 ©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze

von

Joseph Anton Gmeiner in Innsbruck.

1. Bezeichnen wir mit j die primitive sechste Einheitswurzel

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

und sind a und b zwei reelle ganze Zahlen, so stellt

$$a+bj$$

allgemein eine complexe ganze Zahl im Rationalitätsgebiete der sechsten Einheitswurzeln dar. a nennen wir die reelle und b die imaginäre Coordinate der Zahl $a+bj$.

$$a-bj^2 = a+b-bj$$

ist die Conjugirte zu $a+bj$ und das Product

$$(a+bj)(a-bj^2) = a^2+b^2+ab$$

deren Norm. Die Zahlen

$$(a+bj)j^\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

heissen einander associirt.

In diesem Zahlensysteme ist die reelle Primzahl 3 in die einander conjugirten und associirten Primfactoren

$$1+j \text{ und } 1-j^2$$

zerlegbar. Ebenso lässt sich jede reelle Primzahl von der Form $6n+1$ in zwei einander conjugirte Primfactoren

$$a+bj \text{ und } a-bj^2$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zerlegen, während die Zahl 2 und die reellen Primzahlen von der Form $6n+5$ auch in diesem Zahlensysteme Primzahlen bleiben.

Jede Zahl $a+bj$, welche weder durch $1+j$ noch durch 2 theilbar ist, nennen wir regulär, während wir die durch $1+j$ oder durch 2 theilbaren Zahlen als singuläre bezeichnen.

Ferner heisse eine Zahl $a+bj$ unseres Systems primär, wenn dieselbe modulo 3 congruent 1 ist. Zufolge dieser Definition kann eine durch $1+j$ theilbare Zahl nicht primär sein; dagegen gibt es unter den Associirten einer jeden nicht durch $1+j$ theilbaren Zahl immer eine und nur eine, welche primär ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass eine Zahl $a+bj$ primär sei, besteht darin, dass

$$a \equiv 1 \pmod 3 \text{ und } b \equiv 0 \pmod 3$$

ist. Es haben also die Coordinaten a und b einer primären Zahl $a+bj$ die Formen

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma,$$

wobei α und β beliebige reelle ganze Zahlen sein können, während ρ und σ unabhängig von einander den Werth 0 oder den Werth 1 haben. Je nach den Werthen, welche ρ und σ haben, lassen sich nun folgende vier Haupttypen von primären Zahlen unterscheiden:

Erster Haupttypus: Es ist

$$\rho = \sigma = 0;\ a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta.$$

Zu diesem Typus gehören unter anderen die primären Associirten aller reellen regulären Zahlen, also alle reellen Zahlen von der Form $6n+1$ und das Negative aller reellen Zahlen von der Form $6n+5$.

Zweiter Haupttypus: Es ist

$$\rho = 0 \text{ und } \sigma = 1;\ a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta+3.$$

Dritter Haupttypus: Es ist

$$\rho = \sigma = 1;\ a = 6\alpha+4 \text{ und } b = 6\beta+3.$$

Vierter Haupttypus: Es ist

$$\rho = 1 \text{ und } \sigma = 0;\ a = 6\alpha+4 \text{ und } b = 6\beta.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zu diesem Typus gehören die primären Associirten aller jener geraden Zahlen, welche nicht durch $1+j$ theilbar sind. Die Zahlen dieses Typus sind daher keine regulären Zahlen. Dagegen enthalten die drei anderen Haupttypen nur reguläre Zahlen, und es gehört jede primäre reguläre Zahl einem der drei ersten Haupttypen an. Für das Folgende sind nur die drei Haupttypen der primären regulären Zahlen von Wichtigkeit.

Bezüglich des Haupttypus, welchem die Conjugirte einer primären regulären Zahl angehört, bestehen folgende, leicht zu verificirende Sätze:

1. Die Conjugirte einer Zahl des ersten Haupttypus ist wieder eine Zahl dieses Haupttypus.

2. Die Conjugirte einer Zahl des zweiten Haupttypus ist eine Zahl des dritten Haupttypus.

3. Die Conjugirte einer Zahl des dritten Haupttypus ist eine Zahl des zweiten Haupttypus.

2. Ist $m = a+bj$ eine reguläre Primzahl, p deren Norm und $r = c+dj$ eine beliebige zu m theilerfremde Zahl unseres Systems, so besteht die Congruenz

$$r^{\frac{p-1}{6}} \equiv j^{\varkappa} \pmod{m},$$

worin $\varkappa$ einen der Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5 hat. $j^{\varkappa}$ ist der bicubische Charakter der Zahl r bezüglich der Primzahl m. Um diese Beziehung zwischen r, m und $j^{\varkappa}$ kurz auszudrücken, bedienen wir uns desselben Zeichens $\left(\frac{r}{m}\right)$, welches in der Theorie der quadratischen Reste als das Legendre'sche Zeichen bekannt ist, indem wir

$$j^{\varkappa} = \left(\frac{r}{m}\right)$$

setzen, und es ist dann

$$r^{\frac{p-1}{6}} \equiv \left(\frac{r}{m}\right) \pmod{m}.$$

Das Symbol $\left(\frac{r}{m}\right)$ nennen wir kurz das charakteristische Zeichen von r bezüglich m, und wir legen demselben auch

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

für den Fall, dass m keine Primzahl, sondern das Product der regulären Primzahlen $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ vorstellt, eine Bedeutung bei, indem wir festsetzen, dass in diesem Falle

$$\left(\frac{r}{m}\right) = \left(\frac{r}{m_1}\right)\left(\frac{r}{m_2}\right)\ldots\left(\frac{r}{m_\nu}\right)$$

sein solle. Dann bestehen bezüglich des Zeichens $\left(\frac{r}{m}\right)$ folgende Sätze:

1. Ist $M = a + bj$ eine beliebige reguläre Zahl und P ihre Norm, so ist

$$\left(\frac{j}{M}\right) = j^{\frac{P-1}{6}} \tag{I}$$

2. Sind Q und P zwei reelle, zu einander theilerfremde Zahlen, von denen die erstere regulär ist, so ist

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = 1. \tag{II}$$

3. Sind M und Q zwei zu einander theilerfremde, primäre reguläre Zahlen, von denen die erstere zweigliedrig und die letztere reell ist, und ezeichnen wir die Norm von M mit P, so besteht die Reciproc tätsgleichung

$$\left(\frac{Q}{M}\right) = (-1)^{\frac{Q-1}{6}\frac{P-1}{6}}\left(\frac{M}{Q}\right).^1 \tag{III}$$

4. Ist m eine reguläre Zahl und n eine beliebige zu m theilerfremde Zahl unseres Systems; sind ferner m' und n' die Conjugirten zu m und n, so ist

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m'}\right) = 1. \tag{IV}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen I—IV kann man nun die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze ableiten, d. h. den Werth der Zeichen

---

[1] Eine Ableitung dieser Reciprocitätsgleichung werde ich anderweitig veröffentlichen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left(\frac{1+j}{m}\right) \text{ und } \left(\frac{2}{m}\right),$$

worin m eine beliebige primäre reguläre Zahl unseres Systems bedeutet, allgemein bestimmen.

I. Der bicubische Charakter der Zahl $1+j$.

3. Ist q eine reelle Primzahl von der Form $6n+5$, so ist

$$(1+j)^q \equiv 1+j^q = 1+j^5 = j^5(1+j) \pmod{q},$$

und daraus folgt

$$(1+j)^{q-1} \equiv j^5 \pmod{q}.$$

Demnach ist

$$(1+j)^{\frac{q^2-1}{6}} \equiv j^{5\frac{q+1}{6}} = j^{-\frac{q+1}{6}} \pmod{q}.$$

Bezeichnen wir nun das Negative einer reellen Primzahl von der Form $6n+5$ mit q, d. h. nehmen wir q primär, so erhalten wir aus dieser Congruenz die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{q}\right) = j^{\frac{q-1}{6}}$$

Ist p eine reelle Primzahl von der Form $6n+1$ und sind m_1 und m_2 ihre zweigliedrigen Primfactoren, so ist

$$\left(\frac{1+j}{p}\right) = \left(\frac{1+j}{m_1}\right)\left(\frac{1+j}{m_2}\right)$$

Nun ist zufolge der Gleichung (IV)

$$\left(\frac{1+j}{m_1}\right)\left(\frac{1-j^2}{m_2}\right) = 1,$$

und da

$$1-j^2 = j^{-1}(1+j)$$

ist, so folgt daraus unter Berücksichtigung der Gleichung (I)

$$\left(\frac{1+j}{p}\right) = j^{\frac{p-1}{6}}$$

©Akademie d

Bedeutet P eine primäre reelle reguläre Zahl und sind

$$p_1 = 6n_1+1,\ p_2 = 6n_2+1, \ldots p_\nu = 6n_\nu+1$$

ihre reellen primären Primfactoren, so ist

$$\left(\frac{1+j}{P}\right) = \left(\frac{1+j}{p_1}\right)\left(\frac{1+j}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{1+j}{p_\nu}\right) = j^{n_1+n_2+\ldots+n_\nu} = j^{\frac{P-1}{6}}$$

Es ist also für jede primäre reelle reguläre Zahl P

$$\left(\frac{1+j}{P}\right) = j^{\frac{P-1}{6}} \qquad \text{(V)}$$

4. Es sei $a+bj$ eine Zahl des ersten Haupttypus, deren Coordinaten zu einander theilerfremd sein sollen, und p bedeute die Norm von $a+bj$; dann können wir

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta$$

setzen, worin α und β ganze reelle Zahlen bezeichnen. Daraus erkennen wir, dass $a+b$ eine primäre reelle reguläre Zahl ist, welche zufolge der Congruenz

$$a+b \equiv aj \pmod{a+bj}$$

zu $a+bj$ relativ prim ist. Daher ist nach Gleichung (III)

$$\left(\frac{a+b}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a+b-1}{6}}\left(\frac{a+bj}{a+b}\right). \qquad (1)$$

Ein Fall ist hier noch ausgeschlossen, nämlich der, dass $a+b = 1$ ist, weil wir das Zeichen

$$\left(\frac{a+bj}{1}\right)$$

nicht definirt haben. Setzen wir jedoch fest, dass für jede beliebige Zahl $a+bj$

$$\left(\frac{a+bj}{1}\right) = 1$$

sein soll, so besteht die obige Gleichung auch für $a+b = 1$. Diese Bemerkung bleibt auch für alle folgenden Gleichungen, worin in einem speciellen Falle das Zeichen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left(\frac{a+bj}{1}\right)$$

zum Vorschein kommen könnte, in Kraft, so dass wir der Arbeit enthoben sind, solche Eventualitäten eigens zu behandeln.

Da nun

$$\left(\frac{a+bj}{a+b}\right) = \left(\frac{b(j-1)}{a+b}\right) = \left(\frac{j^2}{a+b}\right) = j^{2\frac{(a+b)^2-1}{6}}$$

$$\frac{p-1}{6} \equiv \beta \pmod 2, \quad \frac{a+b-1}{6} = \alpha+\beta \text{ und}$$

$$\frac{(a+b)^2-1}{6} \equiv 2(\alpha+\beta) \pmod 6$$

ist, so folgt aus (1)

$$\left(\frac{a+b}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha\beta+\alpha} j^{\alpha+\beta}. \tag{2}$$

Dieses Resultat verwenden wir zur Bestimmung von $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$.

Es ist

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+b+(a+b)j}{a+bj}\right)$$

und, weil

$$(a+b)j \equiv b \pmod{a+bj}$$

ist,

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+2b}{a+bj}\right) \tag{3}$$

$a+2b$ ist wieder eine primäre reelle reguläre und zu $a+bj$ theilerfremde Zahl, so dass die Reciprocitätsgleichung besteht

$$\left(\frac{a+2b}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a+2b-1}{6}}\left(\frac{a+bj}{a+2b}\right) = (-1)^{\alpha\beta}\left(\frac{a+bj}{a+2b}\right) \tag{4}$$

Nun ist

$$\left(\frac{a+bj}{a+2b}\right) = \left(\frac{b(j-2)}{a+2b}\right) = \left(\frac{j-2}{a+2b}\right) = \left(\frac{1+j}{a+2b}\right)\left(\frac{j^2}{a+2b}\right) =$$

$$= j^{\frac{a+2b-1}{6}+2\frac{(a+2b)^2-1}{6}}$$

$$\frac{a+2b-1}{6} = \alpha+2\beta \text{ und } \frac{(a+2b)^2-1}{6} \equiv 2\alpha+4\beta \pmod 6,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

also

$$\left(\frac{a+bj}{a+2b}\right) = (-1)^{\alpha+\beta} j^{2\alpha+\beta}.$$

Somit ergibt die Gleichung (4)

$$\left(\frac{a+2b}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha\beta+\alpha+\beta} j^{2\alpha+\beta}.$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (2) und (3) erhält man für das charakteristische Zeichen $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ den Werth

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta} j^{\alpha}. \qquad \text{(VI)}$$

5. Ist $a+bj$ eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten und p deren Norm, so ist a regulär und primär und zu $a+bj$ relativ prim. Durch Benützung der Reciprocitätsgleichung (III) erhalten wir somit

$$\left(\frac{a}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\,\frac{a-1}{6}} \left(\frac{a+bj}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\,\frac{a-1}{6}} j^{\frac{a^2-1}{6}}$$

woraus sich weiter

$$\left(\frac{a}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a-1}{6}} j^{2\frac{a-1}{6}} \qquad (1)$$

ergibt. Setzen wir

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta+3,$$

so geht diese Gleichung über in

$$\left(\frac{a}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha\beta+\alpha} j^{2\alpha}. \qquad (2)$$

Dieses Resultat benützen wir zur Bestimmung von $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$. Es ist

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+aj}{a+bj}\right)$$

und, weil

$$aj \equiv a+b \pmod{a+bj}$$

ist,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right)=\left(\frac{2a+b}{a+bj}\right) \tag{3}$$

Hier ist $-(2a+b)$ regulär und primär; folglich ist

$$\left(\frac{2a+b}{a+bj}\right)=\left(\frac{-1}{a+bj}\right)\left(\frac{-2a-b}{a+bj}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{6}\left(1+\frac{-2a-b-1}{6}\right)}\left(\frac{a+bj}{2a+b}\right),$$

also

$$\left(\frac{2a+b}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha\beta+\beta}\left(\frac{a+bj}{2a+b}\right) \tag{4}$$

Nun ist

$$\left(\frac{a+bj}{2a+b}\right)=\left(\frac{a(1-2j)}{2a+b}\right)=\left(\frac{(1+j)j^4}{2a+b}\right)=j^{\frac{-2a-b-1}{6}+4\frac{(2a+b)^2-1}{6}}$$

und da

$$\frac{(2a+b)^2-1}{6}\equiv 2\alpha+4\beta+4 \pmod 6$$

ist, so findet man daraus

$$\left(\frac{a+bj}{2a+b}\right)=(-1)^{\beta+1},$$

wonach sich aus der Gleichung (4)

$$\left(\frac{2a+b}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha\beta+1}$$

ergibt. Diese Gleichung und die Gleichungen (2) und (3) liefern zusammen das Resultat

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)=-j^{\alpha}. \tag{VII}$$

6. Bedeutet $a+bj$ eine Zahl des dritten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten, so können wir

$$a=6\alpha+4 \text{ und } b=6\beta+3$$

setzen. Daraus erkennen wir, dass $a+b$ regulär und primär und zu $a+bj$ relativ prim ist, und wir könnten auch hier das Zeichen $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ auf ähnliche Weise wie bei den Zahlen des ersten und zweiten Haupttypus bestimmen. Es ist nämlich

©Akademie d

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b}{a+bj}\right)=\left(\frac{a+b+(a+b)j}{a+b\,j}\right)=\left(\frac{j\,(2\,a+b)}{a+bj}\right)=$$

$$=\left(\frac{j}{a+bj}\right)\left(\frac{-1}{a+bj}\right)\left(\frac{-2\,a-b}{a+bj}\right)$$

In dieser Gleichung ist

$$\left(\frac{j}{a+bj}\right) \text{ und } \left(\frac{-1}{a+bj}\right)$$

bekannt, und die Zeichen

$$\left(\frac{a+b}{a+bj}\right) \text{ und } \left(\frac{-2\,a-b}{a+bj}\right)$$

lassen sich mit Hilfe der Reciprocitätsgleichung (III) leicht berechnen, da

$$a+b \text{ und } -(2\,a+b)$$

regulär und primär und zu $a+bj$ theilerfremd sind. Wir wollen jedoch diesen Weg nicht weiter verfolgen, weil uns hier, nachdem wir das charakteristische Zeichen von $1+j$ bezüglich einer Zahl des zweiten Haupttypus, deren Coordinaten zu einander theilerfremd sind, schon kennen gelernt haben, die Gleichung (IV) auf eine viel einfachere und kürzere Weise zum Ziele führt.

Weil die Conjugirte einer Zahl des dritten Haupttypus eine Zahl des zweiten Haupttypus ist, so folgt aus der Gleichung (VII)

$$\left(\frac{1+j}{a+bj^2}\right)=-j^{\alpha+\beta+1};$$

denn es ist

$$a-bj^2=a+b-bj=6(\alpha+\beta+1)+1+\{-6(\beta+1)-3\}j.$$

Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{1-j^2}{a-bj^2}\right)=\left(\frac{1+j}{a-bj^2}\right)\left(\frac{j^5}{a-bj^2}\right)=-j^{\alpha+\beta+1}\cdot j^{5\frac{p-1}{6}}$$

worin p die Norm von $a+bj$ bedeutet, und da

$$\frac{p-1}{6}\equiv 5\alpha+4\beta \pmod 6$$

ist,

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left(\frac{1-j^2}{a-bj^2}\right) = (-1)^{\beta+1} j^{2\alpha}$$

Weil nun zufolge der Gleichung (IV)

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{1-j^2}{a-bj^2}\right) = 1$$

ist, so gelangen wir zu dem Resultate

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha+\beta} j^{\alpha+2} \qquad \text{(VIII)}$$

7. Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine Gleichung aufzufinden, welche die drei für das charakteristische Zeichen der Zahl $1+j$ aufgestellten Gleichungen (VI), (VII) und (VIII) ersetzt.

Ist $a+bj$ eine primäre reguläre Zahl mit zu einander theilerfremden Coordinaten, und setzen wir

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma,$$

so ist $\rho = \sigma = 0$, oder $\rho = 0$ und $\sigma = 1$, oder $\rho = \sigma = 1$, je nachdem $a+bj$ dem ersten, zweiten oder dritten Haupttypus angehört. Vergleichen wir nun die Gleichungen (VI), (VII) und (VIII) unter einander und mit den entsprechenden Formen der Coordinaten a und b, d. h. mit den Ausdrücken

$$6\alpha+3\rho+1 \text{ und } 6\beta+3\sigma,$$

so finden wir, dass die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^{\rho\alpha+(\rho+\sigma+1)\beta+\rho+\sigma} j^{\alpha+2\rho} \qquad \text{(IX)}$$

den Werth des charakteristischen Zeichens von $1+j$ bezüglich einer jeden primären regulären Zahl $a+bj$, deren Coordinaten zu einander theilerfremd sind, darstellt. Denn ist $\rho = \sigma = 0$, so erhalten wir aus dieser Gleichung die Gleichung (VI); ist $\rho = 0$ und $\sigma = 1$, so erhalten wir die Gleichung (VII), und endlich ergibt sich daraus für $\rho = \sigma = 1$ die Gleichung (VIII).

Die Gleichung (IX) gilt übrigens nicht nur für primäre reguläre zweigliedrige Zahlen $a+bj$, deren Coordinaten zu ein-

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ander theilerfremd sind, sondern auch für alle primären regulären reellen Zahlen P; denn es ist in diesem Falle

$$\beta = \rho = \sigma = 0 \text{ und } \alpha = \frac{P-1}{6},$$

woraus wir ersehen, dass unsere Gleichung unter dieser Voraussetzung in die Gleichung (V) übergeht. Ja die Gleichung (IX) bleibt, wie wir jetzt zeigen werden, für alle primären regulären Zahlen bestehen.

8. Bezüglich des Zeichens $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ bleibt uns noch der Fall zur Untersuchung übrig, wo $a+bj$ eine zweigliedrige primäre reguläre Zahl vorstellt, deren Coordinaten nicht zu einander theilerfremd sind. Ist P der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b, so können wir

$$a+bj = P(a_1+b_1 j)$$

setzen, und es sind dann a_1 und b_1 zwei reelle ganze und zu einander theilerfremde Zahlen. Da $a+bj$ primär ist, so können wir stets auch P und $a_1+b_1 j$ als primär annehmen und

$$P = 6n+1,\ a_1 = 6\alpha_1+3\rho_1+1 \text{ und } b_1 = 6\beta_1+3\sigma_1$$

setzen, wobei n, α_1 und β_1 beliebige reelle ganze Zahlen bedeuten, während ρ_1 und σ_1 nur die Werthe 0 und 1 annehmen und nicht gleichzeitig $\rho_1 = 1$ und $\sigma_1 = 0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen ist nun zufolge der Gleichungen (V) und (IX)

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^{\varkappa_1} j^{\lambda_1}, \tag{1}$$

worin

$$\rho_1\alpha_1+(\rho_1+\sigma_1+1)\beta_1+\rho_1+\sigma_1 = \varkappa_1 \text{ und } \alpha_1+2\rho_1+n = \lambda_1$$

gesetzt ist. Die Coordinaten von $a+bj$ haben die Gestalt

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma,$$

wo α, β, ρ und σ dieselbe Bedeutung wie die entsprechenden Grössen α_1, β_1, ρ_1 und σ_1 haben, und es ist

$$\rho = \rho_1,\ \sigma = \sigma_1,$$

$$\alpha \equiv \alpha_1+n+3n\rho_1 \pmod 6 \text{ und } \beta \equiv \beta_1+3n\sigma_1 \pmod 6.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Setzt man ferner noch

$$\varrho\alpha+(\varrho+\sigma+1)\beta+\varrho+\sigma=\varkappa \text{ und } \alpha+2\varrho=\lambda,$$

so findet man

$$\varkappa\equiv\varkappa_1+n\varrho_1 \pmod 2 \text{ und } \lambda\equiv\lambda_1+3n\varrho_1 \pmod 6,$$

also

$$3\varkappa+\lambda\equiv 3\varkappa_1+\lambda_1 \pmod 6,$$

d. h. es folgt aus der Gleichung (1) die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)=(-1)^{\varkappa}j^{\lambda}$$

und das ist die Gleichung (IX). Die Gleichung (IX) gilt also für jede primäre reguläre Zahl $a+bj$.

9. Nachdem wir das charakteristische Zeichen der Zahl $1+j$ bezüglich aller primären regulären Zahlen $a+bj$ bestimmt haben, ist es nun leicht, auch das charakteristische Zeichen der Zahl 3 bezüglich dieser Zahlen $a+bj$ allgemein zu berechnen. Es ist nämlich

$$3=(1+j)(1-j^2)=(1+j)^2j^5$$

und daher zufolge der Gleichungen (I) und (IX)

$$\left(\frac{3}{a+bj}\right)=j^{2\alpha+4\varrho+5\frac{p-1}{6}} \tag{1}$$

worin p die Norm von $a+bj$ bezeichnet und die Grössen α und ϱ dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung (IX) haben. Haben auch β und σ wieder ihre frühere Bedeutung, d. h. setzen wir auch hier

$$a=6\alpha+3\varrho+1 \text{ und } b=6\beta+3\sigma,$$

so ist

$$\frac{p-1}{6}\equiv 2\alpha+\beta+3(\alpha\sigma+\beta\varrho)+4\varrho+2\sigma \pmod 6,$$

und wir erhalten somit aus (1) für das charakteristische Zeichen der Zahl 3 bezüglich einer primären regulären Zahl $a+bj$ die Gleichung

$$\left(\frac{3}{a+bj}\right)=(-1)^{\sigma\alpha+(\varrho+1)\beta+\sigma}j^{2\beta+\sigma}. \tag{X}$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

II. Der bicubische Charakter der Zahl 2.

10. Es sei $a+bj$ eine zweigliedrige Zahl des ersten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten, deren Norm wir mit p bezeichnen wollen; dann können wir in der üblichen Weise

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b + 6\beta$$

setzen. Zur Bestimmung des charakteristischen Zeichens der Zahl 2 genügt jedoch die Eintheilung der regulären primären Zahlen $a+bj$ in Haupttypen noch nicht, sondern wir sind schon bei den Zahlen des ersten Haupttypus genöthigt, zwei Nebentypen zu unterscheiden, je nachdem β gerade oder ungerade ist.

1. Es sei β gerade, also

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 2b' = 6\beta = 12\beta'.$$

Der Weg, den wir hier zur Bestimmung von $\left(\frac{2}{a+bj}\right)$ einschlagen, ist ähnlich dem Verfahren, welches wir zur Bestimmung von $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ angewendet haben. Wir gehen von der Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+aj}{a+bj}\right)$$

aus. Aus derselben ergibt sich unter Berücksichtigung der Congruenz

$$aj \equiv a+b \pmod{a+bj}$$

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right) = \left(\frac{2a+b}{a+bj}\right) = \left(\frac{2(a+b')}{a+bj}\right),$$

also

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right) = \left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b'}{a+bj}\right) \qquad (1)$$

b' ist durch 6 theilbar und daher $a+b'$ eine primäre reguläre Zahl. Ferner ist

$$(1+j)a \equiv 2(a+b') \pmod{a+bj},$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

woraus man unmittelbar erkennt, dass neben $1+j$, a und 2 auch $a+b'$ zu $a+bj$ theilerfremd sein muss. Es ist daher

$$\left(\frac{a+b'}{a+bj}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{6}\frac{a+b'-1}{6}}\left(\frac{a+bj}{a+b'}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{6}\frac{a+b'-1}{6}}\left(\frac{a(1-2j)}{a+b'}\right).$$

Nun ist

$$\left(\frac{a(1-2j)}{a+b'}\right)=\left(\frac{1-2j}{a+b'}\right)=\left(\frac{j^4}{a+b'}\right)\left(\frac{1+j}{a+b'}\right)=j^{4\frac{(a+b')^2-1}{6}+\frac{a+b'-1}{6}}$$

also

$$\left(\frac{a+b'}{a+bj}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{6}\frac{a+b'-1}{6}}j^{4\frac{(a+b')^2-1}{6}+\frac{a+b'-1}{6}} \tag{2}$$

In unserem Falle ist

$$\frac{p-1}{6}\equiv 0 \pmod 2,\quad \frac{a+b'-1}{6}=\alpha+\beta' \text{ und}$$

$$\frac{(a+b')^2-1}{6}\equiv 2(\alpha+\beta') \pmod 6.$$

Somit folgt aus (2)

$$\left(\frac{a+b'}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha+\beta'}. \tag{3}$$

Für das Zeichen $\left(\frac{a}{a+bj}\right)$ besteht die Gleichung (1) in der Nummer 5, welche hier die Gestalt

$$\left(\frac{a}{a+bj}\right)=j^{2\alpha} \tag{4}$$

annimmt, und für das Zeichen $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ haben wir die Gleichung (VI) gefunden, die hier in die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)=j^{\alpha} \tag{5}$$

übergeht. Die Gleichungen (1), (3), (4) und (5) ergeben zusammen das Resultat

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right)=(-1)^{\beta'} \tag{6}$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

2. Es sei β ungerade, also

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 2b' = 6\beta = 12\beta'+6.$$

In diesem Falle gehen wir von der Gleichung

$$\left(\frac{2a+bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b'j}{a+bj}\right) \tag{7}$$

aus. Hierin ist

$$\left(\frac{2a+bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{a}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a-1}{6}} j^{2\frac{a-1}{6}}$$

Da nun

$$\frac{p-1}{6} \equiv 1 \pmod 2 \text{ und } \frac{a-1}{6} = \alpha$$

ist, so bekommen wir daraus

$$\left(\frac{2a+bj}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha} j^{2\alpha} \tag{8}$$

Ferner ist

$$\left(\frac{a+b'j}{a+bj}\right) = \left(\frac{-b'j}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}} j^{\frac{p-1}{6}} \left(\frac{b'}{a+bj}\right)$$

und, da

$$\frac{p-1}{6} \equiv 2\alpha+2\beta'+1 \pmod 6$$

ist,

$$\left(\frac{a+b'j}{a+bj}\right) = -j^{2\alpha+2\beta'+1}\left(\frac{b'}{a+bj}\right). \tag{9}$$

Nun sei 3^{ν} die höchste in b' enthaltene Potenz von 3; dann ist $\nu \geqq 1$ und b' hat die Form

$$b' = 3^{\nu}(6\beta_2+\varepsilon), \tag{10}$$

wobei β_2 eine beliebige reelle ganze Zahl sein kann, während ε nur den Werth 1 oder den Werth 5 haben kann. Zufolge (10) ist

$$\left(\frac{b'}{a+bj}\right) = \left(\frac{3^{\nu}}{a+bj}\right)\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right) \tag{11}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und gemäss der Gleichung (X)

$$\left(\frac{3^\nu}{a+bj}\right) = (-1)^{\nu\beta} j^{2\nu\beta}. \tag{12}$$

Ferner ergibt sich sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = 5$ unter Beachtung der Gleichung (10) und Anwendung von (III)

$$\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta_2}.$$

Demnach erhalten wir aus (11)

$$\left(\frac{b'}{a+bj}\right) = (-1)^{\nu\beta+\beta_2} j^{2\nu\beta} \tag{13}$$

Nach (9) und (13) ist

$$\left(\frac{a+b'j}{a+bj}\right) = (-1)^{\nu\beta+\beta_2+1} j^{2\alpha+2\beta'+2\nu\beta+1} \tag{14}$$

und aus (7), (8) und (14) ergibt sich

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha+\beta'+\beta_2} j^{\beta'+\nu\beta+2}. \tag{15}$$

Da diese Formel ziemlich complicirt ist, indem man von der Zahl $a+bj$ die Grössen α, β, β', β_2 und ν zu bestimmen hat, so wollen wir versuchen, dieselbe zu vereinfachen und einige dieser Grössen hinwegzuschaffen. Am vortheilhaftesten wäre es, wenn man die Grössen β_2 und ν aus der Gleichung (15) entfernen könnte, weil diese Grössen erst durch eine verhältnissmässig weit gehende Zerlegung der Zahl b gefunden werden. Es ist in der That auch möglich, diese Grössen wegzuschaffen. Es ist nämlich

$$b' = 6\beta'+3 = 3^\nu(6\beta_2+\varepsilon)$$

und daraus folgt

$$\beta' = 3^\nu\beta_2 + \frac{(3^{\nu-1}-1)\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon-1}{2} \tag{16}$$

Ist $\nu = 1$, so erhält man aus dieser Gleichung die Congruenz

$$\beta' \equiv \beta_2 \pmod 2,$$

©Akademie d

und wenn man noch beachtet, dass

$$\beta = 2\beta' + 1$$

ist, so gewinnt man in diesem Falle aus (15) die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha+\beta'+1}. \tag{17}$$

Ist $\nu > 1$, so hat man zufolge (16)

$$\beta' = 3^{\nu}\beta_2 + \varepsilon(1+3+3^2+\ldots+3^{\nu-2}) + \frac{\varepsilon-1}{2},$$

also

$$\beta' \equiv 3\beta_2 + \varepsilon\{1+3(\nu-2)\} + \frac{\varepsilon-1}{2} \pmod 6$$

und daraus ergibt sich sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = 5$

$$\beta' \equiv 3\beta_2 + 3\nu + 1 \pmod 6. \tag{18}$$

Ferner ist zufolge dieser Congruenz

$$\beta' + \nu\beta + 2 = \beta' + \nu(2\beta'+1) + 2 =$$
$$= (2\nu+1)(3\beta_2 + 3\nu + 1) + \nu + 2 \equiv 3\beta_2 + 3 \pmod 6$$

Somit erhalten wir aus der Gleichung (15) auch in diesem Falle die Gleichung (17).

Wir haben also für das charakteristische Zeichen der Zahl 2 bezüglich einer Zahl $a+bj$ des ersten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten zwei Gleichungen (6) und (17) erhalten. Die erstere gilt für den Fall, dass β gerade, und die letztere für den Fall, dass β ungerade ist. Diese zwei Gleichungen lassen sich jedoch leicht zu einer einzigen Formel vereinigen.

Setzen wir allgemein

$$a = 6\alpha + 1 \text{ und } b = 12\beta' + 6\sigma',$$

worin σ' nur die Werthe 0 oder 1 annimmt, so ist für jede Zahl $a+bj$ des ersten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\sigma'\alpha+\beta'+\sigma'} \tag{XI}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Denn diese Gleichung geht für $\sigma' = 0$ in die Gleichung (6) und für $\sigma' = 1$ in die Gleichung (17) über. Die Gleichung (XI) gilt übrigens auch für den Fall, dass $a+bj$ eine primäre reelle reguläre Zahl darstellt; denn in diesem Falle ist

$$b = \beta' = \sigma' = 0,$$

so dass wir für das charakteristische Zeichen von 2 bezüglich dieser Zahl $a+bj$ aus der Gleichung (XI) den Werth 1 erhalten, was gemäss der Gleichung (II) richtig ist.

11. Bedeutet $a+bj$ eine Zahl des dritten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten und p deren Norm, so haben a und b die Gestalt

$$a = 6\alpha+4 \text{ und } b = 6\beta+3.$$

Zur Ermittlung des Zeichens $\left(\frac{2}{a+bj}\right)$ sind wir auch hier wieder genöthigt, die Zahlen $a+bj$ in zwei Gruppen abzutheilen, die sich durch die Form der Grösse α von einander unterscheiden. Die erste Gruppe enthält die Zahlen $a+bj$ mit geradem α und die zweite jene mit ungeradem α.

1. Es sei α gerade, also

$$a = 2a' = 6\alpha+4 = 12\alpha'+4 \text{ und } b = 6\beta+3.$$

Hier führt uns die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{b}{a+bj}\right) = \left(\frac{b+bj}{a+bj}\right)$$

zum erwünschten Ziele. Weil

$$b \equiv (a+b)j \pmod{a+bj}$$

ist, so bekommen wir zunächst

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{b}{a+bj}\right) = \left(\frac{(a+2b)j}{a+bj}\right) = j^{\frac{p-1}{6}}\left(\frac{a+2b}{a+bj}\right)$$

und, da

$$\frac{p-1}{6} \equiv 5\alpha+4\beta \equiv 4(\alpha'+\beta) \pmod{6}$$

ist,

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{b}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta}j^{\alpha'+\beta}\left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a'+b}{a+bj}\right). \quad (1)$$

Nun ist

$$a'+b = 6(\alpha'+\beta)+5, \quad (2)$$

also $-(a'+b)$ eine primäre reguläre Zahl und, wie die Congruenz

$$b(1+j) \equiv 2(a'+b) \pmod{a+bj}$$

sagt, zu $a+bj$ relativ prim. Wir haben daher

$$\left(\frac{a'+b}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}}\left(\frac{-a'-b}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\left(1+\frac{-a'-b-1}{6}\right)}\left(\frac{a+bj}{a'+b}\right),$$

und weil

$$\frac{p-1}{6} \equiv 0 \pmod{2}$$

ist, so ergibt sich daraus

$$\left(\frac{a'+b}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+bj}{a'+b}\right) = \left(\frac{b(j-2)}{a'+b}\right) = \left(\frac{j^2(1+j)}{a'+b}\right) =$$

$$= j^{2\frac{(a'+b)^2-1}{6}+\frac{-a'-b-1}{6}}$$

also mit Berücksichtigung der Congruenz

$$\frac{(a'+b)^2-1}{6} \equiv 4(\alpha'+\beta+1) \pmod{6}$$

und der Gleichung (2)

$$\left(\frac{a'+b}{a+bj}\right) = j^{\alpha'+\beta+1}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (1) ein, so erhält man

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{b}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta}j^{2\alpha'+2\beta+1}\left(\frac{2}{a+bj}\right) \quad (3)$$

Jetzt handelt es sich noch darum, das Zeichen $\left(\frac{b}{a+bj}\right)$ zu bestimmen. b ist eine ungerade Zahl, welche aber noch den

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Factor 3 wenigstens einmal enthält. Es sei nun 3^ν die höchste Potenz von 3, welche in b noch enthalten ist; dann ist

$$b = 3^\nu(6\beta_2+\varepsilon),$$

worin ε entweder den Werth 1 oder den Werth 5 hat, während β_2 eine beliebige reelle ganze Zahl sein kann und $\nu \geqq 1$ ist. Wir haben somit

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = \left(\frac{3^\nu}{a+bj}\right)\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right)$$

Im vorliegenden Falle ist nach Gleichung (X)

$$\left(\frac{3^\nu}{a+bj}\right) = (-1)^\nu j^{\nu(2\beta+1)},$$

also

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = (-1)^\nu j^{\nu(2\beta+1)}\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right)$$

Ferner findet man sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = 5$

$$\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right) = 1,$$

wonach wir

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = (-1)^\nu j^{\nu(2\beta+1)}$$

erhalten. Für das Zeichen $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ liefert uns die Gleichung (VIII) noch den Werth

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^\beta j^{2\alpha'+2},$$

und die Gleichung (3) geht demnach über in

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\nu} j^{\nu(2\beta+1)-2\beta+1}. \qquad (4)$$

Hier können wir wieder die Grösse ν wegschaffen.
Für $\nu = 1$ erhalten wir unmittelbar

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+1} j^2. \qquad (5)$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ist dagegen $\nu > 1$, so gilt hier wieder die Congruenz (18) der vorigen Nummer, wenn man darin β statt β' schreibt, d. h. es ist

$$\beta \equiv 3\beta_2 + 3\nu + 1 \pmod 6. \tag{6}$$

Somit ist

$$2\beta \equiv 2 \pmod 6 \text{ und } \nu(2\beta+1) - 2\beta + 1 \equiv 3\nu - 1 \pmod 6$$

und wir erhalten daher auch in diesem Falle aus der Gleichung (4) die Gleichung (5).

2. Es sei α ungerade, also

$$a = 2a' = 6\alpha + 4 = 12\alpha' + 10 \text{ und } b = 6\beta + 3.$$

In diesem Falle gehen wir von der Gleichung

$$\left(\frac{a+2bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right) \tag{7}$$

aus und haben zunächst

$$\left(\frac{a+2bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{bj}{a+bj}\right) = j^{\frac{p-1}{6}}\left(\frac{b}{a+bj}\right)$$

Hier ist

$$\frac{p-1}{6} \equiv 4\alpha' + 4\beta + 5 \pmod 6,$$

mithin

$$\left(\frac{a+2bj}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+1} j^{\alpha'+\beta+2}\left(\frac{b}{a+bj}\right) \tag{8}$$

Wir setzen wieder

$$b = 3^{\nu}(6\beta_2 + \varepsilon),$$

wobei 3^{ν} die höchste in b enthaltene Potenz von 3 ist und ε entweder den Werth 1 oder den Werth 5 hat. Dann ist β_2 eine reelle ganze Zahl und $\nu \geqq 1$, und wir erhalten aus der Gleichung (X) unter den gegenwärtigen Voraussetzungen

$$\left(\frac{3^{\nu}}{a+bj}\right) = j^{\nu(2\beta+1)},$$

also

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = j^{\nu(2\beta+1)}\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und, da hier sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = 5$

$$\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta_2}$$

ist,

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta_2} j^{\nu(2\beta+1)},$$

wonach die Gleichung (8) übergeht in

$$\left(\frac{a+2bj}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+\beta_2+1} j^{\alpha'+\beta+2+\nu(2\beta+1)}.$$

Demgemäss nimmt die Gleichung (7) die Gestalt an

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+\beta_2+1} j^{\alpha'+\beta+2+\nu(2\beta+1)}. \qquad (9)$$

Wir haben jetzt noch das Zeichen $\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right)$ zu ermitteln. Aus der Congruenz

$$bj \equiv -a \pmod{a+bj}$$

folgt

$$\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{-a'}{a+bj}\right) = \left(\frac{-6\alpha'-5}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}(\alpha'+1)}\left(\frac{a+bj}{6\alpha'+5}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{6}(\alpha'+1)} j^{\frac{a'^2-1}{6}}$$

und, da

$$\frac{p-1}{6} \equiv 1 \pmod 2 \text{ und } \frac{a'^2-1}{6} \equiv 4(\alpha'+1) \pmod 6$$

ist,

$$\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right) = j^{\alpha'+1}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (9) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+\beta_2+1} j^{\beta+1+\nu(2\beta+1)}. \qquad (10)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Grössen ν und β_2 wieder entfernen.

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ist $\nu = 1$, so ist

$$b = 6\beta+3 = 3(6\beta_2+\varepsilon), \text{ also } \beta \equiv \beta_2 \pmod 2$$

und daher

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+1} j^2. \tag{11}$$

Für den Fall, dass $\nu > 1$ ist, besteht wieder die Congruenz (6), aus welcher man

$$\beta+1+\nu(2\beta+1) \equiv (3\beta_2+3\nu+1)(1+2\nu)+\nu+1 \equiv$$
$$\equiv 3\beta_2+2 \pmod 6$$

erhält. Es ergibt sich daher aus der Gleichung (10) auch für diesen Fall wieder die Gleichung (11).

Wir haben also für das chrakteristische Zeichen der Zahl 2 bezüglich der Zahlen $a+bj$ des dritten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten wieder zwei Gleichungen (5) und (11) erhalten. Die erstere gilt für den Fall, dass α gerade, und die letztere für den Fall, dass α ungerade ist. Setzen wir nun allgemein

$$a = 12\alpha'+6\rho'+4 \text{ und } b = 6\beta+3,$$

so dass im ersten Falle $\rho' = 0$ und im zweiten Falle $\rho' = 1$ ist so ersetzt die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\rho'\beta+1} j^2 \tag{XII}$$

die Gleichungen (5) und (11) vollkommen. Denn diese Gleichung geht für $\rho' = 0$ in die Gleichung (5) und für $\rho' = 1$ in die Gleichung (11) über.

12. Ist $a+bj$ eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten, so können wir

$$a = 12\alpha'+6\rho'+1 \text{ und } b = 12\beta'+3\sigma'+3$$

setzen, wobei ρ' und σ' unabhängig von einander nur die Werthe 0 oder 1 haben, und es ist

$$a-bj^2 = a+b-bj = 12(\alpha'+\beta')+6(\rho'+\sigma')+$$
$$+4-(12\beta'+3\sigma'+3)j$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

eine Zahl des dritten Haupttypus mit ebenfalls zu einander theilerfremden Coordinaten. Setzen wir daher

$$a+b=a_1,\ -b=b_1,\ a_1=12\alpha_1'+6\rho_1'+4 \text{ und } b_1=6\beta_1+3,$$

wobei ρ_1' wieder nur den Werth 0 oder den Werth 1 haben soll, so ist nach Gleichung (XII)

$$\left(\frac{2}{a-bj^2}\right)=(-1)^{\alpha_1'+\rho_1'\beta_1+1}j^2$$

Nun ist

$$\beta_1\equiv\sigma'+1 \pmod 2),\ \alpha_1'=\alpha'+\beta'+\rho'\sigma' \text{ und } \rho_1'\equiv\rho'+\sigma' \pmod 2),$$

folglich

$$\left(\frac{2}{a-bj^2}\right)=(-1)^{\alpha'+\beta'+\rho'+1}j^2,$$

und da zufolge der Gleichung (IV)

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{2}{a-bj^2}\right)=1$$

ist, so erhalten wir für das Zeichen $\left(\frac{2}{a+bj}\right)$ die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha'+\beta'+\rho'}j. \qquad \text{(XIII)}$$

13. Wir wollen nun auch für das charakteristische Zeichen der Zahl 2 bezüglich einer primären regulären zweigliedrigen Zahl $a+bj$, deren Coordinaten zu einander theilerfremd sind, eine allgemeine, für alle drei Haupttypen der primären regulären Zahlen geltende Gleichung ableiten, wie wir dies bezüglich des Zeichens $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ gethan haben. Setzen wir allgemein

$$a=12\alpha'+6\rho'+3\rho+1 \text{ und } b=12\beta'+6\sigma'+3\sigma$$

in der Weise, dass für die Zahlen des ersten Haupttypus $\rho=\sigma=0$, für jene des zweiten Haupttypus $\rho=0$ und $\sigma=1$, für jene des dritten Haupttypus $\rho=\sigma=1$ ist und ausserdem ρ' und σ' unabhängig von einander entweder den Werth 1 oder den Werth 0 haben, so ist stets

$$\alpha\equiv\rho' \pmod 2) \text{ und } \beta\equiv\sigma' \pmod 2),$$

©Akademie d

wenn α und β dieselbe Bedeutung wie in den vorausgehenden Nummern haben. Daher können wir für die Gleichung (XI) auch schreiben

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\rho'\sigma'+\beta'+\sigma'} \qquad (\text{XI}\,a)$$

und für die Gleichung (XII)

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\rho'\sigma'+1} j^2 \qquad (\text{XII}\,a)$$

Die drei Gleichungen (XIII), (XI a) und (XII a) können wir nun durch eine einzige Gleichung ersetzen, und zwar durch die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha\alpha'+(\rho+1)\beta'+(\sigma+1)\sigma'+(\rho+\sigma)\rho'+(1+\rho+\sigma)\rho'\sigma'+\rho} j^{\rho+\sigma}. \qquad (\text{XIV})$$

Man gelangt zu dieser Gleichung, indem man die Formeln (XIII), (XI a) und (XII a) unter einander und mit den entsprechenden Werthen von ρ und σ vergleicht. Die Gleichung (XIV) ist richtig, weil sie für $\rho = \sigma = 0$ in die Gleichung (XI a), für $\rho = 0$ und $\sigma = 1$ in die Gleichung (XIII) und endlich für $\rho = \sigma = 1$ in die Gleichung (XII a) übergeht. Sie gilt auch für den Fall, dass $a+bj$ eine reelle primäre reguläre Zahl vorstellt, weil die Gleichungen (XI) und (XI a) auch für diesen Fall richtig sind. Wir können auch noch zeigen, dass die Gleichung (XIV) für alle primären regulären Zahlen $a+bj$ bestehen bleibt.

14. Bei den bisherigen Betrachtungen über das Zeichen $\left(\frac{2}{a+bj}\right)$ haben wir noch den Fall ausgeschlossen, wo $a+bj$ eine zweigliedrige primäre reguläre Zahl vorstellt, deren Coordinaten nicht zu einander theilerfremd sind. Es sei nun $a+bj$ eine solche Zahl und P der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b; dann können wir

$$a+bj = P(a_1+b_1 j)$$

setzen, wobei a_1 und b_1 zwei reelle ganze und zu einander theilerfremde Zahlen bedeuten. Gleichzeitig mit $a+bj$ können wir stets

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

auch P und $a_1+b_1 j$ als primär annehmen, so dass P, a_1 und b_1 sich auf die Formen

$$P = 12n+6\nu+1, \quad a_1 = 12\alpha_1'+6\rho_1'+3\rho_1+1 \text{ und}$$
$$b_1 = 12\beta_1'+6\sigma_1'+3\sigma_1$$

bringen lassen, worin n, α_1' und β_1' beliebige reelle ganze Zahlen bedeuten, während die Grössen ν, ρ_1', ρ_1, σ_1' und σ_1 nur die Werthe 0 und 1 annehmen und nicht gleichzeitig $\rho_1 = 1$ und $\sigma_1 = 0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen ist zufolge der Gleichungen (II) und (XIV)

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\varkappa_1} j^{\lambda_1}, \tag{1}$$

wobei

$$\varkappa_1 = \sigma_1\alpha_1'+(\rho_1+1)\beta_1'+(\sigma_1+1)\sigma_1'+(\rho_1+\sigma_1)\rho_1'+$$
$$+(1+\rho_1+\sigma_1)\rho_1'\sigma_1'+\rho_1 \text{ und } \lambda_1 = \rho_1+\sigma_1$$

gesetzt ist. Ferner ist

$$a = a_1 P \text{ und } b = b_1 P,$$

also

$$a = (12n+6\nu+1)(12\alpha_1'+6\rho_1'+3\rho_1+1)$$
$$\equiv 12(\alpha_1'+\nu\rho_1'+n\rho_1+\nu\rho_1+n)+6(\rho_1'+\nu\rho_1+\nu)+3\rho_1+1 \pmod{24}$$

und

$$b = (12n+6\nu+1)(12\beta_1'+6\sigma_1'+3\sigma_1)$$
$$\equiv 12(\beta_1'+\nu\sigma_1'+n\sigma_1+\nu\sigma_1)+6(\sigma_1'+\nu\sigma_1)+3\sigma_1 \pmod{24}.$$

Die Coordinaten von $a+bj$ haben die Gestalt

$$a = 12\alpha'+6\rho'+3\rho+1 \text{ und } b = 12\beta'+6\sigma'+3\sigma,$$

wo α', β', ρ', σ', ρ und σ dieselbe Bedeutung wie die entsprechenden Grössen α_1', β_1', ρ_1', σ_1', ρ_1 und σ_1 haben, und es ist zufolge der obigen Congruenzen

$$\rho = \rho_1 \text{ und } \sigma = \sigma_1; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha' \equiv \alpha_1'+\nu\rho_1+n+\nu\rho_1\rho_1' \pmod 2;\\
&\beta' \equiv \beta_1'+\nu\sigma_1'+n\sigma_1+\nu\sigma_1+\nu\sigma_1\sigma_1' \pmod 2;\\
&\rho' \equiv \rho_1'+\nu\rho_1+\nu \pmod 2 \text{ und } \sigma' \equiv \sigma_1'+\nu\sigma_1 \pmod 2.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Setzen wir ferner

$$\varkappa = \sigma\alpha' + (\rho+1)\beta' + (\sigma+1)\sigma' + (\rho+\sigma)\rho' + (1+\rho+\sigma)\rho'\sigma' + \rho$$
$$\text{und } \lambda = \rho+\sigma,$$

so ist gemäss der Gleichungen (2)

$$\lambda = \rho_1 + \sigma_1 = \lambda_1 \tag{4}$$

und aus den Congruenzen (3) findet man, wenn man beachtet, dass die Grössen ρ'_1, ρ_1, σ'_1 und σ_1 stets nur den Werth 0 oder den Werth 1 haben und ausserdem immer

$$\rho_1\sigma_1 = \rho_1$$

ist, für $\varkappa$ die Congruenz

$$\varkappa \equiv \varkappa_1 \pmod 2. \tag{5}$$

Die Relationen (4) und (5) sagen uns nun, dass neben der Gleichung (1) auch die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\varkappa} j^{\lambda}$$

besteht, und das ist die Gleichung (XIV). Die Gleichung (XIV) gilt also für jede primäre reguläre Zahl $a+bj$.

III. Der cubische Charakter der Zahlen $1+j$ und 2.

15. Die aus den dritten Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen fallen mit den aus den sechsten Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen zusammen, weil unter den sechsten Einheitswurzeln ausser den dritten Einheitswurzeln nur noch die Negativen von den letzteren vorkommen. Daher treten in der Theorie der cubischen Reste die nämlichen Zahlen auf, wie in der Theorie der sechsten Potenzreste, und man kann leicht aus dem bicubischen Charakter einer Zahl in Bezug auf irgend einen Modul den cubischen Charakter dieser Zahl in Bezug auf denselben Modul ableiten.

Ist $m = a+bj$ eine reguläre Primzahl, p deren Norm und n eine beliebige, zu m theilerfremde Zahl unseres Systems, so ist nach der Definition des Zeichens $\left(\frac{n}{m}\right)$ stets

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$n^{\frac{p-1}{6}} \equiv \left(\frac{n}{m}\right) \pmod{m},$$

und daraus folgt

$$n^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left(\frac{n}{m}\right)^2 \pmod{m}.$$

Drücken wir durch das Zeichen

$$\left[\frac{n}{m}\right]$$

den cubischen Charakter der Zahl n bezüglich der Primzahl m aus, so ist demnach

$$\left[\frac{n}{m}\right] = \left(\frac{n}{m}\right)^2.$$

Diese Gleichung bleibt, wie man leicht erkennt, auch dann noch bestehen, wenn m eine zusammengesetzte reguläre Zahl vorstellt und das Zeichen $\left[\frac{n}{m}\right]$ für zusammengesetzte Zahlen m in derselben Weise verallgemeinert wird, wie wir das Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ für zusammengesetzte Zahlen m definirt haben.

Zufolge der Gleichungen (1) und (IX) ist nun für jede primäre reguläre Zahl $a+bj$

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right] = (-1)^{\rho} j^{2\alpha+\rho}, \tag{2}$$

wobei α und ρ dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung (IX) haben. In dieser Gleichung (2) ist die Bezeichnungsweise noch etwas verschieden von jener, welche man in der Theorie der cubischen Reste gewöhnlich anwendet, indem wir hier als Grundeinheit eine primitive sechste Einheitswurzel anstatt einer primitiven dritten Einheitswurzel genommen haben. Es ist jedoch leicht, das Gefundene auf die gewöhnliche Form zu bringen.

Bedeutet I die primitive dritte Einheitswurzel

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

©Akademie der Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so ist

$$I = j^2,$$

und jede Zahl in der Theorie der cubischen Reste hat dann die Gestalt $a+bI$. Drückt man I durch j aus, so hat man

$$a+bI = a+bj^2 = a-b+bj = a'+b'j.$$

Ist $a+bI$ eine primäre reguläre Zahl und setzen wir in der üblichen Weise

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma,$$

so ist

$$a' = 6(\alpha-\beta)+3(\rho-\sigma)+1 \text{ und } b' = 6\beta+3\sigma,$$

also zufolge (2)

$$\left[\frac{1+j}{a+bI}\right] = (-1)^{\rho-\sigma} j^{2(\alpha-\beta)+\rho-\sigma}. \tag{3}$$

Da

$$j = -I^2$$

ist, so ergibt sich aus (3)

$$\left[\frac{1-I^2}{a+bI}\right] = I^{\alpha-\beta+2(\rho-\sigma)}. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung findet man leicht den Werth des Zeichens $\left[\frac{1-I}{a+bI}\right]$. Bezeichnen wir die Norm von $a+bI$ mit p, so ist

$$p = a^2+b^2-ab$$

und daraus folgt

$$\frac{p-1}{3} \equiv 0 \pmod 2 \text{ und } \frac{p-1}{3} \equiv \alpha+2\rho-2\beta-\sigma \pmod 3.$$

Weil ferner

$$1-I = -(1-I^2)I$$

ist, so hat man nach (4)

$$\left[\frac{1-I}{a+bI}\right] = I^{2\alpha+\rho} \tag{5}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

oder, was dasselbe ist,

$$\left[\frac{1-I}{a+bI}\right] = I^{\frac{a-1}{3}} \tag{6}$$

Für das Zeichen $\left[\frac{3}{a+bI}\right]$ erhält man aus (4) und (5) den Werth

$$\left[\frac{3}{a+bI}\right] = \left[\frac{1-I}{a+bI}\right]\left[\frac{1-I^2}{a+bI}\right] = I^{2\beta+\sigma},$$

also

$$\left[\frac{3}{a+bI}\right] = I^{\frac{b}{3}} \tag{7}$$

Die zwei Gleichungen (6) und (7) stellen die Ergänzungssätze zum cubischen Reciprocitätsgesetze dar.

16. Für das Zeichen $\left[\frac{2}{a+bj}\right]$ liefert uns die Gleichung (XIV) den Werth

$$\left[\frac{2}{a+bj}\right] = j^{2(\rho+\sigma)} \tag{1}$$

wo ρ und σ dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung (XIV) haben. In dieser Gleichung könnte man auf ähnliche Weise wie in der vorhergehenden Nummer j durch I ersetzen. Wir wollen jedoch dieses nicht ausführen, weil das Zeichen $\left[\frac{2}{a+bI}\right]$, worin $a+bI$ wieder eine primäre reguläre (nicht durch 2 oder durch durch $1-I$ theilbare) Zahl vorstellt, leicht mit Hilfe des cubischen Reciprocitätsgesetzes ermittelt werden kann, sondern wir wollen die Gleichung (1) dazu benützen, um die cubische Reciprocität zwischen der Zahl 2 und einer primären regulären Zahl $a+bI$ nachzuweisen. In der Theorie der cubischen Reste nimmt nämlich die Zahl 2 keine Ausnahmsstellung wie in der Theorie der sechsten Potenzreste ein, sondern man kann hier ebenso gut von dem cubischen Charakter einer Zahl in Bezug auf den Modul 2 als in Bezug auf irgend einen anderen Modul sprechen, weil die um 1 verminderte Norm von 2, das ist die Zahl 3, durch 3 theilbar ist und für jede ungerade Zahl $a+bI$ die Congruenz

$$(a+bI)^3 \equiv 1 \pmod{2}$$

besteht.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ist $a+bj$ eine primäre reguläre Zahl, so dass wir in der üblichen Weise

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma$$

setzen können, so ist für $\rho = \sigma = 0$

$$a+bj \equiv 1 \pmod{2},$$

für $\rho = 0$ und $\sigma = 1$

$$a+bj \equiv 1+j \equiv j-1 = j^2 \pmod{2}$$

und für $\rho = \sigma = 1$

$$a+bj \equiv j \equiv -j = j^4 \pmod{2}.$$

Es ist demnach stets

$$a+bj \equiv j^{2(\rho+\sigma)} \pmod{2},$$

oder, anders ausgedrückt,

$$\left[\frac{a+bj}{2}\right] = j^{2(\rho+\sigma)} \pmod{2}. \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ersehen wir, dass

$$\left[\frac{2}{a+bj}\right] = \left[\frac{a+bj}{2}\right],$$

also auch

$$\left[\frac{2}{a+bI}\right] = \left[\frac{a+bI}{2}\right]$$

ist, wenn $a+bI$ ebenfalls eine primäre reguläre Zahl bedeutet.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Gmeiner Josef Anton

Artikel/Article: Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze. 1330-1361