©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreisbogenpolygon

von

Georg Pick in Prag.

Die Beziehungen zwischen der Gestalt eines Kreisbogenpolygons und den Constanten der Differentialgleichung dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung, welche die Abbildung desselben auf eine Halbebene vermitteln, sind bisher noch unbekannt. Man weiss zwar, in welcher Weise die Winkel eines n-Ecks in die Differentialgleichung eintreten; dagegen ist nichts darüber festgestellt, wie die $2(n-3)$ übrigen (Kreisverwandtschaften gegenüber invarianten) Bestimmungsstücke von den in gleicher Zahl verfügbaren reellen Constanten der Differentialgleichung abhängen. Die Ermittelung dieser Abhängigkeit dürfte mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verknüpft sein, und es scheint mir desshalb gerechtfertigt, wenn ich im Folgenden eine Untersuchung, welche sich aber auf solche Polygone beschränkt, die der Halbebene unendlich benachbart sind, mittheile, da die Resultate derselben eine bemerkenswerthe Form besitzen, von welcher aus wohl ein Weg zu allgemeinen Gesetzen sich wird finden lassen.

Da es sich zunächst nicht um möglichste Vollständigkeit, sondern um die Darlegung der Methode handelt, so bespreche ich mit grösserer Ausführlichkeit nur den Fall, dass die Begrenzungsbögen des Polygons einen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen, indem ich allgemeinere Untersuchungen und Erweiterungen der behandelten Problems künftigen Publicationen vorbehalte.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

1.

Die Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Abbildung der positiven Halbebene auf ein Kreisbogen-n-Eck der ξ-Ebene vermittelt, hat bekanntlich die Gestalt

$$[\xi]_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{(x-a_k)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{x-a_k}, \qquad 1)$$

in welcher $[\xi]_x$ die Schwarz'sche Differentialinvariante bedeutet, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ jene Punkte der Axe der reellen x sind, welche den Ecken des Polygons entsprechen, und $r_1, r_2, \ldots r_n$ in bekannter Weise von den Winkeln $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \ldots \lambda_n\pi$ des Polygons abhängen:

$$r_k = \frac{1-\lambda_k^2}{2}.$$

Nimmt man nun an, dass das fragliche Polygon ein der x-Halbebene unendlich benachbartes Gebiet darstellt, dass also ξ selbst von x unendlich wenig verschieden ist, so vereinfacht sich die Differentialgleichung bedeutend. Denn die linke Seite derselben ist ein Differentialausdruck, welcher dadurch charakterisirt ist, dritter Ordnung zu sein und zu verschwinden, sobald ξ eine lineare gebrochene Function von x ist. Ist nun ξ von x unendlich wenig verschieden und linear von x abhängig, so kann man bekanntlich

$$\xi = x + \varepsilon(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$$

setzen, wo ε einen unendlich kleinen Parameter bedeutet. Bei solchen infinitesimalen linearen Substitutionen ist also einfach

$$\frac{d^3\xi}{dx^3} = 0,$$

oder wenn wir $\frac{\xi - x}{\varepsilon} = \eta$ setzen,

$$\frac{d^3\eta}{dx^3} = 0.$$

Man darf also erwarten, dass sich die Differentialgleichung in die einfachere Form

$$\eta''' = R(x)$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wird setzen lassen. In der That ergibt sich auch durch directe Rechnung für

$$\xi = x + \varepsilon\eta$$

unter Voraussetzung eines unendlich kleinen ε

$$[\xi]_c = \varepsilon \,.\, \eta''',$$

wenn von höheren ε-Potenzen abgesehen wird. Hieraus ist zugleich klar, dass in diesem Falle die r_k und s_k unendlich klein von der Ordnung von ε werden. Wir setzen

$$r_k = \varepsilon\rho_k, \qquad s_k = \varepsilon\sigma_k$$

und erhalten demnach

$$\eta''' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{(x-a_k)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{x-a_k}. \tag{2}$$

Diese Differentialgleichung ist direct integrabel und gibt

$$\begin{aligned} \eta = \alpha + \beta x + \gamma x^2 & \\ -\Sigma\ \rho_k\,(x-a_k)\ \lg\,(x-a_k) & \\ -\Sigma\,\frac{\sigma_k}{2}\,(x-a_k)^2 \lg\,(x-a_k), & \end{aligned} \tag{3}$$

worin α, β, γ die Integrationsconstanten sind.

2.

Wir denken uns die Variable ξ in derselben Ebene gedeutet wie x. Die Grösse $\varepsilon\eta$ gibt dann die unendlich kleine Verschiebung, welche der Punkt x vermöge der Abbildung erleidet. Wir betrachten jetzt insbesondere die Punkte der reellen Axe und denken uns die ihnen zugehörigen Verschiebungen in reellen und imaginären Theil zerlegt:

$$\varepsilon\eta = u + iv.$$

Der Punkt x der reellen Axe geht also über in den Punkt mit den Coordinaten $x+u$, v.

Irgend eine der Strecken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten a_k geht in einen Kreisbogen über, der von dieser

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Strecke unendlich wenig verschieden ist, also einem Kreise angehört von der Gleichungsform:

$$y = \lambda + \mu x + \nu(x^2 + y^2),$$

wo λ, μ, ν unendlich klein sind. Diese Gleichung muss befriedigt sein, wenn für x $x+u$ und für y v eingesetzt wird. Dies gibt, da μ und ν unendlich klein sind,

$$v = \lambda + \mu x + \nu x^2,$$

so dass sich die drei den Kreis bestimmenden Coëfficienten λ, μ, ν unmittelbar aus dem Ausdruck entnehmen lassen, welcher v in Function von x darstellt.

Um diese Darstellung zu erhalten, setzen wir, was offenbar erlaubt ist, ε als reell voraus. Wir setzen ferner die drei Integrationsconstanten α, β, γ gleich Null, da eine beliebige lineare Substitution (hier natürlich eine infinitesimale) von ξ noch freisteht. Endlich denken wir die Logarithmen so normirt, dass sie für reelle positive Werthe ihrer Argumente reell sind. Unter dieser Voraussetzung ist v für alle x, welche grösser als a_n sind, gleich Null. Beachtet man nun die Werthänderung, welche $\log(x-a_k)$ erleidet, wenn x von reellen Werthen, die grösser als a_k sind, zu solchen kleiner als a_k durch die positive Halbebene übergeht, so ergibt sich, dass der Werth von v für die Strecke $\overline{a_k a_{k+1}}$ durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\frac{v}{\varepsilon\pi} = -\sum_{h=k+1}^{n} \left\{\rho_h(x-a_h) + \frac{\sigma_h}{2}(x-a_h)^2\right\} \qquad 4)$$

Nach dem früher Gesagten sind hieraus die Bestimmungsstücke des Kreises, welchem der dem Stücke $\overline{a_k a_{k+1}}$ entsprechende Bogen angehört, leicht zu entnehmen.

Da die Strecken $\overline{-\infty a_1}$ und $\overline{a_n x}$ auf einen und denselben Kreis transformirt werden sollen, so muss

$$\sum_{h=1}^{n} \left\{\rho_h(x-a_h) + \frac{\sigma_n}{2}(x-a_h)^2\right\} = 0 \qquad 5)$$

sein. Es ist von vornherein klar, dass diese Bedingung damit übereinstimmen muss, dass die rechte Seite der Differential-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

gleichung 1), beziehungsweise 2) für $x = \infty$ in der vierten Ordnung verschwindet, was ja bekanntlich erfüllt sein muss, wenn $x = \infty$ kein singulärer Punkt sein soll. Man überzeugt sich von dieser Übereinstimmung auch leicht durch directe Rechnung.

3.

Es soll jetzt untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Begrenzungsbögen des Polygons einen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen. Ein solcher müsste, da einer der Kreise nach der getroffenen Wahl der Integrationsconstanten mit der reellen Axe zusammenfällt, seinen Mittelpunkt jedenfalls auf der reellen Axe haben. Ist nun

$$y = \lambda + \mu x + \nu(x^2 + y^2)$$

wie oben die Gleichung eines der Begrenzungsbögen und

$$P(x^2 + y^2) + Qx + R = 0$$

die Gleichung des Orthogonalkreises, so hat man

$$2P\lambda - Q\mu + 2R\nu = 0,$$

oder, was dasselbe ist, es verschwinden sämmtliche Determinanten der Matrix von n Colonnen und 3 Zeilen, welche aus den Coëfficienten λ, μ, ν in den Gleichungen der Begrenzungskreise gebildet ist. Statt dieser Matrix kann man mit Rücksicht auf die durch 4) gegebene Zusammensetzung jener Coëfficienten auch die folgende setzen:

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_k}{2} \\ -\sigma_k a_k + \rho_k \\ \frac{\sigma_k}{2} a_k^2 - \rho_k a_k \end{vmatrix}_{(k=1,2,\ldots n)} \qquad 6)$$

Ausserdem muss die Bedingung 5) erfüllt sein, welche aussagt, dass die Summe der Glieder jeder Zeile von M verschwindet

Um die Matrix M passend umzugestalten, bezeichnen wir mit x, y, z drei willkürliche Grössen und multipliciren M mit der neuen Matrix

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$N = \begin{vmatrix} \frac{1}{x-a_k} \\ \frac{1}{y-a_k} \\ \frac{1}{z-a_k} \end{vmatrix}_{(k=1,2,\ldots n)}$$

Die resultirende dreireihige Determinante lässt sich sehr einfach schreiben, wenn man folgende Bezeichnungen einführt:

$$\sum \frac{\rho_k}{x-a_k} = p(x), \qquad \sum \frac{\sigma_k}{x-a_k} = q(x).$$

Man erhält

$$MN = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}q(x) \\ p(x) - xq(x) \\ -xp(x) + \frac{1}{2}x^2 q(x) + \frac{1}{2}\Sigma\rho_k, \end{vmatrix} \qquad 7)$$

in welcher Determinante die zweite und dritte Colonne aus der ersten durch Ersetzung von x durch y und z hervorgeht. Bedingung 5) des vorigen Paragraphen ist bei der Umformung zu berücksichtigen.

Wegen der Willkürlichkeit von x, y, z ersetzt die eine Gleichung

$$MN = 0$$

alle aufgestellten Bedingungen. Aber offenbar ist das Verschwinden der Determinante 7) gleichbedeutend mit der Existenz dreier von x, y, z unabhängiger Grössen A, B, C, welche die Gleichung

$$A\left(\frac{1}{2}\Sigma\rho_k - xp(x) + \frac{1}{2}x^2 q(x)\right) + B(p(x)) - xq(x)) - \frac{1}{2}Cq(x) = 0$$

für jedes x befriedigen. Bezeichnen wir die ganze Function zweiten Grades

$$\frac{A}{2}x^2 - Bx - \frac{1}{2}C$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

mit $\psi(x)$, so ist somit

$$\frac{1}{2}\Sigma\rho_k.\psi''(x)-p(x)\psi'(x)+q(x)\psi(x)=0.$$

Die Bedingung für die Existenz eines Orthogonalkreises ist also die, dass die Differentialgleichung

$$\psi''-\frac{2p(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\psi'+\frac{2q(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\psi=0 \qquad 8)$$

ein ganzes rationales Integral zweiten Grades besitzt.

4.

Man kann dem im vorigen Paragraphen entwickelten Resultate eine noch zweckmässigere Gestalt ertheilen, wenn man sich einer invariantentheoretischen Schreibweise[1] der Differentialgleichungen, die hier in Betracht kommen, bedient.

Zunächst kann man an Stelle der Differentialgleichung 1), beziehungsweise 2) die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varphi''+\varepsilon p(x).\varphi'-\frac{\varepsilon}{2}q(x).\varphi=0$$

einführen, deren Coëfficienten so bestimmt sind, dass der Quotient zweier Particularintegrale der Gleichung 1) genügt. In dieser Gleichung ist es zweckmässig, dem Integral φ einen bestimmten Grad zuzuschreiben, und zwar den Grad

$$g=1-\frac{\varepsilon}{2}\Sigma\rho_k$$

Führt man nun an Stelle von φ', φ'' entsprechend diesem Grade die Grössen φ_1, φ_2 durch die Gleichungen

$$\varphi'=g\varphi_1=(1-\frac{\varepsilon}{2}\Sigma\rho_k)\varphi_1$$

$$\varphi''=g(g-1)\varphi_2=-\frac{\varepsilon}{2}\Sigma\rho_k.\varphi_2$$

Vergl. F. Klein, Göttinger Nachrichten, 1890, März, oder Math. Ann., XXXVIII, S. 144, sowie meine Note, Math. Ann., XXXVIII, S. 139; letztere bietet die für die Entwickelungen des Textes erforderlichen Schreibweisen und Gradbestimmungen.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ein, so ergibt sich

$$\varphi_2 - 2\frac{p(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\varphi_1 + \frac{q(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\varphi = 0. \qquad 9)$$

Ändert man anderseits in der Gleichung 7) des vorigen Paragraphen die Schreibweise in analoger Weise mit Rücksicht auf den Grad 2 der Function ψ, wobei also zu setzen ist

$$\psi' = 2\psi_1$$
$$\psi'' = 2\psi_2,$$

so erhält man

$$\psi_2 - 2\frac{p(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\psi_1 + \frac{q(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\psi = 0, \qquad 10)$$

also bis auf die Bezeichnung der unbekannten Function Gleichung 9). Demnach kann das Resultat des vorigen Paragraphen so ausgesprochen werden:

Gehört zu der Gleichung

$$\varphi_2 - 2\frac{p}{\Sigma\rho_k}\cdot\varphi_1 + \frac{q}{\Sigma\rho_k}\cdot\varphi = 0$$

unter Voraussetzung eines von der Einheit unendlich wenig verschiedenen Grades von φ eine Abbildung mit Orthogonalkreis, so hat dieselbe Gleichung unter Voraussetzung des Grades 2 von φ ein ganzes rationales Integral; und umgekehrt hat letzterer Umstand den ersteren im Gefolge.

Hiebei ist, wie hier ausdrücklich erwähnt werden mag, stillschweigend vorausgesetzt, dass die Werthe der a_k, ρ_k und σ_k reell sind.

Man kann die Grössen a_k und ρ_k, also überhaupt $p(x)$ als gegeben ansehen und fragen, für welche Gestalt von g der behandelte Fall eintritt. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich q in zwei Theile zu zerlegen, einen bekannten q_0 und einen unbekannten von der Form

$$-\frac{\Omega(x)}{\Pi(x-a_k)},$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wo $\Omega(x)$ ein Polynom $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet.[1] Die Gleichung verwandelt sich dann in

$$\varphi_2 - 2\frac{p}{\Sigma\rho_k}\varphi_1 + \frac{q_0}{\Sigma\rho_k}\varphi = \frac{\Omega}{\Pi(x-a_k)}\cdot\varphi,$$

und es handelt sich um die Ermittelung derjenigen (reellen) Polynome $\omega(x)$, für welche diese Gleichung eine ganze rationale Auflösung zweiten Grades zulässt. Besonders einfach gestaltet sich das Kriterium für den Fall, dass alle Polygonwinkel, also alle ρ_i untereinander gleich sind. Setzt man in diesem Falle

$$A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = f(x),$$

wo A eine beliebige Constante bedeutet, so kann man die Differentialgleichung einfach so schreiben:

$$(f, \varphi)_2 = \omega \cdot \varphi,^2$$

und man erkennt, dass die algebraische Aufgabe, auf welche unser Problem führt, in naher Verwandtschaft mit Untersuchungen von Herrn Hilbert[3] steht; für $n=4$ herrscht sogar völlige Übereinstimmung.

---

[1] Vergl. meine oben citirte Note.

Vergl. meine o. a. Note am Schluss.

[3] Math. Ann., Bd. 28, S. 381 ff.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1891

Band/Volume: 100_2a

Autor(en)/Author(s): Pick Georg

Artikel/Article: Über die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreisbogenpolygon. 1387-1395