Isodynamische und metaharmonische Gebilde

Dr. **Jan de Vries** in Kampen.

1. Wenn die Punkte A und B durch Inversion aus dem Centrum O in die Punkte A' und B' übergeführt werden, so ergibt sich, falls die Inversionspotenz durch m^2 dargestellt wird, die Formel:

$$\overline{A'B'} = m^2 . \overline{AB} \quad \overline{OA} . \overline{OB}. \qquad \ldots 1)$$

Sollen die vorgegebenen Punkte A, B, C durch Inversion in die Ecken eines gleichschenkeligen Dreiecks $A'B'C'$, mit der Spitze in A', übergehen, muss demnach das Centrum O auf der Kugelfläche gewählt werden, für welche:

$$\overline{OB} \quad \overline{OC} = \overline{AB} \quad \overline{AC}. \qquad \ldots 2)$$

Bekanntlich befindet sich ihr Mittelpunkt in dem Schnitte der Geraden BC mit der Geraden, welche den um ABC beschriebenen Kreis im Punkte A berührt.

Verlegt man das Inversionscentrum in einen Punkt des Kreises, in welchem die drei durch obige Betrachtung dem Dreiecke ABC zugeordneten Kugeln sich schneiden, so bilden die Punkte $A'B'C'$ die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Dieser Kreis trifft die Ebene ABC rechtwinkelig in den Schnittpunkten der Kreise des Apollonius; nachdem Herr Neuberg[1] diese Punkte als isodynamische Centra bezeichnet hat, werde ich die oben erwähnten Orte des Inversionscentrums die isodynamischen Kugeln, beziehungsweise den isodynamischen Kreis des Dreiecks ABC nennen.

[1] Mémoire sur le tétraèdre, Bruxelles, 1884 (Mém. cour. par l'Académie de Belgique, tome XXXVII).

Ist D irgend ein Punkt dieses Kreises, so gilt für das isodynamische Tetraeder $ABCD$ die Beziehung:

$$\overline{AB}.\overline{CD} = \overline{BC}.\overline{AD} = \overline{CA}.\overline{BD}. \qquad \ldots 3)$$

Weil aus (1) die Formel:

$$\overline{A'B'}.\overline{C'D'} = m^4.\overline{AB}.\overline{CD} \quad \overline{OA}.\overline{OB}.\overline{OC}.\overline{OD}$$

hervorgeht, liefert die Inversion eines isodynamischen Tetraeders allemal ein Tetraeder derselben Art. Herr Neuberg hat l. c. eine Anzahl merkwürdiger Eigenschaften eines solchen Tetraeders hervorgehoben.

Die sechs dem Tetraeder $ABCD$ angehörenden Kugeln haben zwei isodynamische Centra E und F gemein, deren Verbindungslinie offenbar den Mittelpunkt der um $ABCD$ beschriebenen Kugel enthält (l. c.); durch Inversion aus den Centren E und F übergehen die Punkte A, B, C, D in die Ecken eines regelmässigen Tetraeders. Nachdem dabei die isodynamischen Kreise in die Höhen des neuen Tetraeders verwandelt werden, wird das zweite isodynamische Centrum in den Mittelpunkt dieses Tetraeders übergeführt, indess das als Inversionscentrum benützte in das Unendliche verschwindet.

Die Punkte A, B, C, D, E bilden ein isodynamisches Quintupel, d. h. eine Gruppe, in welcher jeder Punkt isodynamisches Centrum ist für das durch die übrigen vier bestimmte Tetraeder. Es liegt nahe, die Gruppe zu untersuchen, welche sich aus den zweiten isodynamischen Centren dieser fünf Tetraeder zusammensetzt.

2. Werden die Ecken $A_1A_2A_3A_4$ eines regelmässigen Tetraeders aus dem Centrum A_1 mit dem Radius A_1A_2 invertirt, so verwandelt sich das Centrum A_5 des Tetraeders in das Spiegelbild A' des Punktes A_1 in Bezug auf die Ebene $A_2A_3A_4$, indess das im Unendlichen belegene zweite isodynamische Centrum in A_1 gelangt. Besteht demnach ein Punktquadrupel aus den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und einem unendlich weiten Punkt, so sind die Spitzen der beiden durch jenes Dreieck bestimmten regelmässigen Tetraeder die bezüglichen isodynamischen Centra.

Bezeichnet man durch R den Radius der Kugel $A_1A_2A_3A_4$, durch $h = \frac{4}{3} R$ die Höhe des Tetraeders und durch r den Radius der Kugel $A_2A_3A_4A_5$, so ist offenbar für die Sehne $\overline{A_2A_5} = R$ der zweiten Kugel, $R^2 = \frac{1}{4} h \, . \, 2r$, wonach $r = 1 \cdot 5 R$. Durch Inversion in Bezug auf die zweite Kugel übergeht A_1 in einen Punkt B_1, dessen Abstand von deren Centrum O durch $\overline{OA_1} \, . \, \overline{OB_1} = r^2$ bestimmt ist. Aus $\overline{OA_1} = R + r = 2 \cdot 5 R$ ergibt sich nun $OB_1 = 0 \cdot 9 R$, daher $\overline{A_5B_1} = \overline{OA_5} - \overline{OB_1} = 0 \cdot 6 \, R$.

Nachdem nun ein isodynamisches Quintupel allemal in eine Gruppe mit derselben Eigenschaft invertirt wird, ist B_1 das zweite isodynamische Centrum des Quadrupels $A_2A_3A_4A_5$.

Die den fünf Tetraedern $A_hA_iA_jA_k$ entsprechenden fünf Centra B_l bilden die Ecken eines regelmässigen Tetraeders $B_1B_2B_3B_4$ in Verbindung mit einem unendlich weiten Punkte B_5, also wiederum ein isodynamisches Quintupel.

Es ergibt sich weiter $\overline{A_1B_1} = 1 \cdot 6 \, R$, indess die Höhe des Tetraeders $B_1B_2B_3B_4$ oder $\frac{4}{3} \overline{A_5B_1} = 0 \cdot 8 \, R$; daher sind A_1 und B_1 symmetrisch in Bezug auf die Ebene $B_2B_3B_4$, und erscheint A_1 als isodynamisches Centrum der Gruppe $B_2B_3B_4B_5$. Beachtet man, dass A_5 die nämliche Bedeutung hat für das Quadrupel $B_1B_2B_3B_4$, so gilt der Satz:

Jedem isodynamischen Quintupel ist ein zweites Quintupel mit derselben Eigenschaft derart zugeordnet, dass jedes Quintupel die zweiten isodynamischen Centra der fünf aus dem anderen gebildeten Quadrupel enthält.

Zwei isodynamische Zwillingsquintupel bestimmen zehn isodynamische Kreise $A_iA_jB_iB_j$ und zehn isodynamische Kugeln $A_iA_jA_kB_iB_jB_k$. Die bezügliche Configuration von Punkten, Kreisen und Kugeln kann durch das Symbol

$$\{10_4^6, \ 10_4^3, \ 10_6^3\}$$

dargestellt werden.[1]

[1] Diese Bezeichnung entspricht derjenigen, welche ich für Configurationen von Punkten, Geraden und Ebenen vorgeschlagen habe. (Diese Berichte, Bd. C, S. 822.)

Ist, wie oben, A_5 das Centrum des regelmässigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so sind die Punkte B_i den Punkten A_i zugeordnet in einer Inversion mit dem Centrum A_5 und negativer Potenz. Die zehn isodynamischen Kugeln gehören demnach einem Kugelgebüsch[1] mit negativer Potenz an, halbiren daher alle eine feste Kugel. Weil diese Eigenschaft durch Inversion nicht zerstört wird, gilt der Satz

Die zehn isodynamischen Kugeln, welche durch zwei Zwillingsquintupel bestimmt sind, halbiren eine gewisse Kugel, deren Mittelpunkt in gerader Linie liegt mit jedem der fünf Punktpaare, die als isodynamische Centra je zwei Quadrupeln gemeinsam erscheinen.

Durch Inversion der aus einem regelmässigen Tetraeder hergeleiteten Zwillingsquintupel, in Bezug auf einen Schnittpunkt der Kugel $A_2A_3A_4B_2B_3B_4$ mit der Geraden A_1B_1 als Centrum, erhält man die Eckenquintupel zweier regelmässig dreiseitiger Doppelpyramiden, welche in perspectivischer Lage sind in Bezug auf ihr gemeinschaftliches Centrum.

3. Es seien $C_1C_2C_3C_4$ die Ecken eines regelmässigen Tetraeders und $D_1D_2D_3D_4$ die ihnen auf der umbeschriebenen Kugel gegenüberliegenden Punkte. Diese acht Punkte bestimmen offenbar acht isodynamische Tetraeder $C_iC_jC_kD_l$ und $C_iD_jD_kD_l$.

Durch Inversion aus einem beliebigen Punkte der umbeschriebenen Kugel als Centrum übergeht diese in eine Ebene als Trägerin der inversen Punkte γ_i, δ_i; die Geraden $\overline{C_iD_i}$ werden isodynamische Kreise, welche die Ebene allemal in je zwei Punkten γ_i, δ_i treffen, die als isodynamische Centra den Dreiecken $\gamma_j\gamma_k\gamma_l$ und $\delta_j\delta_k\delta_l$ gemeinsam erscheinen. Nachdem diese Kreise das Inversionscentrum und das transformirte Kugelcentrum gemein haben, zielen die vier Geraden $\overline{\gamma_i\delta_i}$ nach einem Punkte.

Weil C_i und D_i die Ecken eines Würfels bilden, sind die sechs Quadrupel $C_iC_jD_kD_l$ und ebenso die sechs Quadrupel

---

[1] Reye, Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme, Teubner, 1879.

$C_i C_j D_i D_j$ concyklisch; die Punkte γ und δ liegen dementsprechend zu vieren in zwölf Kreisen.

Es sei nun in irgend einer Ebene ein isodynamisches Viereck $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ vorgegeben, so dass $\overline{\gamma_i\gamma_j}\cdot\overline{\gamma_k\gamma_l} = \text{const.}$, so erhellt leicht, dass die sechs isodynamischen Kugeln, welche durch γ_i und γ_j allemal normal zur Geraden $\overline{\gamma_k\gamma_l}$ angebracht werden, sich in zwei symmetrisch zur Ebene des Vierecks belegenen Punkten O und O' schneiden. Benützt man einen dieser Punkte als Inversionscentrum, so übergeht das Quadrupel γ in die Ecken C eines regelmässigen Tetraeders.

In Verbindung mit obiger Betrachtung erhält man nun den Satz:

Jedem isodynamischen Vierecke ist in seiner Ebene ein zweites derart zugeordnet, dass die Ecken des einen Vierecks allemal die zweiten isodynamischen Centra der vier Dreiecke des anderen Vierecks sind.

Die vier Paare isodynamischer Centra sind mit einem Punkte allineirt, in Bezug auf welchen sie gleiche negative Potenz haben.

Ausserdem liegen die acht Punkte dieser Zwillingsquadrupel zu vieren auf zwölf Kreisen.

Werden die obigen acht Punkte C und D aus einem beliebigen, nicht auf ihrer Kugel belegenen Centrum invertirt, erhält man zwei derselben Kugel eingeschriebene, einander zugeordnete isodynamische Tetraeder. Die Tetraeder des Raumes lassen sich demnach in Zwillingspaare anordnen, deren jedes als die stereographische Projection zweier ebener Zwillingsquadrupel betrachtet werden kann.

4. Die Ecken eines regelmässigen Dodekaeders bestimmen bekanntlich zehn Tetraeder. Werden diese durch 0, 1, 2. . 9 angedeutet, so kann man die Bezeichnung so wählen, dass jede Ecke durch ein Symbol ik und ihre Gegenecke durch $(9-i)(9-k)$ dargestellt wird. Geht man aus von den Zwillingstetraedern (01, 02, 03, 04) und (89, 79, 69, 59), so ergeben sich die übrigen zwölf Dodekaederecken, wenn man jeden durch drei Punkte des ersten Quadrupels gelegten Kreis zum Schnitte bringt mit den durch das zweite Quadrupel bestimmten Kreisen,

wobei man zwischen den beiden Schnittpunkten je zweier Kreise derart zu wählen hat, dass auf jedem Kreise die drei neuen Punkte als die Ecken eines regelmässigen Dreiecks erscheinen.

Die zwanzig Dodekaederecken liegen zu sechsen in zwanzig Kreisen; die bezügliche Tabelle findet sich, mit der oben erwähnten Bezeichnung, in meiner Arbeit: »Über räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen.« (Diese Berichte, Bd. C, S. 834, Tabelle 13.)

Daselbst enthält Tabelle 12 die Vertheilung dieser zwanzig Punkte zu fünfen über vierundzwanzig Kreise, und Tabelle 14 ihre Anordnung zu je vier auf dreissig weiteren Kreisen, welche den quadratischen Diagonalebenen des Dodekaeders umbeschrieben sind. Schliesslich bilden die zwanzig Ecken mit den dreissig umbeschriebenen Kreisen der rechteckigen Diagonalebenen eine zweite Configuration: $\{20_6, 30_4\}$

Durch Inversion aus einem Punkte der dem Dodekaeder umbeschriebenen Kugel erhält man ein ebenes System von Punkten und Kreisen, das, unabhängig vom räumlichen Systeme, auf nachstehende Weise erzeugt werden kann.

Zunächst werden die Zwillingsquadrupel (01, 02, 03, 04), (89, 79, 69, 59) construirt, wo dann, dem Obigen gemäss, die vier Geraden (01, 89), (02, 79), (03, 69), (04, 59) nach einem Punkte M zielen. Sodann werde einer der Schnittpunkte der Kreise (02, 03, 04) und (69, 79, 89) mit 15 bezeichnet und ihm auf dem ersten Kreise die beiden Punkte 16, 17 derart zugeordnet, dass 01, 89 die isodynamischen Centra des Dreiecks (15, 16, 17) sind;[1] in den Punkten 16, 17 wird dann der Kreis (02, 03, 04), beziehungsweise durch die Kreise (59, 79, 89), (59, 69, 89) geschnitten.

Die Punkte 15, 16, 17 ergänze man nun beziehungsweise durch die Paare (25, 35), (26, 46), (37, 47) zu Tripeln mit den isodynamischen Centra (04, 59), (03, 69), (02, 79); dabei wird etwaige Zweideutigkeit bei der Bezeichnung dieser drei Punkt-

---

[1] Dies erreicht man einfach dadurch, dass man 15 aus 01 auf diesen Kreis projicirt, die Projection zu einem regelmässigen Dreieck ergänzt, und die erhaltenen Punkte ebenfalls aus 01 projicirt.

paare aufgehoben durch den Umstand, dass die drei Geraden (25, 47), (35, 46), (26, 37) nach M convergiren müssen.

Schliesslich werden die fehlenden Punkte 28, 38, 48 aus dem Kreise (59, 69, 79) herausgeschnitten durch die Geraden, welche M beziehungsweise mit 17, 16, 15 verbinden.

Das hiedurch erzeugte Punktsystem ist nun aus fünf Zwillingsquadrupeln derart zusammengesetzt, dass je zwei mit dem Punkte M allineirte Punkte zwei Zwillingsquadrupeln angehören. Man sieht leicht, dass dieses Gebilde in Bezug auf das Centrum M sich selbst invers ist.

Die zwanzig Punkte bestimmen mit drei Gruppen von Kreisen, beziehungsweise Configurationen: $\{20_6, 20_6\}$, $\{20_6, 24_5\}$, $\{20_{12}, 60_4\}$.

5. Es sei $ABCD$ ein harmonisches Kreisviereck, demnach $\overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{AD} \times \overline{BC}$. Bestimmt man auf der Diagonale BD den Punkt E so, dass $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAD$, dann ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken ABE und ACD:

$$AB : AC = BE : CD.$$

Ferner aus $\Delta ABC \backsim \Delta AED$:

$$BC : DE = AC : AD.$$

Daher ist: $BE = DE$.

Bezeichnet man nun den Schnittpunkt des Kreises $ABCD$ mit AE durch F, so erhellt aus der Gleichheit der Winkel DAF und BAC die Gleichheit der Bogen DF und BC. Demnach ist EC symmetrisch mit EF in Bezug auf den Durchmesser, welcher E enthält; folglich $\sphericalangle AEB = \sphericalangle CEB$ und $\overline{AE} . \overline{CE} = \overline{AE} . \overline{EF} = \overline{BE}^2 = \overline{DE}^2$.

Zwei Gegenecken eines harmonischen Kreisvierecks werden ineinander übergeführt durch Inversion in Bezug auf den mit der Verbindungslinie der beiden anderen Ecken als Durchmesser beschriebenen Kreis und nachherige Spiegelung gegen diese Gerade.

Hieraus erhellt eine einfache Construction des vierten Eckpunktes, wenn deren drei gegeben sind.

Andere Eigenschaften des harmonischen Kreisvierecks findet man in Casey's Sequel to Euclid, 4. edition.

Weil jedem Punkte B_1 des Raumes ein Punkt B_2 derart zugeordnet werden kann, dass B_1, B_2 Gegenecken sind in einem harmonischen Kreisvierecke mit festen Gegenecken A_1, A_2, so bestimmt jedes Punktepaar $A_1 A_2$ eine räumliche Involution von Punktepaaren, welcher A_1 und A_2 als Doppelpunkte angehören.

Durch Inversion aus dem Centrum A_2 übergeht diese Involution in die Involution der Punktepaare β_1, β_2, welche symmetrisch sind in Bezug auf den festen Punkt α_1.

6. Soll ein Punktepaar bestimmt werden, welches zwei »harmonischen« Involutionen mit den Doppelpunkten $A_1 A_2$ beziehungsweise $C_1 C_2$ gemeinsam ist, so invertire man aus dem Centrum A_2. Die Aufgabe ist dann zurückgeführt auf die Construction eines Punktepaares $\beta_1 \beta_2$, das zu den bekannten Punkten $\gamma_1 \gamma_2$ harmonisch und zum ebenfalls gegebenen Punkte α_1 symmetrisch liegt.

Dem obigen Satze zufolge hat man demnach die Ebene $\alpha_1 \gamma_1 \gamma_2$ zu legen, den Winkel $\gamma_1 \alpha_1 \gamma_2$ zu hälften und auf der Theilgeraden nach beiden Seiten die mittlere Proportionale zu $\alpha_1 \gamma_1$ und $\alpha_1 \gamma_2$ aufzutragen, wonach die hiedurch ermittelten Punkte $\beta_1 \beta_2$ durch Inversion aus A_2 in die gewünschten Punkte $B_1 B_2$ übergehen.

Die Construction wird offenbar unbestimmt, wenn α_1 auf die Strecke $\overline{\gamma_1 \gamma_2}$ fällt, indem alsdann der gestreckte Winkel $\gamma_1 \alpha_1 \gamma_2$ durch jedes in α_1 auf $\overline{\gamma_1 \gamma_2}$ errichtete Loth halbirt werden kann. Die einfach unendlich vielen Punktepaare $\beta_1 \beta_2$ sind Gegenpunktepaare eines Kreises mit Centrum α_1 und Radius $\sqrt{\overline{\alpha_1 \gamma_1} \cdot \overline{\alpha_1 \gamma_2}}$, dessen Ebene zu $\overline{\gamma_1 \gamma_2}$ normal ist.

7 Liegen im Besonderen $A_1 A_2$ und $C_1 C_2$ harmonisch (allineirt oder cyklisch), wonach α_1 die Mitte der Punkte $\gamma_1 \gamma_2$ wird, so kann man auf dem bezüglichen Kreise (dessen Radius nun gleich $\overline{\alpha_1 \gamma_1}$) zwei Punktepaare $\beta_1 \beta_2$ und $\delta_1 \delta_2$ als Gegeneckenpaare eines Quadrates wählen, wodurch sich ein Gebilde ergibt, in welchem vier Punktepaare sechsfach harmonisch sind. Weil diese acht Punkte sich zu sechsen auf einer Kugel und drei zu ihr und zu einander rechtwinkeligen Ebenen

befinden, erhellt durch Inversion, dass vier orthogonale Kugeln sich zu je drei in vier Punktepaaren durchsetzen, welche die Gegeneckenpaare von sechs harmonischen Vierecken bilden.

Dieses Punktsystem möge als ein metaharmonisches Gebilde bezeichnet werden; es enthält stets vier dreifach harmonische Sextupel, Gebilde, welche durch Inversion aus dem Eckensextupel des regelmässigen Oktaeders hervorgehen. Die beiden Arten von metaharmonischen Systemen mögen als metaharmonisches Sextupel, beziehungsweise Octupel unterschieden werden.

8. Nachdem die Gesammtheit von vier orthogonalen Kugeln jederzeit in das System dreier orthogonaler Ebenen und einer zu ihnen orthogonalen Kugel invertirt werden kann, empfiehlt es sich, die Eigenschaften des metaharmonischen Gebildes A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 an der inversen Figur zu studiren, in der $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$, $\delta_1\delta_2$ Gegenecken eines regelmässigen Oktaeders mit Centrum α_1 sind, indess α_2 ins Unendliche gerückt ist.

Werden die Mittelpunkte der Dreiecke $\beta_1\gamma_1\delta_1$ und $\beta_2\gamma_2\delta_2$ durch μ_1 und μ_2, die Länge der Strecke $\overline{\alpha_1\beta_1}$ durch m dargestellt, so erhält man $\overline{\mu_1\mu_2} = \frac{2}{3} m\sqrt{3} = \frac{1}{3}\overline{\beta_2\gamma_2}.\sqrt{6}$, d. h. $\beta_2\gamma_2\delta_2\mu_1$ ist ein regelmässiges Tetraeder. Man hat daher μ_1 und sein Spiegelbild μ in Bezug auf die Ebene $\beta_2\gamma_2\delta_2$ als die isodynamischen Centra des Quadrupels $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ zu betrachten. Sie sind aber zugleich die isodynamischen Centra des Tetraeders $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$; denn zunächst hat man:

$$\overline{\alpha_1\mu_1}\,.\,\overline{\beta_1\gamma_1} = \left(\frac{1}{3} m\sqrt{3}\right) m\sqrt{2} = m\,.\,\frac{1}{3} m\sqrt{6} = \overline{\alpha_1\beta_1}\,.\,\overline{\gamma_1\mu_1},$$

wonach das Tetraeder $\alpha_1\beta_1\gamma_1\mu_1$ isodynamisch ist; sodann ergibt sich:

$$\overline{\alpha_1\mu}.\overline{\beta_1\gamma_1} = \left(m\sqrt{3}\right) m\sqrt{2} = m\,.\,m\sqrt{6} = \overline{\alpha_1\beta_1}\,.\,\overline{\gamma_1\mu},$$

woraus die nämliche Eigenschaft für das Tetraeder $\alpha_1\beta_1\gamma_1\mu$ erhellt.

Die acht Punktepaare $\mu\mu_1$, welche unsere Figur liefert, sind offenbar die Ecken zweier concentrischer Würfel; sie lassen sich demnach in zwei isodynamische Zwillingsquadrupel anordnen.

Für das allgemeine metaharmonische Gebilde gilt daher:

Vier sechsfach harmonische Punktepaare bestimmen acht Paare isodynamischer Tetraeder, wobei die Tetraeder jedes Paares die isodynamischen Centra gemein haben.

Die acht Paare isodynamischer Centra sind mit einem gewissen Punkte allineirt und bilden zwei isodynamische Zwillingsquadrupel.

Überdies lassen sich diese sechzehn Punkte in zwei metaharmonische Gebilde anordnen.

Letzteres erhellt, wenn man das System $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2\delta_1\delta_2$ aus dem Centrum μ_1 invertirt in Bezug auf die Kugel mit Radius $\overline{\mu_1\beta_1}$. Es gelangt dann α_1 an die Stelle des Punktes μ_2, wodurch $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1$ in die Ecken eines regelmässigen Tetraeders übergehen, indess $\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2$ in die Centra der Seitenflächen invertirt werden. Das neue Punktsystem ist dann mit den beiden aus Punkten $\mu\mu_1$ gebildeten Octupeln gleichartig.

Hieraus ergibt sich noch:

Jedes metaharmonische Octupel kann durch Inversion aus sechzehn verschiedenen Centren in die Ecken und Flächencentra eines regelmässigen Tetraeders umgebildet werden.

9. Es seien ε_1 und ε_2 die Endpunkte jenes Durchmessers der um das regelmässige Oktaeder $\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2\delta_1\delta_2$ beschriebenen Kugel, welcher zu den Ebenen $\beta_1\gamma_1\delta_1$ und $\beta_2\gamma_2\delta_2$ normal ist. Jeder dieser beiden Punkte bildet mit jedem der Tripel $\beta_1\gamma_1\delta_1$ und $\beta_2\gamma_2\delta_2$ ein isodynamisches Quadrupel. Durch Inversion aus einem Punkte der Kugel übergehen sie in die gemeinschaftlichen isodynamischen Centra E_1E_2 der Dreiecke $B_1C_1D_1$ und $B_2C_2D_2$.

Weil die vier den Gegenflächen des Oktaeders entsprechenden Punktepaare ε die Ecken eines Würfels und daher zwei isodynamische Zwillingsquadrupel bilden, so gilt der Satz:

Aus einem ebenen metaharmonischen Sextupel kann man vier Paare von Dreiecken mit gemeinschaftlichen isodynamischen Centren bilden.

Die entsprechenden vier Paare von Centren lassen sich in zwei isodynamische Zwillingsquadrupel anordnen.

Durch Inversion aus einem dieser acht Punkte erhält man ein aus den Ecken von zwei homothetischen, concentrischen, regelmässigen Dreiecken zusammengesetztes metaharmonisches Gebilde.

Eine einfache Rechnung ergibt, dass im letzteren Falle für die beiden Dreiecke das Ähnlichkeitsverhältniss: $(1+\sqrt{3})$ $(1-\sqrt{3})$ gilt.

10. Durch Inversion werde ein metaharmonisches Sextupel umgebildet in die Gegenecken $P_1 Q_1$ und $P_2 Q_2$ eines Quadrates, dessen Mittelpunkt Q_3, und den unendlich fernen Punkt P_3 Wird ein beliebiger Punkt A_0 durch A_1, A_2, A_3 zu Paaren der drei harmonischen Involutionen H_1, H_2, H_3 ergänzt, für welche $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$ die Doppelpunkte sind, so ist Q_3 die Mitte der Strecke $\overline{A_0 A_3}$ und halbiren $Q_3 P_1$, beziehungsweise $Q_3 P_2$ die Winkel $A_0 Q_3 A_1$, $A_0 Q_3 A_2$. Weil ausserdem $\overline{A_0 Q_3} \cdot \overline{A_1 Q_3} = \overline{P_1 Q_3^2} = \overline{P_2 Q_3^2} = \overline{A_0 Q_3} \cdot \overline{A_2 Q_3}$, ergibt sich $\overline{A_1 Q_3} = \overline{A_2 Q_3}$, wonach $A_0 A_1 A_3 A_2$ als ein Parallelogramm mit Mittelpunkt Q_3 erscheint. Zugleich erhellt, dass $A_2 A_3$, $A_1 A_3$, $A_1 A_2$, beziehungsweise Paare der $H_1 H_2 H_3$ sind.

Die beiden Kreise $A_0 A_1 P_1 Q_1$ und $A_0 A_2 P_2 Q_2$ begegnen der Geraden $A_0 A_3$ in einem Punkte B_0, für welchen $\overline{B_0 Q_3} = \overline{A_1 Q_3} = \overline{A_2 Q_3}$. Bezeichnet man die den durch A_1, A_2, A_3 gehenden Kreisen entsprechenden Schnittpunkte durch B_1, B_2, B_3, so bilden die vier Punkte B ein dem Punktsystem A analoges Quadrupel.

Durch Inversion, wobei die Geraden $A_0 A_3$ und $A_1 A_2$ Kreise werden, erhält man nun den Satz:

Jedem metaharmonischen Sextupel ist eine Quadrupelinvolution zugeordnet, wo jedes Quadrupel durch einen seiner Punkte bestimmt ist, indess die sechs Punktepaare, welche sich aus ihm ergeben, zu je zwei den drei harmonischen Involutionen angehören, für welche die drei Paare des Sextupels die Doppelpunkte sind.

Die sechs Kreise, welche die sechs Paare mit den jedesmaligen Doppelpunkten verbinden, schneiden sich zu dreien in vier weiteren Punkten, welche ebenfalls ein Quadrupel der erwähnten Involution bilden.

Die oben erwähnten acht isodynamischen Centra ordnen sich in zwei Quadrupel dieser Involution. Man sieht dies sofort ein, wenn man das metaharmonische Gebilde des regelmässigen Oktaeders betrachtet; jene Centra sind alsdann die Ecken eines Würfels und die Quadrupel entsprechen den Ecken der beiden zugehörigen Tetraeder.

Es seien p_3 das Centrum der zuletzt benützten Inversion und C_1, beziehungsweise C_2 seine Spiegelbilder in Bezug auf P_2Q_2 und P_1Q_1, daher die inversen Punkte c_1 beziehungsweise c_2 die Centra der Kreise $p_2q_2p_3q_3$ und $p_1q_1p_3q_3$. Alsdann werden die Kreise, welche die Punkte p_3 und C_1 mit den Punktepaaren A_0B_1, A_1B_0, A_2B_3, A_3B_2 verbinden, in die Geraden $a_0b_1c_1$, $a_1b_0c_1$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_2c_1$ umgebildet.

Ist in der neuen Figur c_0 der Potenzpunkt der drei orthogonalen Kreise, welche paarweise die Punkte p_iq_i gemein haben, so sind die Sehnen $p_iq_ic_0$ beziehungsweise die Inversionen zweier Kreise $P_1Q_1C_0p_3$, $P_2Q_2C_0p_3$ und der Geraden p_3Q_3. Demnach ist $\overline{p_3Q_3}.\overline{C_0Q_3} = \overline{P_1Q_3}.\overline{Q_1Q_3} = \overline{A_iQ_3}.\overline{B_iQ_3}$ $(i = o, 1, 2, 3)$; C_0 ist also den vier Kreisen $p_3A_iB_i$ gemein: die inversen Geraden $\overline{a_ib_i}$ zielen mithin nach dem Punkte c_0.

Die Mittelpunkte $c_1c_2c_3$ der orthogonalen Kreise und deren Potenzpunkt c_0 nebst den Punkten a_i, b_i bilden somit eine Configuration $(12_4, 16_3)$, mit den allineirten Gruppen:

$a_0b_0c_0$	$a_1b_0c_1$	$a_2b_0c_2$	$a_3b_0c_3$
$a_0b_1c_1$	$a_1b_1c_0$	$a_2b_1c_3$	$a_3b_1c_2$
$a_0b_2c_2$	$a_1b_2c_3$	$a_2b_2c_0$	$a_3b_2c_1$
$a_0b_3c_3$	$a_1b_3c_2$	$a_2b_3c_1$	$a_3b_3c_0$.

Sie ist identisch mit der bekannten H e s s e'schen Configuration, wonach die Quadrupel $a_ib_ic_i$ durch eine zweitheilige kubische Curve verbunden werden, indess jedes

Quadrupel aus den Antitangentialpunkten eines Curvenpunktes besteht.[1]

Die Quadrupel der durch ein ebenes, metaharmonisches Sextupel bestimmten Involution ordnen sich in Paare, wobei die Gruppen eines Paares vierfach perspectivisch erscheinen in Bezug auf die Mittelpunkte und den Potenzpunkt der orthogonalen Kreise.

Ein metaharmonisches Sextupel auf der Kugel gibt offenbar Anlass zu einer analogen Quadrupelinvolution mit gepaarten Gruppen.

Dass ein ausserhalb der Kugelfläche belegener Punkt kein Quadrupel erzeugt, erhellt hieraus, dass für den ausserhalb der Kugel gedachten Punkt A_0 die ihm in den drei Involutionen zugeordneten Punkte $A_1 A_2 A_3$ innerhalb derselben liegen, wonach von diesen kein Paar harmonisch sein kann in Bezug auf ein Paar des Sextupels.

Es möge noch bemerkt werden, dass die Ecken aller isodynamischer Tetraeder, welche die isodynamischen Centra gemein haben, eine räumliche Quadrupelinvolution bilden, welche durch eine Gruppe oder durch die beiden Centra bestimmt ist.

Die Ecken aller Dreiecke mit gemeinschaftlichen isodynamischen Centra ergeben eine räumliche Tripelinvolution.

---

[1] Vergl. meine Arbeit: »Über gewisse ebene Configurationen«, Acta Mathematica, XII.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 101_2a

Autor(en)/Author(s): de Vries Jan

Artikel/Article: Isodynamische und metaharmonische Gebilde. 66-78