9$.

48. Soll in einem Punkte einer beliebigen Fläche eine F^2 in dritter Ordnung berühren, so muss sein Doppelverhältniss zunächst 9 sein (s. Art. 43); dann berührt dort jedenfalls

---

[1] Siehe meine Inauguraldissertation: Über die Centrafl. algebr. Flächen etc. Nova Acta der k. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher, Bd. LII, Nr. 6, oder auch: Über das Normalensystem und die Centraflächen der F^2, II. Mitth., diese Sitzungsber., Bd. 97, S. 583, 1888; dort wurde auch gezeigt, dass die Tangentialebene eines Punktes der Centrafläche die Complexkegel desselben bezüglich zweier Complexe zweiten Grades in den Inflexionstangenten berührt, so dass die Centrafläche oder die desmische Fläche vierter Ordnung zwölfter Classe, als Integralfläche zweier Complexe zweiten Grades angesehen werden kann; es wird dies in Verbindung mit der Bestimmung der Inflexionstangentencurven der desmischen Fläche noch näher zu betrachten sein.

eine Parallelfläche einer F^2 in dritter Ordnung, da ja das Doppelverhältniss einer solchen Fläche auch 9 ist. Da es eine Bedingung für eine solche Fläche ist, selbst eine F^2 zu sein, so gibt es auf der Curve vom Doppelverhältnisse 9 eine discrete Anzahl von Punkten, in denen eine F^2 in dritter Ordnung berührt.[1]

Es gibt ein Büschel (F^2) von F^2, welche mit der gegebenen F^2 dieselben Erzeugenden e_1, e_2 und die zu ihnen benachbarten Erzeugenden e'_1, e'_2 gemein haben, welche also das windschiefe Vierseit e_1, e_2, e'_1, e'_2 enthalten oder die gegebene F^2 längs der beiden Erzeugenden e_1, e_2 berühren. Diese Flächen haben für e_1, e_2 dieselben Normalenparaboloide, welche sich in den Hauptpunkten von F^2 berühren. Daher sind für diese Flächen die Brennlinienpaare $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, welche diesen Paraboloiden angehören, identisch, wesshalb auch die Hesse'schen Covarianten der Tripel $a, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ oder die Inflexionstangenten der Centrafläche übereinstimmen. Da sich demnach die Centraflächen osculiren, so berühren sich nach Art. 42 die F^2 in dritter Ordnung. Wir können also sagen:

Es gibt eine discrete Anzahl von Punkten auf einer Fläche, welche auf der Curve vom Doppelverhältnisse 9 liegen, in denen die Flächen eines Büschels zweiter Ordnung in dritter Ordnung berühren; die Flächen dieses Büschels berühren sich längs der Erzeugenden des Punktes. In einem beliebigen Punkte der Curve vom Doppelverhältnisse 9 berühren Parallelflächen der Flächen eines solchen Büschels in dritter Ordnung.

49. Die Bestimmung der asymptotischen Curven der Centrafläche einer F^2 führt bei centrischen Flächen zur Multiplication elliptischer Functionen mit einer complexen sechsten Einheitswurzel; denn die Integration der Differentialgleichung der Inflexionstangenten zweiter Stufe der gegebenen F^2 erscheint durch diese complexe Multiplication gelöst. Sind nämlich λ, μ Parameter, welche auf je einer der

---

[1] Herr Hermite hat zuerst gezeigt (Cours d'analyse, p. 149), dass letztere Punkte nicht eine Curve erfüllen, wie man aus der Anzahl 10 der für die F^2 zu erfüllenden Bedingungen vielleicht erwarten könnte, sondern in discreter Anzahl vorhanden sind, wobei aber in jedem der Punkte $\infty^1 F^2$ in dritter Ordnung berühren; vergl. auch Halphen, Sur le contact des surfaces, Bull. de la soc. math., t. III, p. 28.

Regelschaaren der F^2 ausgebreitet sind, so ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{L}} = \pm \frac{d\mu}{\sqrt{M}},$$

wobei L und M dasselbe Polynom vierten Grades in λ, respective μ, vorstellen. Die Verzweigungserzeugenden, welche den Wurzeln der Gleichungen $L = 0$, $M = 0$ entsprechen, sind die acht Erzeugenden der Fläche, welche die Krümmungslinien berühren, also die Umbilicalerzeugenden der Fläche, welche den unendlich fernen imaginären Kugelkreis schneiden und je drei Kreispunkte der F^2 enthalten.

Ein Paar der Inflexionstangenten zweiter Stufe ist nun nach Art. 47 durch die Hesse'sche Covariante des Tripels, welches aus den beiden Erzeugenden, deren Differentialform:

$$d\lambda\, d\mu$$

ist und aus einer der Haupttangenten mit der Differentialform:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{L}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{M}}$$

besteht. Die Hesse'sche Covariante des Productes dieser Formen ist:

$$\frac{d\lambda^2}{L} + \frac{d\mu^2}{M} \pm \frac{d\lambda . d\mu}{\sqrt{L}\sqrt{M}},$$

die Differentialform der Inflexionstangenten zweiter Stufe. Aus dieser ergibt sich als Differentialgleichung der Curven, welche von den Inflexionstangenten der zweiten Stufe berührt werden:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{L}} + \varepsilon \frac{d\mu}{\sqrt{M}} = 0, \qquad 47)$$

wobei ε eine der complexen sechsten Einheitswurzeln ist, womit die obige Behauptung erwiesen.

Diese Differentialgleichung gibt nur dann ein algebraisches Integral, wenn die quadratische Invariante g_2 der Verzweigungsform L verschwindet, wenn also das Doppelverhältniss der vier Umbilicalerzeugenden einer Regelschaar der F^2 äquianharmonisch ist. Es ist dies das Doppelverhältniss der vier unendlich fernen

Punkte dieser Erzeugenden auf dem unendlich fernen Kegelschnitte der Fläche oder das Doppelverhältniss des Axencomplexes der F_2; es kann „Doppelverhältniss der F^2“ genannt werden.[1]

Wenn $g_2 = 0$ ist, das Doppelverhältniss der F^2 demnach eine complexe dritte Einheitswurzel ist, so sind die Integralcurven der Differentialgleichung 47) algebraisch; allerdings ist dann die F^2 und ihre Centrafläche imaginär, aber man kann leicht eine reelle Fläche vierter Classe construiren, welche reelle algebraische asymptotische Curven hat. Zwei Punkte eines Kreises, deren Abstand gleich dem Radius des Kreises ist, sind nämlich auf dem Kreise zu den unendlich fernen Kreispunkten äquianharmonisch; legt man daher durch den Kreis eine F^2 mit imaginären Erzeugenden und nimmt in der Ebene des gegebenen Kreises einen Kreis, welcher die beiden Punkte enthält, als Masskegelschnitt an, so hat die F^2 in dieser Massbestimmung eine Centrafläche mit reellen algebraischen asymptotischen Curven.

50. Ist $g_2 = 0$, so lässt sich die Differentialgleichung 47) schreiben:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3-1}} = \varepsilon \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^3-1}} = \pm \frac{d\mu'}{\sqrt{\mu'^3-1}},$$

so dass sich ergibt, dass die Integralcurven Curven vierter Ordnung sind, welche dieselben Erzeugenden wie die Krümmungslinien berühren. Wir werden demnach zu untersuchen haben, wieso es möglich ist, dass hier acht Erzeugende der Fläche von mehr als einer Schaar von C^4 berührt werden.

Sind 4 λ-Erzeugende projectiv 4 μ-Erzeugenden, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Erzeugenden in einer Ebene; die 4 λ-Erzeugenden können aber bei allgemeinem Doppelverhältnisse noch in drei anderen Weisen projectiv den 4 μ-Erzeugenden zugeordnet werden, und jede dieser Projectivitäten gibt wieder 4 Schnittpunkte der Erzeugenden, welche in einer Ebene liegen. Für einen Kegelschnitt, der durch die 4 Schnittpunkte der Erzeugenden, die in einer der vier so entstehenden Ebenen

[1] Vergl. meine Arbeit: Über das Normalensyst. und die Centrafl. der F^2. I. Mitth., diese Sitzungsber., Bd. 95, S. 549.

liegen, geht, als Masskegelschnitt, hat die F^2 Krümmungslinien, welche die 8 Erzeugenden berühren; das Tetraeder der 4 Ebenen ist das gemeinsame Polartetraeder von F^2 und diesem Kegelschnitte.

Wenn nun die 4 λ-Erzeugenden äquianharmonisch sind, so lassen sie sich in 12 verschiedenen Weisen auf die projectiven μ-Erzeugenden beziehen, so dass sich 12 Ebenen von 3 Polartetraedern ergeben; die Ebenen jedes Tetraeders enthalten die 16 Schnittpunkte der 8 Erzeugenden. Bei einer äquianharmonischen F^2 ergeben sich demnach in drei verschiedenen Massbestimmungen drei von einander verschiedene Schaaren von Krümmungslinien, welche die 8 Umbilicalerzeugenden berühren. Man kann daher sagen: Die C^4, welche bei der äquianharmonischen F^2 von den Inflexionstangenten zweiter Stufe berührt werden, sind Schaaren von Krümmungslinien für zwei gewisse Massbestimmungen.

Sind die 4 λ-Erzeugenden harmonisch, so kann man sie in 8facher Weise auf die projectiven μ-Erzeugenden beziehen, so dass sich zwei Polartetraeder ergeben und zwei Schaaren von C^4, welche alle 8 Erzeugenden berühren. Bei einer harmonischen F^2 liegt der Kreispunkt eines bestimmten Hauptschnittes auf einer axialen Kreisebene, welche zu dem Hauptschnitte senkrecht ist; die 8 Kreispunkte, welche ausserhalb dieses Hauptschnittes liegen, befinden sich in zwei Ebenen, welche zu diesem Hauptschnitte parallel sind. Von den hier auftretenden Schaaren von C^4, welche die Umbilicarerzeugenden berühren, wird die eine Schaar von den Krümmungslinien gebildet, die andere enthält die Integralcurven der Differentialgleichung:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{L}} \pm i\,\frac{d\mu}{\sqrt{M}} = 0;$$

eine Curve dieser Schaar hat in einem Punkte der F^2 eine Tangente, welche dem Paare angehört, das gleichzeitig das Erzeugendenpaar und das Haupttangentenpaar dieses Punktes harmonisch trennt.

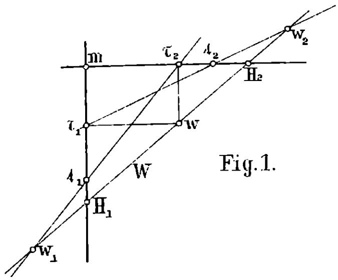

Fig. 1.

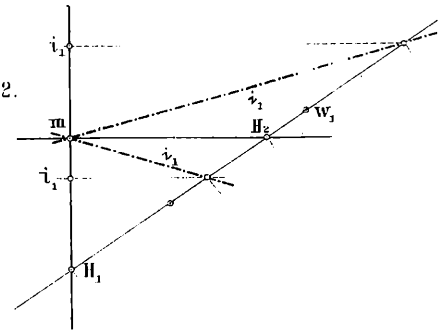

Fig. 2.

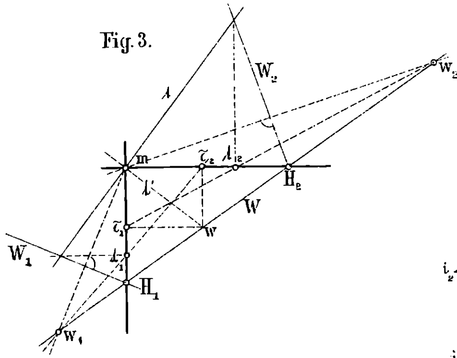

Fig. 3.

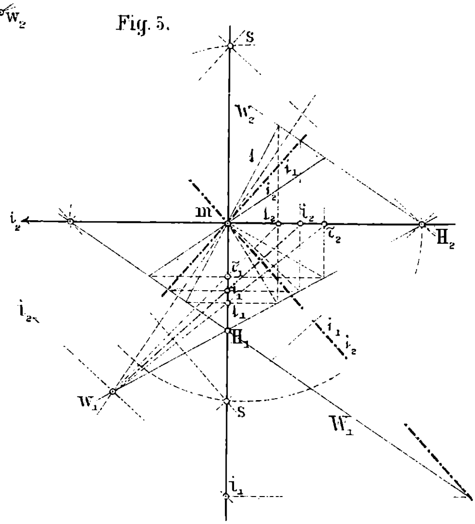

Fig. 5.

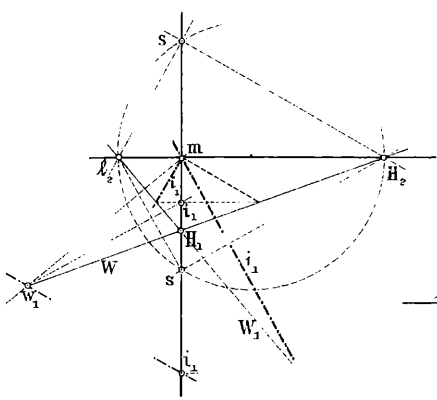

Fig. 4.

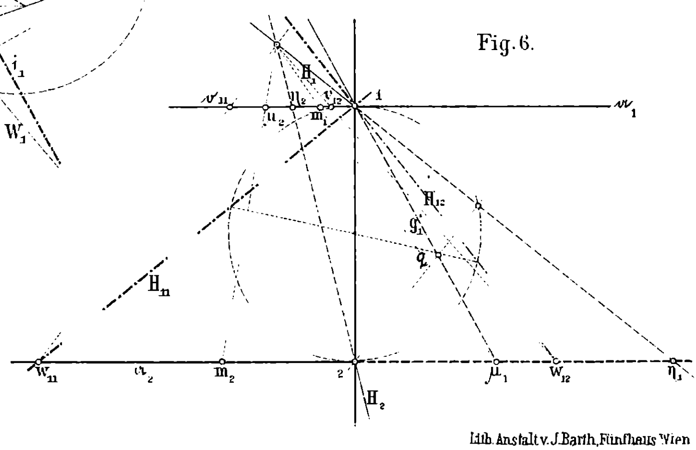

Fig. 6.

Lith. Anstalt v. J. Barth, Fünfhaus Wien