©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction

von

J. Puluj,

Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1891.)

In einer Drahtrolle, welche um eine gegen die Richtung eines homogenen magnetischen Feldes geneigte Axe gleichmässig gedreht wird, entstehen bekanntlich durch Induction sinusartige elektromotorische Kräfte, deren Richtung nach jeder halben Umdrehung wechselt. Ist die Drahtrolle noch mit einem zweitheiligen Commutator versehen, so entstehen im äusseren Stromkreise sinusartige Stromimpulse, welche aber nur in einer Richtung verlaufen. Um die Gesetze einer solchen Elektricitätsströmung in einem Leiter mit Selbstinduction untersuchen zu können, muss für die elektromotorische Kraft ein mathematischer Ausdruck gefunden werden, welcher die Eigenschaft besitzt, dem einfachen Sinusgesetz zu genügen, aber für jede beliebige Zeit nur positive Werthe anzunehmen.

Ist eine $f(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich und stetig, so gilt bekanntlich die Beziehung

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots$$

für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \pi$ inclusive diese Grenzen und die Constanten der periodischen Reihe sind durch das Integral

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) . \cos nx . dx$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gegeben. Für $f(x) = \sin x$ ergibt sich

$$A_n = -\frac{2}{\pi}\,\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}$$

und daher

$$\sin x = \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x - \ldots\right].$$

Diese Gleichung ist aber an die Bedingung $0 \leqq x \leqq \pi$ gebunden und gilt ausserhalb dieser Grenzen nicht mehr. Für Werthe $x<0$ und $x>\pi$ ist die Summe der periodischen Reihe eine Function $F(x)$, welche in endlicher Form sich zwar nicht

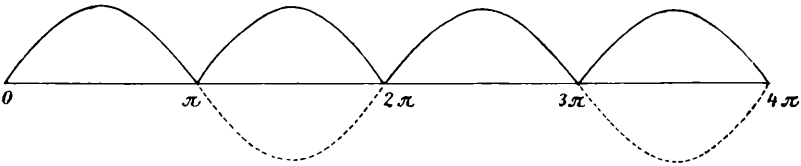

Fig. 1.

ausdrücken lässt, aber die gleichgerichtete Sinuscurve Fig. 1 darstellt, wie aus dem Resultat der folgenden Transformation deutlich zu ersehen ist.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x - \ldots\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[1 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)\cos 2x - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\cos 4x - \ldots\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[(1-\cos 2x) + \frac{1}{3}(\cos 2x - \cos 4x) + \ldots\right] \\ &= \sin x \cdot \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Nun hat aber bekanntlich die Reihe

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{5}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right]$$

den Werth $+1$ zwischen 0 und π, 2π und 3π, 4π und 5π, ... -1 zwischen π und 2π, 3π und 4π, 5π und 6π,... und

den Werth Null für 0, π, 2π, 3π,... Die Transformation zeigt somit, dass die ausgezogene Curve, Fig. 1, durch Umkehrung aller negativen Zweige der einfachen Sinuscurve entsteht.

Nach diesem Ergebniss kann die gesuchte sinusartige elektromotorische Kraft, welche für jede beliebige Zeit nur positive Werthe annehmen soll, durch die periodische Reihe

$$e = \frac{2}{\pi} E_0 \left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos\frac{4\pi}{T}t - \frac{2}{3\cdot 5}\cos\frac{8\pi}{T}t - \ldots\right] \quad \ldots 1)$$

dargestellt werden, in welcher E_0 die Amplitude der elektromotorischen Kraft, T die Periode und t die Zeit bedeutet.

Es entsteht nun die Frage, wie ändert sich die Stromstärke in einem Leiter mit Selbstinduction L und Widerstand R, wenn die äussere elektromotorische Kraft durch die letzte periodische Reihe normirt ist.

Mit Benützung der bekannten Helmholtz'schen Grundgleichung

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E \quad \ldots 2)$$

erhalten wir, wenn $\frac{L}{R} = \tau$ gesetzt wird,

$$\frac{d(ie^{\frac{t}{\tau}})}{dt} = \frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R\tau}e^{\frac{t}{\tau}}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos\frac{4\pi}{T}t - \frac{2}{3\cdot 5}\cos\frac{8\pi}{T}t - \ldots\right]$$

$$ie^{\frac{t}{\tau}} = \frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R\tau}\int e^{\frac{t}{\tau}}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos\frac{4\pi}{T}t - \frac{2}{3\cdot 5}\cos\frac{8\pi}{T}t - \ldots\right]dt,$$

$$i = \frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\cdot\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}\int e^{\frac{t}{\tau}}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos\frac{4\pi}{T}t - \frac{2}{3\cdot 5}\cos\frac{8\pi}{T}t - \ldots\right]dt.$$

Die Reihe enthält Integrale von der bekannten Form

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C.$$

Wird nach der Ausführung der Integration

$$\frac{4\pi L}{RT} = \operatorname{tang}\psi_1, \quad \frac{8\pi L}{RT} = \operatorname{tang}\psi_2, \quad \frac{12\pi L}{RT} = \operatorname{tan}\psi_3 \quad \ldots 3)$$

 ©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gesetzt und ferner berücksichtigt, dass für den dauernden Zustand der Elektricitätsströmung die Summe aus sämmtlichen Integrationsconstanten und dem Factor vor dem Integralzeichen also der Ausdruck

$$[C_1 + C_2 + C_3 + \ldots] \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} = 0$$

wird, so ergibt sich für die momentane Stromstärke:

$$i = \frac{2}{\pi}\left[\frac{E_0}{R} - \frac{2}{1\cdot 3} \cdot \frac{E_0 \cos\left(\frac{4\pi}{T}\, t - \psi_1\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3\cdot 5} \cdot \frac{E_0 \cos\left(\frac{8\pi}{T}\, t - \psi_2\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{8\pi L}{T}\right)^2}} - \ldots \right] \quad \ldots 4)$$

Darin bedeuten ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... die Phasenverschiebungen der einzelnen elektromotorischen Kraftcomponenten.

Die momentane Stromstärke variirt zwischen einem grössten und einem kleinsten Werthe, ohne je den Werth Null zu erreichen, und genügt dem Gesetze der Superposition der Wirkungen der einzelnen Kraftcomponenten, von denen jede so wirkt, als ob sie allein im Stromkreise vorhanden wäre.

Unter der Voraussetzung der allgemeinen Richtigkeit dieses Gesetzes könnte die momentane Stromstärke noch auf folgende einfache Weise aus der Gleichung 2) bestimmt werden. Es sei das Integral der Gleichung

$$i = A + B_1 \cos\left(\frac{4\pi}{T}\, t - \psi_1\right) + B_2 \cos\left(\frac{8\pi}{T}\, t - \psi_2\right) + \ldots \quad \ldots 5)$$

Die Constanten A, B_1, B_2 ... mögen die Amplituden der einzelnen Partialströme und ψ_1, ψ_2 ... ihre Phasenverschiebungen bedeuten. Nach vorgenommener Substitution der angenommenen Reihe in die Grundgleichung 2) erhalten wir:

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$RA+RB_1\cos\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)+RB_2\cos\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)+\ldots$$

$$-LB_1\frac{4\pi}{T}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)-LB_2\frac{8\pi}{T}\sin\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)-$$

$$=\frac{2}{\pi}E_0\left(1-\frac{2}{1\cdot3}\cos\frac{4\pi}{T}t-\frac{2}{3\cdot5}\cos\frac{8\pi}{T}t-.\quad\right).$$

Sollen die einzelnen Kraftcomponenten von einander unabhängig wirken, so müssen folgende Gleichungen zu jeder Zeit bestehen:

$$RA=\frac{2}{\pi}E_0 \qquad \ldots 6)$$

$$RB_1\cos\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)-LB_1\frac{4\pi}{T}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1\cdot3}E_0\cos\frac{4\pi}{T}t \qquad \ldots 7)$$

$$RB_2\cos\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)-LB_2\frac{8\pi}{T}\sin\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{3\cdot5}E_0\cos\frac{8\pi}{T}t \qquad \ldots 8)$$

Aus der Gleichung 6) ergibt sich der Werth der Constanten

$$A=\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}.$$

Aus der Gleichung 7) erhalten wir für $t=0$ und $t=\frac{T}{8}$

$$RB_1\cos\psi_1+LB_1\frac{4\pi}{T}\sin\psi_1=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1\cdot3}\cdot E_0 \qquad \ldots a)$$

$$RB_1\sin\psi_1-LB_1\frac{4\pi}{T}\cos\psi_1=0 \qquad \ldots b)$$

Beide Gleichungen quadrirt und addirt geben die Constante

$$B_1=\pm\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1\cdot3}\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}\cdot$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Aus der Gleichung *b*) folgt ferner für die Phasenverschiebung

$$\text{tang } \psi_1 = \frac{4\pi L}{RT}.$$

Aus dieser Beziehung ist zunächst zu ersehen, dass, wie gross L, R und T sein mögen, die Phasenverschiebung ψ_1 höchstens den Werth 90° erreichen kann. Daraus folgt weiter, dass $\sin \psi_1$ und $\cos \psi_1$ positive Grössen sind und somit für die Constante B_1 mit Rücksicht auf die Gleichung *a*) das negative Zeichen zu wählen ist.

In ähnlicher Weise erhält man aus der Gleichung 8) für $t = 0$ und $t = \frac{T}{16}$ die Gleichungen

$$RB_2 \cos \psi_2 + LB_2 \sin \psi_2 = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3 \cdot 5} E_0,$$

$$RB_2 \sin \psi_2 - LB_2 \cos \psi_2 = 0$$

und daraus

$$B_2 = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3 \cdot 5} \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{8\pi L}{T}\right)^2}} \quad \text{und} \quad \text{tang } \psi_2 = \frac{8\pi L}{RT}.$$

Ähnlich können die übrigen Constanten $B_3 B_4 \ldots \psi_3 \psi_4 \ldots$ bestimmt werden.

Für die mittlere Stromstärke erhalten wir, da sämmtliche Integrale die Form

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{4k\pi}{T} t - \psi_k\right) dt = 0$$

haben, den Ausdruck

$$M(i) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R}. \qquad \ldots 9)$$

Die mittlere Stromstärke ist somit von der Selbstinduction, also auch von der Phasenverschiebung unabhängig.

Wie aus der Gleichung 4) zu ersehen ist, besteht die momentane Stromstärke aus einem constanten positiven Gliede,

$\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}$, welches numerisch gleich ist der mittleren Stromstärke und einer Anzahl periodisch veränderlicher Glieder, welche sämmtlich negativ sind. Diese negativen Glieder sind von der Selbstinduction abhängig und werden desto kleiner, je grösser die letztere und die Anzahl der Wechselperioden ist. Für $L=\infty$ verschwinden die veränderlichen Glieder, und die momentane Stromstärke erreicht den maximalen Werth $\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}$. Die Selbstinduction verursacht somit keine Schwächung der mittleren Stromstärke, ihre Wirkung besteht bloss darin, die Stromwellen zu ebnen.

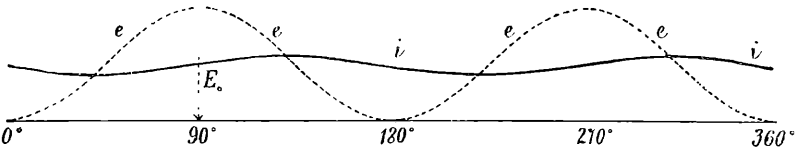

Fig. 2.

In Fig. 2 ist die momentane Stromstärke mit der Curve i für den Fall dargestellt, dass die elektromotorische Kraft durch den Ausdruck

$$e = E_0 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t = \frac{E_0}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{T} t\right)$$

und die Curve e gegeben ist. In diesem Falle ist die momentane Stromstärke

$$i = \frac{1}{2}\frac{E_0}{R} - \frac{1}{2}\frac{E_0 \cos\left(\frac{4\pi}{T} t - \psi\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}$$

und

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{4\pi L}{RT}.$$

Die Curve wurde unter der Voraussetzung construirt, dass der Widerstand des Stromkreises $R = 1\,\Omega$ und die Selbstinduction

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

des letzteren so gross ist, dass der scheinbare Widerstand $R_1 = 5\,\Omega$ beträgt, somit die Phasenverschiebung $\psi = 39°219$ ist. Wie aus der Fig. 2 zu ersehen ist, erreicht die Stromcurve nie den Werth Null und zeigt eine Stromschwankung von 50% des maximalen Werthes, welcher numerisch gleich ist $\frac{1}{2}\frac{E_0}{R}$. Für $L = \infty$ verschwindet das veränderliche Glied und die Stromcurve i ist eine Gerade, deren Ordinate gleich $\frac{1}{2}E_0$ ist.

Es sei hier noch bemerkt, dass nach dem obigen Ergebniss (Gleichung 4) eine constante Stromstärke als eine mittlere Stromstärke aufgefasst werden könnte, welche durch eine gleichgerichtete, sinusartige, elektromotorische Kraft mit unendlich kleiner Periode erzeugt wird.

Es soll jetzt das mittlere Quadrat der Stromstärke

$$M(i^2) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i^2\,dt$$

bestimmt werden.

Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$R = \sqrt{R^2 + \left(\frac{4k\pi L}{T}\right)^2}\,.\cos\psi_k$$

kann die momentane Stromstärke etwas einfacher ausgedrückt werden:

$$i = \frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos\psi_1\cos\left(\frac{4\pi}{T}t - \psi_1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3\cdot 5}\cos\psi_2\cos\left(\frac{8\pi}{T}t - \psi_2\right) - \ldots\right].$$

Wird nun diese unendliche Reihe quadrirt, so erhält man eine Reihe von Quadraten der einzelnen Glieder und dann eine Reihe von doppelten Producten von der allgemeinen Form

$$M\cos\left(\frac{4k\pi}{T}t - \psi_k\right),$$

beziehungsweise

$$N \cos\left(\frac{4k\pi}{T}t - \psi_k\right) \cos\left(\frac{4m\pi}{T}t - \psi_m\right),$$

in welchen Ausdrücken M und N Constanten und k und m positive ganze Zahlen sind. Nun ist aber

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{4k\pi}{T}t - \psi_k\right) dt = 0$$

und ebenso

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{4k\pi}{T}t - \psi_k\right) \cos\left(\frac{4m\pi}{T}t - \psi_m\right) dt = 0;$$

es bleiben daher bloss die quadratischen Glieder. Da ferner

$$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2\left(\frac{4k\pi}{T}t - \psi_k\right) dt = \frac{1}{2}$$

ist, so erhalten wir für das mittlere Quadrat der Stromstärke die nachstehende Reihe:

$$M(i^2) = \left(\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\right)^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot3}\right)^2 \cos^2\psi_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot5}\right)^2 \cos^2\psi_2 + \ldots\right] \ldots 10)$$

Auch aus dieser Reihe ist die Giltigkeit des oben erwähnten Gesetzes der Superposition der Wirkungen zu ersehen, indem das resultirende mittlere Quadrat der Stromstärke gleich ist der Summe der mittleren Quadrate der einzelnen Partialströme. Die elektromotorischen Kraftcomponenten wirken somit unabhängig von einander.

Der Coëfficient von $\cos^2\psi_2$ ist $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot5}\right)^2 = 0{\cdot}00889$ und der von $\cos^2\psi_3$ nur noch $= 0{\cdot}0000053$; wir können daher mit Rücksicht auf die starke Convergenz der Reihe das Glied mit $\cos^2\psi_2$ und die nachfolgenden Glieder vernachlässigen und erhalten einen angenäherten Ausdruck für das mittlere Quadrat der Stromstärke

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$M(i^2) = \left(\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\right)^2\left[1+\frac{2}{9}\cos^2\psi_1\right],$$

oder

$$M(i^2) = \left(\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\right)^2\left[1+\frac{2}{9}\frac{R^2}{R^2+\left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}\right] \qquad \ldots 11)$$

Die im Stromkreise von der elektromotorischen Kraft geleistete mittlere Wärmearbeit ist

$$W = M(i^2).R = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} eidt,$$

$$W = \frac{\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{R}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}\right)^2\cos^2\psi_1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)^2\cos^2\psi_2+\ldots\right] \ldots 12)$$

oder angenähert

$$W = \frac{\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{R}+\frac{2}{9}\frac{\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{\sqrt{R^2+\left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}.\cos\psi_1,$$

worin ψ_1 gegeben ist durch die Beziehung

$$\text{tang}\,\psi_1 = \frac{4\pi L}{RT}.$$

In der Gleichung 12) ist das Product aus dem gemeinsamen Factor und dem ersten Gliede der Reihe

$$W_0 = \frac{\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{R}$$

die Arbeit, welche von dem constanten Theil der elektromotorischen Kraft geleistet wird. Das zweite Product

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{2}{\pi}.E_0\right)^2}{R}\cos^2\psi_1 = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{\sqrt{R^2+\left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}\cos\psi_1,$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

repräsentirt die von der zweiten elektromotorischen Kraftcomponente geleistete Arbeit u. s. w. Die gesammte Arbeit ist somit eine Summe der von den einzelnen Kraftcomponenten geleisteten Arbeiten, entsprechend dem Gesetze der Superposition der Einzelnwirkungen.

Für $L = 0$ erhält man ferner die grösste Arbeit

$$W\max = \frac{\left(\frac{2}{\pi} E_0\right)^2}{R}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)^2 + \ldots\right].$$

Wie man sich aber leicht überzeugen kann, ist

$$\frac{4}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{1}{2},$$

daher

$$W\max = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{R}.$$

Dieselbe mittlere Arbeit wird bekanntlich in einem Leiter ohne Selbstinduction geleistet, wenn die elektromotorische Kraft dem einfachen Sinusgesetz genügt und ihre Richtung periodisch und alternirend ändert. Für $L = \infty$ erreicht die mittlere Arbeit den kleinsten Werth

$$W\min = \frac{4}{\pi^2}\frac{E_0^2}{R},$$

somit die Differenz der beiden Arbeiten

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)\frac{E_0^2}{R} = \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) W\max = 0\cdot 1887\ W\max.$$

Die mittlere Arbeit kann somit durch die Selbstinduction höchstens bis auf $18\cdot 9\%$ des maximalen Betrages herabgedrückt werden, ohne je den Werth Null zu erreichen, was bekanntlich dann der Fall ist, wenn die elektromotorische Kraft eine einfache Sinusfunction der Zeit und die Selbstinduction $L = \infty$ ist.

Ich lasse hier noch das Resultat der Rechnung für den Fall folgen, dass die gleichgerichtete elektromotorische Kraft durch irgend eine periodische Function der Zeit $f(t)$ gegeben ist, sich durch eine Cosinusreihe in der bekannten Weise darstellen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

lässt und in einem Leiter mit Selbstinduction L und Widerstand R wirkt, somit die Beziehungen bestehen

$$e = f(t) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + A_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + \ldots$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt .$$

In diesem Falle ist die momentane Stromstärke

$$i = \frac{1}{2} \frac{A_0}{R} + \frac{A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \psi_1\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}} + \frac{A_2 \cos\left(\frac{4\pi}{T} t - \psi_2\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}} + \ldots,$$

und

$$\operatorname{tang} \psi_1 = \frac{2\pi L}{RT}, \quad \operatorname{tang} \psi_2 = \frac{4\pi L}{RT}, \quad \operatorname{tang} \psi_3 = \frac{6\pi L}{RT}, \ldots$$

die mittlere Stromstärke

$$M(i) = \frac{1}{2} \frac{A_0}{R},$$

das mittlere Quadrat der Stromstärke

$$M(i^2) = \left(\frac{1}{2} \frac{A_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{R}\right)^2 \cos^2 \psi_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{R}\right)^2 \cos^2 \psi_2 + \ldots$$

und die mittlere Arbeit

$$W = \frac{\left(\frac{1}{2} A_0\right)^2}{R} + \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{R} \cos^2 \psi_1 + \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{R} \cos^2 \psi_2 + \ldots$$

Wie aus den obigen Gleichungen 9) und 10) zu ersehen ist, hat diese Untersuchung noch zu einem bemerkenswerthen Resultate geführt. Während nämlich das mittlere Quadrat der Stromstärke mit der Selbstinduction sich ändert, ist die mittlere Stromintensität von derselben ganz unabhängig und numerisch gleich $\frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R}$, wenn die gleichgerichtete elektromotorische Kraft eine einfache Sinusfunction der Zeit ist. Nach diesem Ergebniss war im Voraus zu erwarten, dass ein Galvanometer unter der

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wirkung von schnell aufeinander folgenden gleichgerichteten Stromimpulsen bei grosser und kleiner Selbstinduction denselben Ausschlag geben wird, während die Ausschläge eines Elektrodynamometers desto kleiner ausfallen werden, je grösser die Selbstinduction des Stromkreises bei sonst unverändertem Ohm'schen Widerstand derselben ist.

Um dieses theoretische Ergebniss durch Versuche zu prüfen, wurde ein Erdinductor, der mit einem zweitheiligen Commutator und zwei Bürsten versehen war, und dessen eingehende Beschreibung einer späteren Abhandlung vorbehalten werden soll, mit dem Spiegelgalvanometer von Prof. v. Lang und einer Drahtrolle zu einem Stromkreise verbunden. Bei einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit des Erdinductors gab das Galvanometer einen Ausschlag, welcher objectiv auf einer $6 \cdot 4\,m$ entfernten Scala beobachtet werden konnte. Die Selbstinduction des Stromkreises wurde durch Einschieben eines 30 *cm* langen, $1 \cdot 8\,cm$ dicken, weichen Eisenstabes in die Drahtrolle vergrössert, wobei also der Ohm'sche Widerstand unverändert blieb. Die Drahtrolle war ungefär 25 *cm* lang und hatte ohne Eisen einen Selbstinductionscoëfficienten $= 0 \cdot 12$ Erdquadranten. In Übereinstimmung mit dem theoretischen Resultat zeigte das Galvanometer keinen Unterschied im Ausschlag, wenn die Rolle den Eisenkern enthielt oder nicht. Der Versuch mit dem Elektrodynamometer musste etwas modificirt werden, weil das letztere für schwache Erdinductorströme zu unempfindlich war. Es wurde daher das homogene magnetische Feld der Erde durch ein nicht homogenes eines in der Nähe aufgestellten Elektromagneten verstärkt. Bei constanter Rotationsgeschwindigkeit des Erdinductors wurde an der Scala ein Ausschlag von 49 *cm* bei Anwendung der Rolle ohne Eisenkern und ein Ausschlag von 56 *cm* beobachtet, wenn die Rolle den Eisenkern enthielt.

Die Gesetze der Elektricitätsströmung in einem Leiter mit Selbstinduction, in welchem von einer periodisch veränderlichen elektromotorischen Kraft Stromimpulse nur in einer Richtung erzeugt werden, finden ihre Analogie in den Gesetzen der drehenden Bewegung eines schweren Rades, welches unter der Wirkung veränderlicher und gleichgerichteter mechanischer Kräfte rotirt und in den Lagern eine Reibung zu überwinden hat.

Die Kräfte werden nicht bloss diese Reibung überwinden, sondern auch im schweren Rade eine desto grössere kinetische Energie aufspeichern, je grösser sein Trägheitsmoment ist.

Denken wir uns beispielsweise ein Wasserrad, an dessen Umfang die Schaufeln so vertheilt sind, dass jedesmal eine Schaufel mit Wasser sich zu füllen beginnt, wenn die vorangehende sich bereits entleert hat. Das Wasserrad steht in diesem Falle unter der Wirkung veränderlicher Kräfte, welche zu- und abnehmend sämmtlich in demselben Sinne auf das Wasserrad wirken. Ein sehr leichtes Wasserrad wird sich mit veränderlicher Geschwindigkeit drehen, und zwar so, dass die letztere und die mechanische Kraft gleichzeitig die Werthe Null und die maximalen Werthe erreichen. Ist aber das Wasserrad sehr schwer, so kann die Geschwindigkeit der Bewegung den Werth Null nicht erreichen; denn hat die äussere mechanische Kraft bis Null abgenommen, so gibt das Wasserrad seine kinetische Energie ab und bewegt sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit weiter, inzwischen aber beginnt die wirkende Kraft wieder zu wachsen und vergrössert die bereits vorhandene Geschwindigkeit, welche einen desto grösseren Werth erreicht, je öfters in einer bestimmten Zeit der Antrieb des Wasserrades erfolgt und je grösser seine Masse, beziehungsweise seine Trägheit ist.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Puluj J.

Artikel/Article: Über die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction. 767-780