Über die Isophoten einer Fläche bei centraler Beleuchtung

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. Jänner 1892.)

Im Folgenden wird die Frage beantwortet: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Tangente der Isophote, welche durch einen Punkt einer central beleuchteten Fläche geht und den Krümmungsverhältnissen der Fläche in diesem Punkte. Es ergibt sich daher die Verallgemeinerung des bekannten Satzes, dass die Tangente der Schattengrenze (der Isophote von der Intensität Null) conjugirt ist zu dem Lichtstrahl dieses Punktes.

1. Nach dem Lambert'schen Gesetze[1] ist die Helligkeit H eines Flächenelements f:

$$H = L.A\rho^{-2}\cos\varepsilon,$$

worin ρ die Entfernung des Elements von dem Beleuchtungscentrum o, und ε der Einfallswinkel des Lichtstrahls l ist, ferner L die Intensität der Lichtquelle und A das Rückstrahlungsvermögen von f.

Setzen wir voraus, dass die Fläche an allen Stellen dasselbe Rückstrahlungsvermögen besitze, so kann $L.A = 1$ angenommen werden, und wir haben dann

$$H = \rho^{-2}\cos\varepsilon.$$

[1] Siehe Ch. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I, S. 399.

Ist $z = f(x, y)$ die Gleichung der Fläche und sind α, β, γ die Coordinaten des Centrums o, so ist $\rho^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2$; wird ferner

$$\chi = p(\alpha - x) - q(\beta - y) + \gamma - z$$
$$\psi = p^2 + q^2 + 1$$

gesetzt, so wird

$$H^2 = \chi^2 . \psi^{-1} . \rho^{-6}.$$

Variirt der Punkt der Fläche auf einer Isophote, so ist H constant, daher $dH = 0$; die letzte Gleichung ergibt demnach für die Tangente T der Isophote:

$$2 \frac{d\chi}{\chi} - \frac{d\psi}{\psi} - 6 \frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

Nun kann man aber den Punkt f der Fläche als Anfangspunkt der Coordinaten, die x- und y-Axe als Hauptkrümmungstangenten desselben nehmen, wodurch x, y, z; $p, q, s = 0$ werden. Dann ist auch $d\psi = 0$ und die letzte Gleichung wird:

$$\frac{r\alpha dx + \beta dy}{\chi} - 3 \frac{\alpha dx + \beta dy}{\rho^2} = 0.$$

Da $\chi = \rho \cos \varepsilon$ und $r = \frac{1}{r_1}$, $t = \frac{1}{r_2}$ ist, wobei r_x die Hauptkrümmungsradien des Flächenpunktes bedeuten, so ist die letzte Gleichung auch:

$$\frac{\alpha dx}{r_1} + \frac{\beta dy}{r_2} - 3 \frac{\cos \varepsilon}{\rho} (\alpha dx + \beta dy) = 0. \tag{1}$$

2. Um die geometrische Bedeutung dieser Gleichung zu finden, setzen wir

$$\frac{dy}{dx} = \tau, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \lambda$$

und erhalten aus Gleichung 1):

$$\tau\lambda = -\frac{r_2}{r_1} \frac{\rho - 3 r_1 \cos \varepsilon}{\rho - 3 r_2 \cos \varepsilon}. \qquad \ldots 1')$$

Daher trennen die Tangente T und die Orthogonalprojection l' des Lichtstrahls l auf die Tangentialebene des Punktes f die beiden Tangenten δ_1, δ_2 harmonisch, deren Richtungsconstanten tg φ der Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -\frac{r_2}{r_1}\frac{\rho - 3r_1 \cos \varepsilon}{\rho - 3r_2 \cos \varepsilon} \qquad \ldots 2)$$

genügen.

Nun gibt die Euler'sche Relation:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -\frac{r_2}{r_1}\frac{r - r_1}{r - r_2},$$

worin r den Krümmungsradius für f derjenigen Normalschnitte der Fläche ist, welche die Tangenten δ_1, δ_2 enthalten. Daher folgt aus Gleichung 1):

$$\rho = 3r \cos \varepsilon.$$

Es ergibt sich demnach die folgende Construction der Isophotentangente:

»Man bestimme die Orthogonalprojection l' des Strahles $l = fo$ auf die Tangentialebene des Punktes f, ferner den Punkt v auf der Normale n von f so, dass seine Orthogonalprojection auf l mit dem Centrum o zusammenfällt und endlich den Punkt u auf der Normale n so, dass $3\overline{mu} = \overline{mv}$. Dann gibt es zwei Normalschnitte der Fläche, welche ihr Krümmungscentrum für f in u haben, und welche die Tangentialebene in zwei Tangenten δ_1, δ_2 schneiden; die Tangente T der Isophote des Punktes m trennt diese Geraden δ_1, δ_2 harmonisch von l'

3. Für $\cos \varepsilon = 0$ oder $\rho = \infty$ gibt die Formel 2) $\operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{r_2}{r_1}$. Wenn demnach das Centrum o auf der Tangentialebene des Punktes f liegt, so ist T zu l in der Dupin'schen Tangenteninvolution conjugirt (Satz über die Tangente der Schattengrenze). Ist das Centrum im Unendlichen, so ist T conjugirte Tangente der Projection l'.

Ist f ein Kreispunkt der Fläche, so ist $r_1 = r_2$; die Formel 1') gibt hier $\lambda\tau = -1$, die Tangente T wird daher senkrecht zu l' sein (Beispiel der Kugel).

Ist $\rho = 3 r_1 \cos \varepsilon$, so folgt aus Formel 2), dass die beiden Tangenten δ_1, δ_2 mit der Hauptkrümmungstangente h_1 zusammenfallen; daher: Wenn das Centrum o beliebig auf einer der beiden Kugeln $S_\varkappa$ liegt, welche die Fläche in f berühren und deren Diameter dreimal so gross ist als einer der Hauptkrümmungsradien $r_\varkappa$ der Fläche, so wird die Isophote im Punkte f die zugehörige Hauptkrümmungstangente $h_\varkappa$ berühren.[1]

Ist in Formel 1′) $\lambda = 0$, $\rho = 3 r_1 \cos \varepsilon$, so wird die Tangente τ unbestimmt, die Isophote erhält einen Doppelpunkt; es ergibt sich: Liegt das Centrum o auf der Kugel $S_\varkappa$ und in der Hauptschnittsebene, die die Tangente $h_\varkappa$ enthält, so hat die Isophote in f einen Rückkehrpunkt und die Tangente $h_\varkappa$ zur Rückkehrtangente.

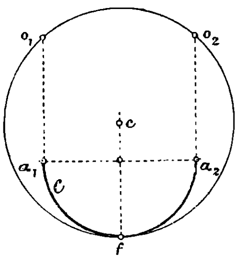

Fig. 1.

Beispiel: Wenn man den hohlen Rotationshalbcylinder mit dem Leitkreis C (siehe die Figur), dessen Erzeugenden senkrecht zur Zeichenebene sind aus einem Punkte der Kugel mit dem Mittelpunkt c und dem Radius $\frac{3}{2} r$ beleuchtet, so schneidet die Isophote des Punktes f die Erzeugende dieses Punktes rechtwinklig; beleuchtet man aus dem Punkte o_1 oder o_2 oder aus einem beliebigen Punkte der Kugel, der in der Zeichenebene liegt, so erhält diese Curve in f eine Spitze, deren Tangente senkrecht zu dieser Erzeugenden ist.

---

1 Es werden daher, wie man auch eine leuchtende Fläche auf einer der Kugeln $S_\varkappa$ bewegen lässt, die Isophoten in f in der constanten Richtung $h_\varkappa$ strömen.

Wären auf $S_\varkappa$ zwei leuchtende Flächen gegeben, die in f dieselbe Intensität erzeugen, so wären die Intensitäten auch dieselben in dem Flächenpunkt f', welcher auf $h_\varkappa$ zu f benachbart ist, da die Isophoten $h_\varkappa$ berühren. Man könnte demnach folgendes Experiment versuchen:

Wäre die eine leuchtende Fläche roth, die andere grün, so würde nicht in f, sondern auch in f' ein weisslicher Punkt entstehen; daher würde in f ein länglicher weisslicher Fleck auftreten, der die Richtung der Haupttangente hätte, und dieser würde seine Richtung beibehalten, wie man auch die leuchtenden Flächen um die Normale des Punktes f rotiren liesse.