©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die Ringfunctionen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Die Kugelfunctionen erster und zweiter Art $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ bilden einerseits ein Fundamentalsystem von Integralen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

anderseits sind sie, abgesehen von constanten Factoren, die Näherungsnenner und Restfunctionen der regulären Kettenbruchentwicklung der Function $\log\frac{1+x}{1-x}$. Aus der letzten Eigenschaft folgt für die Kugelfunctionen zweiter Art sofort das zuerst von Herrn F. E. Neumann in seiner Abhandlung „Über eine Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach den Laplace'schen Y^n fortschreiten und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotationsellipsoides, welcher durch vertheilende Kräfte bewirkt wird"[1] aufgestellte Integral

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(y)\,dy}{x-y}.$$

Dasselbe führt unmittelbar zu der zuerst von Herrn E. Heine[2] bewiesenen Entwicklung

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 37. Bd., S. 21—50.

[2] „Theorie der Anziehung eines Ellipsoides." Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 42. Bd.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{1}{x-y}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\,Q_n(x)\,P_n(y),$$

welche besteht, so lange die durch den Punkt y gelegte Ellipse mit den Brennpunkten -1 und $+1$ von der confocalen durch x gehenden eingeschlossen wird. Ausser der eben angeführten bemerkenswerthen Entwicklung der Function $\frac{1}{x-y}$, welche ein interessantes Seitenstück zu der Darstellung derselben durch eine für alle dem absoluten Betrage nach unterhalb x liegenden y giltige geometrische Reihe bildet, hat Herr E. Heine in der zweiten Auflage seines wichtigen „Handbuches der Kugelfunctionen" noch folgende zwei weitere, innerhalb desselben Bereiches wie die erwähnte Kugelfunctionenreihe geltende Darstellungen für dieselben angegeben

$$\frac{1}{x-\cos y}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left\{1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(x-\sqrt{x^2-1})^n\cos ny\right\}$$

$$\frac{1}{x-\cos y}=2\sum_{n=0}^{n=\infty}(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}\frac{\sin(n+1)y}{\sin y}$$

Eine andere derselben Kategorie angehörige Entwicklung stellte Herr C. Neumann im Jahre 1864 in seiner interessanten Schrift: „Zur Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe" auf. Da die reciproke Entfernung zweier Punkte mit den dipolaren Coordinaten ρ, ϑ, φ und $\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1$, deren man sich bei der Behandlung der auf das Potential eines Ringes bezüglichen Aufgaben mit Vortheil bedient, durch den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{\cos i\vartheta-\cos\rho}\,\sqrt{\cos i\vartheta_1-\cos\rho_1}}{r\sqrt{2}\sqrt{\cos i\vartheta\cos i\vartheta_1+\sin i\vartheta\sin i\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)-\cos(\rho-\rho_1)}}$$

gegeben ist, so wurde er bei der erwähnten Untersuchung zunächst auf die Aufgabe geführt, einen Ausdruck von der Form $\frac{1}{\sqrt{x-\cos y}}$ nach den Cosinus der Vielfachen von y zu entwickeln. Hiebei ergab sich ein allerdings erst von Herrn E. Heine im Jahre 1880

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ausdrücklich hervorgehobenes, äusserst bemerkenswerthes Resultat. Verallgemeinert man nämlich die Definition der Kugelfunctionen zweiter Art dadurch, dass man auch gebrochene Indices zulässt, so lässt sich die von Herrn C. Neumann gefundene Formel in folgender Weise schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{x-\cos y}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(x) \cos ny,$$

so dass also der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}}$ einerseits bei der Entwicklung nach steigenden Potenzen von α die Kugelfunctionen erster Art mit ganzzahligen Indices liefert, während anderseits seine Entwicklung nach den Cosinus der Vielfachen von φ zu den Kugelfunctionen zweiter Art mit Indices, welche ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind, führt. Diese verallgemeinerten Kugelfunctionen zweiter Art und die in gleicher Weise erweiterten Kugelfunctionen erster Art nennt man wegen ihrer Beziehung zu dem Potential eines Ringes Ringfunctionen zweiter, beziehungsweise erster Art. Eigenschaften derselben wurden a. a. O. von den Herren C. Neumann und E. Heine, sodann von dem englischen Mathematiker Hicks[1] und von Herrn Hugo Hübschmann[2] abgeleitet.

Da die Functionen $C_n^\nu(x)$ und $D_n^\nu(x)$, welche bekanntlich ein Fundamentalsystem von Integralen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-x^2)y''-(2\nu+1)xy'+n(n+2\nu)y=0$$

bilden und deren erste einerseits der mit einer Constanten multiplicirte n^{te} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1}F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$, anderseits der Coëfficient von α^n in der Entwicklung der Function

[1] „On toroidal functions," Philosophical Transactions of the royal society of London. Vol. 173, Part. III, p. 609—653. 1881.

[2] „Die Ringfunctionen und ihre Anwendung auf die elektrostatischen Probleme des Ringes."

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$\frac{1}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^\nu}$ nach steigenden Potenzen von α ist, die naturgemässe Verallgemeinerung der beiden Arten von Kugelfunctionen bilden, so wird man durch zweckmässige Verallgemeinerung ihrer Definition zu einer entsprechenden Erweiterung der Ringfunctionen gelangen, und es wird durch die Untersuchung dieser allgemeineren Functionen auf die gewöhnlichen Ringfunctionen nicht nur ein neues Licht geworfen werden, sondern auch ähnlich, wie bei den Kugelfunctionen, die Ermittlung ihrer Eigenschaft meistens in einfacherer Weise als bisher erfolgen können. Eine solche geeignete Ausdehnung ergibt sich durch die Entwicklung einer Potenz des Bruches $\frac{1}{x-y}$ nach den Functionen $C_n^\nu(x)$, in der alle bisher erwähnten Darstellungen als specielle Fälle enthalten sind, wodurch auch der zwischen diesen bestehende innige Zusammenhang aufgedeckt wird. Diese Entwicklung soll im ersten Paragraph der vorliegenden kurzen Mittheilung aufgestellt werden, während in den folgenden einige Relationen und Sätze über die verallgemeinerten Ringfunctionen enthalten sind.

§. 1. Die Functionen $D_n^\nu(x)$ wurden von mir durch folgende Gleichung definirt

$$D_n^\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Pi(n+2\nu+2\lambda-1)}{2^{n+2\lambda+1}\,\Pi(n+\nu+\lambda)\,\Pi(\lambda)\,x^{n+2\nu+2\lambda}} \qquad (|x|>1)$$

$$= \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+1}\,\Pi(n+\nu)\,x^{n+2\nu}} F\left(\frac{n}{2}+\nu, \frac{n+1}{2}+\nu, n+\nu+1, x^{-2}\right),$$

wo n, wie in den folgenden Entwicklungen, eine ganze nicht negative Zahl vorstellt. Da der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck einen Sinn behält, so lange keine der Zahlen $n+2\nu-1$ und $n+\nu$ negativ ganzzahlig ist, so kann man die dem unteren Index dieser Function auferlegte Beschränkung fallen lassen und unter demselben irgend eine reelle Zahl verstehen, für welche die angegebene Reihe convergirt.

Es besteht nun, wie ich früher gezeigt habe,[1] für $|x|>1$ die Gleichung

[1] „Zur Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$." Denkschr. der k. Akad. der Wissenschaften, mathem.-naturw. Cl., 48. Bd.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(y)\,dy}{(x-y)^{\nu+\rho}} = \frac{\Pi(\nu-1)\Pi(\nu+\rho+n-1)\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+1}\Pi(n+\nu)\Pi(n)\Pi(\nu+\rho-1)} \cdot$$

$$\left[\frac{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 \frac{1}{x^{n+\nu+\rho}} F\left(\frac{n+\nu+\rho}{2}, \frac{n+\nu+\rho+1}{2}\, n+\nu+1, x^{-2}\right).$$

Verbindet man dieselbe mit der letzten Relation, so gelangt man sofort zu der Formel

$$D_{n+\nu-\rho}^{\rho}(x) = \frac{\Pi(n)\,\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{\nu-\rho}\Pi(\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(y)\,dy}{(x-y)^{\nu+\rho}} \quad (|x| > 1) \qquad 1)$$

Dieses Integral führt wegen der Relation

$$\int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(y)\, C_m^\nu(y)\, dy =$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Pi(n+2\nu-1)\,\delta_{n,m}}{(n+\nu)\,\Pi(n)} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 \quad (\delta_{m,n} = 0,\ m \gtrless n;\ \delta_{n,n} = 1)$$

zu der Entwicklung

$$\frac{1}{(x-y)^{\nu+\rho}} = \frac{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)}{\Pi(\nu+\rho-1)} \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu)\, D_{n+\nu-\rho}^{\rho}(x)\, C_n^\nu(y), \qquad 2)$$

welche, wie man leicht zeigen kann, für alle der Bedingung

$$|y - \sqrt{y^2-1}| < (x - \sqrt{x^2-1})$$

genügenden Werthepaare x, y gilt.

Setzt man in dieser allgemeinen Formel der Reihe nach $\rho = 1-\nu, \nu, \frac{1}{2}$; $\nu = \frac{1}{2}, 1, 0$, und berücksichtigt die Gleichungen

$$C_n^1(\cos y) = \frac{\sin(n+1)y}{\sin y}$$

$$\left[\frac{1}{\nu}\, C_n^\nu(\cos y)\right]_{\nu=0} = \frac{2}{n} \cos ny,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so erhält man die bemerkenswerthen speciellen Relationen

$$\frac{1}{x-y} = 2^{2\nu}\Pi(\nu-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)D^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(x)\,C^{\nu}_{n}(y)$$

$$\frac{1}{(x-y)^{2\nu}} = \frac{2\Pi(\nu-1)}{\Pi(2\nu-1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)D^{\nu}_{n}(x)\,C^{\nu}_{n}(y)$$

$$\frac{1}{(x-y)^{\nu+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{2\nu+\frac{3}{2}}\Pi(\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)\,Q_{n+\nu-\frac{1}{2}}(x)\,C^{\nu}_{n}(y)$$

$$\frac{1}{(x-y)^{\frac{1}{2}+\rho}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\rho-\frac{1}{2}}\Pi\left(\rho-\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\,D^{\rho}_{n-\rho+\frac{1}{2}}(x)\,P_{n}(y)$$

$$\frac{1}{(x-y)^{\rho+1}} = \frac{1}{2^{\rho}\Pi(\rho)}\sum_{n=0}^{n-\infty}(n+1)\,D^{\rho}_{n-\rho+1}(x)\,\frac{\sin(n+1)y}{\sin y}$$

$$\frac{1}{(x-y)^{\rho}} = \frac{1}{2^{\rho-2}\Pi(\rho-1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}D^{\rho}_{n-\rho}(x)\cos ny. \qquad 3)$$

Die erste von diesen speciellen Gleichungen zeigt, dass die Functionen $D^{1-\nu}_{n+2\nu-1}(x)$, wie ich schon früher angegeben habe, sich von den Restfunctionen der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1}F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ nur durch constante Factoren unterscheiden, während sich aus der ersten, dritten und vierten durch passende Specialisirung von ν und ρ die im Anfange erwähnten Heine'schen und C. Neumann-Heine'schen Entwicklungen ergeben.

Benützt man die von mir aufgestellte Formel

$$C^{\nu}_{n}(x) = \frac{(-2)^{n}\Pi(n+\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\Pi(\nu-1)\Pi(2n+2\nu-1)}(1-x^{2})^{\frac{2\nu-1}{2}}\left[(1-x^{2})^{\frac{2n+2\nu-1}{2}}\right]^{(n)},$$

so kann man durch n-malige partielle Integration auf der rechten Seite der Gleichung 1) folgende Formel herleiten:

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$D^{\rho}_{n+\nu-\rho}(x) = \frac{2^{n+\rho-\nu}\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(2n+2\nu-1)}$$

$$\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{\nu}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}\,dy}{(x-y)^{n+\nu+\rho}}, \qquad 4)$$

während man mit Hilfe der Relation

$$\left[(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}\,C^{\nu+1}_{n-1}(x)\right]' = -\frac{n(n+2\nu)}{2\nu}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{n}(x)$$

die Formel

$$D^{\rho}_{n+\nu-1}(x) = \frac{\Pi(n-1)\,\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{\nu-\rho+1}\,\Pi(\nu)\,\Pi(n+2\nu)}\left[\frac{\Pi(2\nu)}{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu+1}_{n-1}(y)\,dy}{(x-y)^{\nu+\rho+1}} \qquad 5)$$

ermittelt.

Es mag übrigens bemerkt werden, dass man das in der Gleichung 1) auftretende Integral sofort aus der für die Function $D^{\rho}_{n+\nu-\rho}(x)$ angegebenen Reihe ableiten kann, indem man die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von $\frac{1}{x^2}$ durch bestimmte Integrale ausdrückt. Beachtet man nämlich, dass

$$\int_{-1}^{+1} y^{\varkappa}(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{\lambda}(y)\,dy = 0$$

ist, falls $\varkappa < \lambda$ oder $\varkappa + \lambda$ ungerade ist, während in den anderen Fällen die Beziehung

$$\int_{-1}^{+1} y^{\varkappa}(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{\lambda}(y)\,dy =$$

$$= \frac{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(\lambda+2\nu-1)}{2^{\varkappa+1}\,\Pi\left(\frac{\varkappa-\lambda}{2}\right)\Pi\left(\frac{\varkappa+\lambda}{2}\right)\Pi(\lambda)}\left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2$$

stattfindet, so kann man der erwähnten Reihe folgende Form geben

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$D^{\rho}_{n+\nu-\rho}(x) = \frac{\Pi(n)\,\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{\nu-\rho}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}$$
$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Pi(\nu+\rho+\lambda-1)}{\Pi(\lambda)\,x^{\nu+\rho+\lambda}} \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} y^{\lambda} C_n^{\nu}(y)\,dy,$$

welche unmittelbar zu dem auf anderem Wege erhaltenen Integralausdrucke führt.

Aus der Gleichung 2) ersieht man, dass die Function $D^{\rho}_{n+\nu-\rho}(x)$, welche desshalb von nun an mit $R^{\rho,\nu}_{n,2}(x)$ bezeichnet werden mag, die naturgemässe Verallgemeinerung der n^{ten} Ringfunction zweiter Art bildet; durch die Gleichung 3) würde man auf die speciellere Function

$$R^{\rho,0}_{n,2}(x) = \frac{2^{\rho-1}\,\Pi(\rho-1)}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos ny\,dy}{(x-\cos y)^{\rho}}$$
$$= \frac{2^{\rho-1}\,\Pi(n+\rho-1)}{1.3.5\ldots(2n-1)\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dy}{(x-y)^{n+\rho}}$$

geführt werden.

Zu den bisher aufgestellten Integralen für die verallgemeinerte Ringfunction zweiter Art kann man auf Grund von Relationen, welche ich früher mitgetheilt habe, sofort die drei folgenden hinzufügen

$$R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) = \frac{x^{\rho-1}}{i^{n+\nu}} \int_0^{\infty} e^{-xz} z^{\rho-1} J^{n+\nu}(iz)\,dz$$

$$R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi\left(-\frac{n+\nu+\rho+1}{2}\right)}{2^{n+\nu+1}\,\Pi\left(\frac{n+\nu+\rho}{2}-1\right)}$$
$$\int_0^{\infty} y^{\rho-1} J^{n+\nu}(y)\cos(xy)\,dy \qquad \left(\rho < \frac{3}{2}\right)$$

$$R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi\left(-\frac{n+\nu+\rho}{2}\right)}{2^{n+\nu+1}\,\Pi\left(\frac{n+\nu+\rho-1}{2}\right)} \cdot$$
$$\int_0^{\infty} y^{\rho-1} J^{n+\nu}(y)\cos(xy)\,dy \qquad \left(\rho < \frac{3}{2}\right).$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

§. 2. Differentiirt man die Gleichung 1) r-mal nach x, so erhält man die Relation

$$\frac{d^r R_{n,2}^{\rho,\nu}(x)}{dx^r} = (-2)^r R_{n,2}^{\rho+r,\nu}(x). \qquad 6)$$

Verbindet man ferner die Gleichung 5) mit den bekannten Relationen

$$2\nu(1-y^2)\, C_{n-1}^{\nu+1}(y) = (n+2\nu-1)\, C_{n-1}^{\nu}(y) - y\, C_n^{\nu}(y)$$
$$2\nu(1-y^2)\, C_{n-1}^{\nu+1}(y) = (n+2\nu)\, y\, C_n^{\nu}(y) - (n+1)\, C_{n+1}^{\nu}(y)$$

so erhält man sofort die neuen Gleichungen

$$R_{n-1,2}^{\rho+1,\nu}(x) = x R_{n,2}^{\rho+1,\nu}(x) + \frac{(n+\nu-\rho)}{2} R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) \qquad 7)$$

$$R_{n+1,2}^{\rho+1,\nu}(x) = \frac{n+\nu+\rho}{2} R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) - x R_{n,2}^{\rho+1,\nu}(x). \qquad 8)$$

Aus der Vereinigung der Gleichungen 6), 7) und 8) folgen die weiteren fünf Relationen

$$(n+\nu+\rho) R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) + (n+\nu-\rho+2) R_{n+2,2}^{\rho,\nu}(x) = 2(n+\nu+1)\, x\, R_{n+1,2}^{\rho,\nu}(x)$$
$$(n+\nu+1)\, R_{n+1,2}^{\rho,\nu}(x) = R_{n,2}^{\rho+1,\nu}(x) - R_{n+2,2}^{\rho+1,\nu}(x)$$
$$2(1-x^2) R_{n+1,2}^{\rho+1,\nu}(x) = (n+\nu+\rho) R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu-\rho+1)\, x\, R_{n+1,2}^{\rho,\nu}(x) \qquad 9)$$
$$2(1-x^2) R_{n+1,2}^{\rho+1,\nu}(x) = (n+\nu+\rho+1)\, x\, R_{n+1,2}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu-\rho+2) R_{n+2,2}^{\rho,\nu}(x)$$
$$(n+\nu+1)(1-x^2)\, R_{n+1,2}^{\rho+1,\nu}(x) =$$
$$= (n+\nu+\rho)(n+\nu+\rho+1) R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu-\rho+1)(n-\nu+\rho+2) R_{n+2,2}^{\rho,\nu}(x) \qquad 10)$$

Differentiirt man nun die Gleichung 9) nach x unter Berücksichtigung der Relationen 6) und 8), so erhält man die Beziehung

$$(1-x^2)\, R_{n+1,2}^{\rho+2,\nu}(x) + 2(2\rho+1)\, x\, R_{n+1,2}^{\rho+1,\nu}(x) +$$
$$+ 4\{(n+\nu+1)^2 - \rho^2\}\, R_{n+1,2}^{\rho,\nu}(x) = 0$$

und demnach ist die verallgemeinerte Ringfunction zweiter Art ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-x^2) y'' - (2\rho+1)\, x y' + \{(n+\nu)^2 - \rho^2\} y = 0 \qquad 11)$$

oder

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left[(1-x^2)^{\frac{2\rho+1}{2}} y'\right]' = \{\rho^2-(n+\nu)^2\}(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} y,$$

was selbstverständlich auch aus ihrer Definition durch eine hypergeometrische Reihe hätte erschlossen werden können.

Dieselbe führt einerseits sofort zu der Relation

$$R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) = \frac{2^s \Pi(n+\nu-\rho-s+1)}{\Pi(\rho-1)\,\Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(n+\nu+\rho-1)(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}}\left[(1-x^2)^{\rho+s-\frac{1}{2}} R_{n,2}^{\rho+s,\nu}(x)\right]^{(s)},$$

anderseits liefert sie, wenn man

$$2x = \xi+\xi^{-1}$$

setzt, die Gleichung

$$R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) = \frac{2^{2\rho-1}\,\Pi(\rho-1)\,\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(n+\nu)}\,\xi^{-(n+\nu+\rho)}\,F(\rho,\, n+\nu+\rho,\, n+\nu+1,\, \xi^{-2}),$$

welche mit Hilfe des Euler'schen Integrales für die hypergeometrische Reihe in die zwei folgenden umgeformt werden kann

$$R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) = \frac{(-i)^{2\rho-1}\,\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(n+\nu-\rho)}\int_0^\infty \frac{\sin^{2\rho-1} it\,dt}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos it)^{n+\nu+\rho}}$$

$$R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) = \frac{(-1)^{2\rho}\,i^{n+\nu+\rho}\,\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(n+\nu-\rho)}\int_0^{\log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} (x-\sqrt{x^2-1}\cos it)^{n+\nu-\rho}\sin^{2\rho-1} it\,dt\,.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Durch Vergleichung der Formeln 1) und 5) ergibt sich die bemerkenswerthe Relation

$$R_{n-1,2}^{\rho,\nu+1}(x) = (\nu+\rho)\, R_{n,2}^{\rho,\nu}(x).$$

Die oben aufgestellten Relationen werden aber auch von den durch die Gleichung

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2\,\Pi(n+\nu-\rho)}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho}\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi \qquad 12)$$

definirten Functionen $R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$ und $-\rho R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x)$ erfüllt, so dass die erste von ihnen ein particuläres Integral der Differentialgleichung 11) ist und demnach die den früheren Erörterungen entsprechende Verallgemeinerung der Ringfunctionen erster Art vorstellt.

Um dies zu erhärten, braucht man nur zu beweisen, dass dieselbe eine der Gleichung 6) im Wesentlichen analoge Relation und die Formeln 9) und 10) befriedigt.

Differentiirt man die Gleichung 12) nach x, so entsteht die Beziehung

$$\frac{dR_{n,2}^{\rho,\nu}(x)}{dx} = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2\,\Pi(n+\nu-\rho-1)}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho-1}(\sqrt{x^2-1}+x\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi,$$

aus welcher wegen

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho}\cos\varphi\,\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi = \frac{(n+\nu-\rho)\sqrt{x^2-1}}{2\rho}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho-1}\sin^{2\rho+1}\varphi\, d\varphi$$

die Relationen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{dR_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{dx} = 2\rho R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) \tag{13}$$

$$\sqrt{x^2-1}\, R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu-\rho)}{2^{2\rho}\Pi(\rho-1)\Pi(\rho)\Pi(n+\nu-\rho)}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho}\cos\varphi\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi \tag{14}$$

folgen.

Schreibt man in der letzten Gleichung für n: $n+1$ und multiplicirt sodann mit $2\rho\sqrt{x^2-1}$, so verwandelt sie sich in

$$2\rho(x^2-1)R_{n+1,1}^{\rho+1,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho+1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2\Pi(n+\nu-\rho)}\cdot$$
$$\left\{\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho+2}\sin^{2\rho+1}\varphi\, d\varphi - x\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho-1}\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi\right\}$$

oder nach 12):

$$2\rho(x^2-1)\, R_{n+1,1}^{\rho+1,\nu}(x) = (n+\nu-\rho+2)\, R_{n+1,1}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu+\rho+1)\, x\, R_{n+1,1}^{\rho,\nu}(x).$$

Multiplicirt man die Gleichung 13) mit $(n+\nu+\rho)(x^2-1)$, die Gleichung 14) aber mit $2\rho(n+\nu-\rho)\sqrt{x^2-1}$ und addirt die so entstehenden Relationen, so erhält man

$$\rho(n+\nu)(x^2-1)\, R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2\Pi(n+\nu-\rho-1)}$$
$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho}\sin^{2\rho-1}\varphi\left\{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi - \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}\right\} d\varphi$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und daher nach 12)

$$\rho(n+\nu)(x^2-1)\,R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) = (n+\nu-\rho)(n+\nu-\rho+1)\,R_{n+1,1}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu+\rho-1)(n+\nu+\rho)\,R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x).$$

Hiemit ist die obige Behauptung vollständig erwiesen.

Dass die Function $R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$ der Differentialgleichung 11) genügt, erkennt man übrigens sofort, wenn man beachtet, dass ein mit $R_{n,2}^{\rho,\nu}(x)$ ein Fundamentalsystem derselben bildendes particuläres Integral durch die hypergeometrische Reihe

$$x^{-(n+\nu+\rho)}F\left(\frac{n+\nu+\rho}{2}, \frac{n+\nu+\rho+1}{2}, \nu+\rho+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\Pi(2\rho-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2}\int_0^\pi \frac{\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu+\rho}}$$

angegeben wird, und dass, so lange x einen positiven reellen Theil besitzt, das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Integral durch die Substitution

$$\cos\psi = \frac{x\cos\varphi+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}$$

mit der Bedingung, dass für $\varphi=0$ auch $\psi=0$ ist, bekanntlich in das oben angeführte transformirt werden kann.

Da die Function $R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$, falls $\nu-\rho$ eine ganze Zahl ist, eine mit den Coëfficienten der Entwicklung der
51 Function $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\rho}$ nach steigenden Potenzen von α zusammenfallende ganze Function ist, so wird in dieser Mittheilung $\nu-\rho$ stets als nicht ganzzahlig vorausgesetzt.

Zum Schlusse dieses Paragraphes mag noch erwähnt werden, dass die beiden speciellen Ringfunctionen $R_{n,1}^{\rho,\frac{1}{2}}(x)$ und $R_{n,2}^{\rho,\frac{1}{2}}(x)$ im Wesentlichen mit den Functionen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{4}}}\int_\sigma \frac{\cos\frac{2\rho-1}{2}\varphi\, d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{4}}}\int_\sigma \frac{\sin\frac{2\rho-1}{2}\varphi\, d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}$$

zusammenhängen, wo die Integration über eine in der φ-Ebene gelegene geschlossene Curve σ auszudehnen ist.

Aus der Definition der verallgemeinerten Ringfunction erster Art folgt endlich die Beziehung

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(+1) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(2\rho-1)\,\Pi(n+\nu-\rho)} \tag{14a}$$

§. 3. Aus den im vorigen Paragraphe aufgestellten Relationen leitet man leicht die folgenden her:

$$\left[(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right]' = (n+\nu+\rho-1)(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\left\{R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) - x\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right\}$$

$$\left[(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right]' = (1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\left\{(n+\nu+\rho-1)\left(R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 - (n+\nu-\rho)\left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2\right\} \tag{15}$$

$$2\rho(1-x)\left\{R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) + R_{n-1,1}^{\rho+1,\nu}(x)\right\} = (n+\nu+\rho-1)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu-\rho)\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$$

$$2\rho(1+x)\left\{R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) - R_{n-1,1}^{\rho+1,\nu}(x)\right\} = (n+\nu+\rho-1)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) + (n+\nu-\rho)\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$$

$$4\rho^2(1-x^2)\left\{\left(R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x)\right) - \left(R_{n-1,1}^{\rho+1,\nu}(x)\right)^2\right\} = (n+\nu+\rho-1)^2\left(R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 - (n+\nu-\rho)^2\left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 \tag{16}$$

$$\frac{d\left\{\left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 + \left(R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2\right\}}{dx} = 2x\frac{d\left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right)}{dx} + (2\rho-1)\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x). \tag{17}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Integrirt man die Gleichung 15) innerhalb der Grenzen $+1$ und x, so entsteht die Formel

$$\int_1^x \{(n+\nu+\rho-1)(R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x))^2-(n+\nu-\rho)(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x))^2\}(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx=(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}R_{n,1}^{\rho,\nu}(x), \qquad \left(\rho<\frac{1}{2}\right)$$

welche zu folgenden neuen Relationen führt:

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\,R_{\lambda-1,1}^{\rho,}(x)}{\lambda+\nu-\rho}=(2\rho-1)\int_1^x(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{(R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x))^2}{\lambda+\nu-\rho}dx+$$
$$+\int_1^x\{(R_{0,1}^{\rho,\nu}(x))^2-(R_{n,1}^{\rho,}(x))^2\}(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx$$

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\,R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)}{\lambda+\nu+\rho-1}=(2\rho-1)\int_1^x(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)}{\lambda+\nu+\rho-1}dx+$$
$$+\int_1^x\{(R_{0,1}^{\rho,\nu}(x))^2-(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x))^2\}(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx$$

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\,R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)=2\rho\int_1^x(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}(R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x))^2dx+$$
$$+(\rho-\nu)\int_1^x(R_{0,1}^{\rho,\nu}(x))^2(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx-(n-\nu+\rho)\int_1^x(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x))^2(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} \frac{R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)}{\lambda+\nu-\rho} = (2\rho-1)\int_1^x (1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} \frac{\left(R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2}{\lambda+\nu-\rho}\, dx +$$

$$+\int_1^x \left\{ \left(R_{0,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 + 2\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} (-1)^{\lambda-1} \left(R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 + (-1)^n \left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 \right\} (1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\, dx$$

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)}{(\lambda+\nu-\rho)(\lambda+\nu+\rho-1)} = \int_1^x \left\{ \left(R_{0,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 - \frac{\left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2}{n+\nu+\rho-1} + \right.$$

$$\left. + (2\rho-2) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\left(R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2}{(\lambda+\nu+\rho-1)(\lambda+\nu-\rho+1)} \right\} (1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\, dx.$$

Aus 16) und 17) entstehen durch Integration die Beziehungen

$$\left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 + \left(R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 - 2x\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) = (2\rho-3)\int_1^x R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) + \left[\frac{\Pi(n+\nu+\rho-2)}{\Pi(2\rho-2)\,\Pi(n+\nu-\rho)}\right]^2$$

$$\int_1^x x^{\frac{2\rho-3}{2}} \left\{ R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) + R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho+1,\nu}(x) \right\} dx = \frac{x^{\frac{2\rho-1}{2}}}{2\rho}\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x).$$

Mit Hilfe des oben aufgestellten Integralausdruckes der verallgemeinerten Ringfunction beweist man ferner die folgenden Gleichungen

$$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{2^n \Pi(\mu+n-1)\Pi(n+\nu-\rho)}{\Pi(n+\nu+\rho-1)\Pi(n)} C_{r-n}^{\mu+n}(y) R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2}$$

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} C_r^\mu(y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\Pi(n+\nu-\rho) J^{\mu+\nu}(\sqrt{y}) R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^n y^{\frac{n}{2}} \Pi(n+\nu+\rho-1)\Pi(n)} = \frac{y^{\frac{\mu}{2}}}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2}\cdot$$

$$\int_0^\pi (y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{-\frac{\mu}{2}} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} J^\mu(\sqrt{y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi})\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi(n+\nu-\rho) J^{\mu-n}(\sqrt{y}) R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^n \Pi(n)\Pi(n+\nu+\rho-1) y^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2 y^{\frac{\mu}{2}}}$$

$$\int_0^\pi (y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\frac{\mu}{2}} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} J^\mu(\sqrt{y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi})\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^\sigma \frac{\Pi(r+\nu-\rho-2\sigma)\Pi(\mu+r-\sigma-1)}{2^{2\sigma}\Pi(r+\nu+\rho-2\sigma-1)\Pi(r-2\sigma)\Pi(\sigma)} R_{r-2\sigma,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{r+2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2}$$

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} C_r^\mu(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{2^n \Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(n+r+2\mu-1)\,\Pi(n+\mu-1)}{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2}$$

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho}\, C_r^\mu(x+1+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=r} (-1)^{r-n} \frac{2^n \Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(n+r+2\mu-1)\,\Pi(n+\mu-1)}{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2}\cdot$$

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho}\, C_r^\mu(x-1+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \Pi(n+\nu-\rho)\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^{2n}\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(n+\mu)} = \frac{1}{2^{2\rho-\mu-1}[\Pi(\rho-1)]^2}\cdot$$

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{-\frac{\mu}{2}+\nu-\rho}\, J^\mu(\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi})\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{\Pi(n+\nu-\rho)\, T_{r-n,\,\alpha+n,\,\beta+n}(y)\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)} = \frac{1}{2^{2\rho-1}\Pi(r)\,[\Pi(\rho-1)]^2}\cdot$$

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho}\, T_{r,\alpha,\beta}(y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{\Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(\alpha+\beta+r+n-2)\,R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^n\,\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)\,\Pi(\beta+n-1)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta+2\rho-2)}{2^{r+2\rho-1}\,\Pi(r)\,\Pi(\beta+r-1)\,[\Pi(\rho-1)]^2}\cdot$$

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho}\,T_{r,\alpha,\beta}(x+1+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\,\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=r} (-1)^n \frac{\Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(\alpha+\beta+r+n-2)\,R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^n\,\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)\,\Pi(\alpha+n-1)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta+2r-2)}{2^{r+2\rho-1}\,\Pi(r)\,\Pi(\alpha+r-1)\,[\Pi(\rho-1)]^2}\cdot$$

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho}\,T_{r,\alpha,\beta}(x-1+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\,\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi.$$

Die Functionen $R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)$ und $R_{n,2}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)$ sind particuläre Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$(1-x_1^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}-(2\rho+1)\,x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}+\frac{1}{1-x_1^2}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+(2\rho-1)\operatorname{cotang}\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right\}+\{(n+\nu)^2-\rho^2\}\,y=0.$$

Setzt man

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} A_\lambda\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi),$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so erhält man, da $C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''+(2\rho-1)\operatorname{cotang}\varphi\,.\,u'+\lambda(\lambda+2\rho-1)\,u=0$$

genügt, zur Bestimmung von A_λ als Function von x_1 die Differentialgleichung

$$(1-x_1^2)\frac{d^2A_\lambda}{dx_1^2}-(2\rho+1)\,x_1\frac{dA_\lambda}{dx_1}+\left\{(n+\nu)^2-\rho^2-\frac{\lambda(\lambda+2\rho-1)}{1-x_1^2}\right\}A_\lambda=0,$$

deren vollständiges Integral, wie man sofort mit Hilfe von 11) ableitet,

$$A_\lambda=(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\{a\,R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)+b\,R_{n,2}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)\}$$

ist. Beachtet man, dass $R_{n,2}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)$ für $x_1=1$ unendlich wird, sowie, dass das Argument $x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi$ in Bezug auf x_1 und x_2 vollkommen symmetrisch ist, so erhält man die Relation

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)\,R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_2)\,(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi),$$

wo a_λ eine Constante ist, welche durch die Gleichung

$$\int_0^\pi R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2^{2\rho-2}\Pi(\lambda+2\rho-2)\,[\Pi(\rho-1)]^2}{[\Pi(2\rho-2)]^2\,\Pi(\lambda)\left(\lambda+\rho-\frac{1}{2}\right)}\,a_\lambda(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)\,R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_2)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bestimmt ist. Nun ist aber

$$\int_0^\pi R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi=(-1)^\lambda\frac{2^{2\lambda}\left[\Pi\left(\lambda+\rho-\frac{3}{2}\right)\right]^2\Pi(\lambda+2\rho-2)}{\Pi(\lambda)\left[\Pi\left(\rho-\frac{3}{2}\right)\right]^2\Pi(2\lambda+2\rho-2)}\cdot$$

$$(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\int_0^\pi R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\rho-1}\varphi\,d\varphi$$

und daher erhält man, wenn man $x_1=1$ setzt, aus der letzten Gleichung folgenden Werth von a_λ:

$$a_\lambda=(-1)^\lambda\left[\frac{4^\lambda\Pi(2\rho-2)\Pi\left(\lambda+\rho-\frac{3}{2}\right)\Pi(\lambda+\rho-1)}{\Pi(\rho-1)\Pi\left(\rho-\frac{3}{2}\right)}\right]^2\frac{\Pi(n+\nu-\lambda-\rho)\,(2\lambda+2\rho-1)}{\Pi(2\lambda+2\rho-2)\,\Pi(n+\nu+\rho+\lambda-1)}.$$

Man hat also schliesslich die Entwicklung

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)=$$

$$=\left[\frac{\Pi(2\rho-2)}{\Pi(\rho-1)\Pi\left(\rho-\frac{3}{2}\right)}\right]^2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{4^{2\lambda}\left[\Pi\left(\lambda+\rho-\frac{3}{2}\right)\right]^2[\Pi(\lambda+\rho-1)]^2\Pi(n+\nu-\lambda-\rho)}{\Pi(2\lambda+2\rho-2)\,\Pi(n+\nu+\rho+\lambda-1)}\cdot$$

$$.(2\lambda+2\rho-1)(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}R_{n,1}^{\lambda+\rho,\nu}(x_1)\,R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_2)\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi).$$

Ein ähnliches Additionstheorem lässt sich auch für die verallgemeinerten Ringfunctionen zweiter Art ableiten.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Aus der Verbindung der Gleichungen 10) und 14a) ergibt sich weiter die folgende Verallgemeinerung der ersten von ihnen:

$$(1-x^2)^s R_{n,2}^{\rho+s,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu-s)\,\Pi(n+\nu+\rho+s-1)}{\Pi(n+\nu)\,\Pi(n+\nu+\rho-s-1)} \left| \frac{2^\lambda \Pi(\lambda)\,\Pi(n-s+\nu+\rho+\lambda+2\mu+1)}{\Pi(2\rho+\lambda-1)\,\Pi(n-s+\nu-\rho-\lambda+2\mu+2)} \right| \cdot$$

$$\left| \begin{array}{ccc}
R_{n-s,2}^{\rho,\nu}(x), & R_{n-s+2,2}^{\rho,\nu}(x), & R_{n+s,2}^{\rho,\nu}(x) \\
\dfrac{\Pi(n-s+\nu+\rho-1)}{\Pi(n-s+\nu-\rho)\,\Pi(2\rho-1)}, & \dfrac{\Pi(n-s+\nu+\rho+1)}{\Pi(n-s+\nu-\rho+2)\,\Pi(2\rho-1)}, & \dfrac{\Pi(n+s+\nu+\rho-1)}{\Pi(n+s+\nu-\rho)\,\Pi(2\rho-1)} \\
\dfrac{\Pi(n-s+\nu+\rho)}{\Pi(n-s+\nu-\rho-1)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)}, & \dfrac{\Pi(n-s+\nu+\rho+2)}{\Pi(n-s+\nu-\rho+1)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)}, \ldots, & \dfrac{\Pi(n+s+\nu+\rho)}{\Pi(n+s+\nu-\rho-1)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)} \\
\dfrac{\Pi(n-s+\nu+\rho+1)}{\Pi(n-s+\nu-\rho-2)(2\rho+3)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)}, & & \\
 & \dfrac{\Pi(n-s+\nu+\rho+3)}{\Pi(n-s+\nu-\rho)(2\rho+3)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)}, \ldots, & \dfrac{\Pi(n+s+\nu+\rho+1)}{\Pi(n+s+\nu-\rho-2)(2\rho+3)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)} \\
\dfrac{2^{s-1}\Pi(s-1)\,\Pi(n+\nu+\rho-2)}{\Pi(2\rho+s-2)\,\Pi(n+\nu-\rho-2s+1)}, & \dfrac{2^{s-1}\Pi(s-1)\,\Pi(n+\nu+\rho)}{\Pi(2\rho+s-2)\,\Pi(n+\nu-\rho-2s+3)}, & \dfrac{2^{s-1}\Pi(s-1)\,\Pi(n+\nu+\rho+2s-2)}{\Pi(2\rho+s-2)\,\Pi(n+\nu-\rho+1)}
\end{array} \right| .$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, s-1).$$

Eine analoge Relation besteht selbstverständlich auch für die verallgemeinerte Ringfunction erster Art.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: Über die Ringfunctionen. 745-766