Der Fundamentalsatz der Algebra

F. Mertens.

1.

Ist $f(x)$ eine ganze Function mit rationalen reellen oder complexen Coefficienten, welche mit ihrer Ableitung $f'(x)$ keinen Theiler gemein hat, und kennt man einen Werth w_0, für welchen $f(w_0)$ gewisse feste Kleinheitsbedingungen erfüllt, so liefert[1] die Newton'sche Näherungsmethode rationale complexe Werthe w, für welche beide Coordinaten von $f(w)$ von gewünschter Kleinheit sind. Ist man daher im Stande nachzuweisen, dass man sich passende Werthe w_0 durch eine endliche Anzahl von Einsetzungen rationaler complexer Werthe in f verschaffen kann, so ist der Fundamentalsatz der Algebra als bewiesen zu betrachten.

2.

Unter dem Vorzeichenpaar einer complexen Zahl $a+bi$ soll die Zusammenstellung der Vorzeichen ihrer beiden Coordinaten a und b verstanden werden. Eine complexe Zahl, deren Coordinaten von Null verschieden sind, besitzt eines der vier Vorzeichenpaare

$$(++), \quad (-+), \quad (--), \quad (+-).$$

Zwei Vorzeichenpaare wie $(++)$ und $(--)$ oder $(-+)$ und $(+-)$ sollen entgegengesetzt heissen.

[1] Ein Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra von F. Mertens, diese Sitzungsber., Bd. XCVII, Abth. II. a., Dec. 1888.

Wenn zwei complexe Zahlen A, B keine entgegengesetzten Vorzeichenpaare besitzen, so soll gesagt werden, dass von A zu B der Übergang 0, 1 oder —1 stattfinde, je nachdem das Vorzeichenpaar von A mit dem von B zusammenfällt oder demselben in der Reihe

$$(++),\quad (-+),\quad (--),\quad (+-),\quad (++)$$

unmittelbar vorangeht oder nachfolgt. Der Übergang von A zu B soll mit $[A, B]$ bezeichnet werden.

Wenn keine zwei von drei complexen Zahlen A, B, C entgegengesetzte Vorzeichenpaare besitzen, so ist

$$[B, C]+[C, A]+[A, B] = 0. \tag{1}$$

Unter der gemachten Voraussetzung müssen zwei von den Zahlen A, B, C gleiche Vorzeichenpaare besitzen, etwa B und C. Es ist dann

$$[B, C] = 0 \quad [C, A] = -[A, C] = -[A, B]$$

und daher, wie behauptet wurde,

$$[B, C]+[C, A]+[A, B] = 0.$$

Wenn bei einer Reihe von complexen Zahlen

$$A_1, A_2, \ldots A_n$$

keine entgegengesetzten Vorzeichenpaare auftreten, so ist

$$[A_1, A_2]+[A_2, A_3]+ \ldots +[A_{n-1}, A_n] = [A_1, A_n]. \tag{2}$$

Denn man hat nach (1):

$$\begin{aligned}
&[A_1, A_2] + [A_2, A_3] - [A_1, A_3] = 0 \\
&[A_1, A_3] + [A_3, A_4] - [A_1, A_4] = 0 \\
&\ldots \\
&[A_1, A_{n-1}] + [A_{n-1}, A_n] - [A_1, A_n] = 0
\end{aligned}$$

und es ergibt sich durch Addition

$$[A_1, A_2]+[A_2, A_3]+ \ldots +[A_{n-1}, A_n] = [A_1, A_n].$$

3.

Es seien

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \quad + c_n$$

eine gegebene ganze Function von x mit rationalen reellen oder complexen Coefficienten und $b_1, b_2, . \; . b_n$ nicht negative rationale, den Bedingungen

$$Nc_1 \leqq b_1^2 \;\; Nc_2 \leqq b_2^2 . . . Nc_n \leqq b_n^2$$

genügende Zahlen, wo N das Zeichen der Norm ist. Man bestimme die kleinste ganze positive Zahl a, welche die Ungleichungen

$$\frac{b_1(\sqrt{2})^{n-1}}{a} + \frac{b_2(\sqrt{2})^{n-2}}{a^2} + \quad + \frac{b_n}{a^n} < \frac{5}{12} \tag{3}$$

$$\frac{b_1 + \frac{1}{2} n(n-1)(\sqrt{2})^{n-2}}{a} +$$
$$+ \frac{2b_2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) b_1 (\sqrt{2})^{n-3}}{a^2} + \quad + \frac{nb_n}{a^n} < \frac{7n}{24} \tag{4}$$

erfüllt, und verstehe unter einen Bruch $\frac{a}{b}$, in welchem b ganz und nicht kleiner als a und $2n$ ist.

Setzt man alle complexe Zahlen von der Form $(p+iq)\varepsilon$, welche allen ganzzahligen Werthen von p, q von $-b$ bis b entsprechen, in die Function $f(x)$ ein, so erhält man einen Inbegriff I von Resultaten, deren jedes ein bestimmtes feststellbares Vorzeichenpaar besitzt, wenn nicht etwa eine oder beide Coordinaten eines solchen Resultates verschwinden. In diesem Falle soll dem Resultate ein Vorzeichenpaar beigelegt werden, welches bei beliebiger, aber unveränderter, Wahl der den verschwindenden Coordinaten entsprechenden Vorzeichen entsteht. Zwei Resultate $f(p\varepsilon + iq\varepsilon)$ und $f(p'\varepsilon + iq'\varepsilon)$ von I sollen benachbart heissen, wenn ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $p'-p \leqq 1$, $q'-q \leqq 1$ ist.

Es soll nun, und zwar apagogisch, dargethan werden, dass in I benachbarte Resultate mit entgegengesetzten Vorzeichenpaaren vorkommen.

Zieht man eine Gruppe von vier Resultaten in Betracht, welche vier Werthen von der Form

$$p\varepsilon+iq\varepsilon,\quad (p+1)\varepsilon+iq\varepsilon,\quad (p+1)\varepsilon+i(q+1)\varepsilon,\quad p\varepsilon+i(q+1)\varepsilon$$

entsprechen, so hätte man, wenn in I keine benachbarten Resultate mit entgegengesetzten Vorzeichenpaaren vorkämen, nach (2)

$$[f(p\varepsilon+iq\varepsilon),\ f((p+1)\varepsilon+iq\varepsilon)]+[f((p+1)\varepsilon+iq\varepsilon),\ f(p+1)\varepsilon+ \\ +i(q+1)\varepsilon)]+[f((p+1)\varepsilon+i(q+1)\varepsilon),\ f(p\varepsilon+i(q+1)\varepsilon)]+ \\ +[f(p\varepsilon+i(q+1)\varepsilon),\ f(p\varepsilon+iq\varepsilon)]=0.$$

Man denke sich diese Gleichung für jede der $4b^2$ Gruppen von Resultaten aufgestellt, welche allen möglichen Werthezusammenstellungen von obiger Form entsprechen, und alle so erhaltenen Gleichungen zu einander addirt. In der Summe heben sich dann je zwei Zahlen wie $[f(p\varepsilon+iq\varepsilon), f((p+1)\varepsilon+iq\varepsilon)]$ und $[f((p+1)\varepsilon+iq\varepsilon), f(p\varepsilon+iq\varepsilon)]$ gegen einander fort, welche immer paarweise auftreten, wenn nicht $q=\pm b$ ist; ebenso je zwei Zahlen wie $[f(p\varepsilon+iq\varepsilon), f(p\varepsilon+i(q+1)\varepsilon)]$ und $[f(p\varepsilon+i(q+1)\varepsilon), f(p\varepsilon+iq\varepsilon)]$, welche paarweise vorkommen, wenn nicht $p=\pm b$ ist. Es bleiben also nur alle Zahlen von der Form

$$[f(a+iq\varepsilon),\ f(a+i(q+1)\varepsilon)],\quad [f(-a+i(q+1)\varepsilon),\ f(-a+iq\varepsilon)], \\ [f((p+1)\varepsilon+ia),\ f(p\varepsilon+ia)],\quad [f(p\varepsilon-ia),\ f((p+1)\varepsilon-ia)]$$

übrig und man hat

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4=0,$$

wenn

$$S_1=\sum_{q=-b}^{q=b-1}[f(a+iq\varepsilon),\ f(a+i(q+1)\varepsilon)]$$

$$S_2=\sum_{p=-b}^{p=b-1}[f(-p\varepsilon+ia),\ f(-(p+1)\varepsilon+ia)]$$

$$S_3=\sum_{q=-b}^{q=b-1}[f(-a-iq\varepsilon),\ f(-a-i(q+1)\varepsilon)]$$

$$S_4 = \sum_{p=-b}^{p=b-1} [f(p\varepsilon - ia),\ f((p+1)\varepsilon - ia)]$$

gesetzt wird.

Der nachzuweisende Widerspruch besteht nun darin, dass S nicht $= 0$ ist.

Setzt man

$$i^{-nk} f(i^k x) = f_k(x) = x^n + i^{-k} c_1 x^{n-1} + i^{-2k} c_2 x^{n-2} + \ldots + i^{-nk} c_n,$$

so wird

$$f(-p\varepsilon + ia) = i^n f_1(a + ip\varepsilon)$$

$$f(-(p+1)\varepsilon + ia) = i^n f_1(a + i(p+1)\varepsilon)$$

$$[f(-p\varepsilon + ia), f(-(p+1)\varepsilon + ia)] = [f_1(a + ip\varepsilon), f_1(a + i(p+1)\varepsilon)]$$

und demzufolge

$$S_2 = \sum_{p=-b}^{p=b-1} [f_1(a + ip\varepsilon),\ f_1(a + i(p+1)\varepsilon)].$$

Um daher die Summe S_2 zu erhalten, braucht man nur die Summe S_1 für die Function $f_1(x)$ zu berechnen. Ähnliches gilt für die Summen S_3, S_4 und die Functionen f_2 und f_3.

4.

Es lässt sich zunächst zeigen, dass keiner der in der Summe S_1 auftretenden Übergänge $= -1$ sein kann.

Es sei

$$a + iq\varepsilon = z \qquad a + i(q+1)\varepsilon = z'$$

$$f(z) = u + iv \qquad f(z') = u' + iv'.$$

Da $\mathrm{mod}\, z \leqq a\sqrt{2}$, $\mathrm{mod}\, z' \leqq a\sqrt{2}$ und der Ausdruck

$$G = \frac{f(z') - f(z) - (z' - z) f'(z)}{(z' - z)^2}$$

eine ganze Function von $z, z', c_1, c_2, .$ mit positiven Coefficienten ist, welche für $z' = z$ in $\frac{1}{2} f''(z)$ übergeht, so übersteigt der Modul dieses Ausdruckes nicht den Werth, welchen derselbe annimmt, wenn $z, z', c_1, c_2, \ldots$ durch $a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, b_1, b_2, \ldots$ ersetzt werden, und man hat

$$\operatorname{mod} G \leqq \frac{1}{2} n(n-1)(a\sqrt{2})^{n-2} + \\ + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) b_1 (a\sqrt{2})^{n-3} + \ldots + b_{n-2}.$$

Setzt man daher

$$f(z') - f(z) - \frac{n\varepsilon i}{z} f(z) = \\ = -\varepsilon^2 G - \frac{\varepsilon i}{z}(c_1 z^{n-1} + 2c_2 z^{n-2} + \ldots + nc_n) = f(z)(\gamma + \delta i),$$

so wird

$$\operatorname{mod}(\gamma+\delta i) . \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^n} \leqq \varepsilon^2 \operatorname{mod} \frac{G}{z^n} + \\ + \varepsilon \operatorname{mod} \frac{1}{z}\left(\frac{c_1}{z} + \frac{2c_2}{z^2} + \ldots + \frac{nc_n}{z^n}\right)$$

und es ergibt sich, da $\varepsilon \leqq 1$ und $\operatorname{mod} z \geqq a$ ist, nach (4):

$$\begin{aligned} \operatorname{mod}(\gamma+\delta i) \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^n} \leqq \frac{\varepsilon}{a^n}\Big(\frac{1}{2} n(n-1)(a\sqrt{2})^{n-2} + \\ + \frac{1}{2}(n-1)(n-2) b_1 (a\sqrt{2})^{n-3} + \ldots\Big) \qquad (5) \\ + \frac{\varepsilon}{a}\left(\frac{b_1}{a} + \frac{2b_2}{a^2} + \ldots + \frac{nb_n}{a^n}\right) \\ < \frac{7n\varepsilon}{24a}. \end{aligned}$$

Aus der Identität

$$1 = \frac{f(z)}{z^n} - \frac{c_1}{z} - \frac{c_2}{z^2} - \ldots - \frac{c_n}{z^n}$$

folgt ferner nach (3)

$$1 \leqq \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^n} + \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a^2} + \ldots + \frac{b_n}{a^n} < \operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^n} + \frac{5}{12}$$

oder

$$\operatorname{mod} \frac{f(z)}{z^n} > \frac{7}{12}$$

und man erhält aus (5)

$$\operatorname{mod} (\gamma + \delta i) < \frac{\varepsilon n}{2a}. \tag{6}$$

Da nun

$$\frac{f(z')}{f(z)} = \frac{uu' + vv' + i(uv' - vu')}{u^2 + v^2} = 1 + \frac{n\varepsilon i}{z} + \gamma + \delta i$$

$$= 1 + \frac{nq\varepsilon^2}{a^2 + q^2\varepsilon^2} + \gamma + i\left(\frac{na\varepsilon}{a^2 + q^2\varepsilon^2} + \delta\right)$$

und nach (6)

$$1 + \frac{nq\varepsilon^2}{a^2 + q^2\varepsilon^2} + \gamma > 1 + \frac{nq\varepsilon^2}{a^2 + q^2\varepsilon^2} - \frac{n\varepsilon}{2a} > 1 - \frac{n\varepsilon}{a} - \frac{n\varepsilon}{2a} > 0$$

$$\frac{na\varepsilon}{a^2 + q^2\varepsilon^2} + \delta > \frac{na\varepsilon}{a^2 + q^2\varepsilon^2} - \frac{n\varepsilon}{2a} \geqq 0$$

ist, so sind beide Coordinaten von $\frac{f(z')}{f(z)}$ positiv und man hat

$$uu' + vv' > 0 \tag{7}$$

$$uv' - vu' > 0. \tag{8}$$

Dies vorausgeschickt, können die Resultate $u+iv$, $u'+iv'$ nur dann verschiedene Vorzeichenpaare besitzen, wenn $uu' \leqq 0$ oder $vv' \leqq 0$ ist.

Ist $uu' \leqq 0$, so folgt aus (7) $vv' > 0$ und v, v' haben dasselbe Vorzeichen. Sind v, v' positiv, so folgt aus (8), dass die Grössen u, $-u'$ entweder beide positiv oder eine derselben positiv, die andere $= 0$ ist; das Vorzeichenpaar von $u+iv$ kann also nur $(++)$ oder $(-+)$ sein und das von $u+iv'$ ist dann beziehungsweise $(\pm +)$ oder $(++)$. Sind v, v' negativ, so sind die Grössen u, $-u'$ entweder beide negativ oder eine derselben negativ, die andere $=0$ und man hat den Übergang von $(--)$ zu $(\mp -)$ oder den von $(\pm -)$ zu $(--)$. In keinem Falle kann also der Übergang -1 vorkommen.

Dasselbe gilt für die Annahme $vv' \leqq 0$.

S_1 kann also jedenfalls nicht negativ sein. Dasselbe gilt von S_2, S_3, S_4. Denn der Beweis, dass die Summe S_1 keine Übergänge -1 enthält, stützt sich nur auf die Ungleichungen (3), (4), in welchen nur die für alle Functionen f, f_1, f_2, f_3 sich gleichbleibenden Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_n$ vorkommen.

5.

Man kann weiter darthun, dass $S_1 > 0$ ist.

Es sei zu diesem Ende

$$(1+it)^n = \varphi(t) + i\psi(t)$$

$$\varphi(t) = 1 - \frac{n(n-1)}{2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}t^4 - \ldots$$

$$\psi(t) = nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}t^3 + \ldots$$

und es werde angenommen, dass $0 \leqq t \leqq \frac{1}{n}$ ist. Man hat dann

$$\varphi(t) = 1 - \frac{n-1}{2n}n^2t^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)t^4}{4!}\left(1 - \frac{(n-4)(n-5)}{5.6n^2}n^2t^2\right) + \ldots$$

$$\geqq 1 - \frac{n-1}{2n} > \frac{1}{2}$$

$$\psi(t) = nt\left(1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2.3.n^2}n^2t^2\right) +$$

$$+ \frac{n!\,t^5}{5!\,(n-5)!}\left(1 - \frac{(n-5)(n-6)}{6.7}n^2t^2\right) + \ldots$$

$$\geqq nt\left(1 - \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}\right) \geqq \frac{5nt}{6}.$$

Bezeichnet daher $q\varepsilon$ eines der nicht ausserhalb der Grenzen $-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}$ liegenden Vielfachen

$$-m\varepsilon, \; -(m-1)\varepsilon, \ldots -\varepsilon, \; 0, \; \varepsilon, \ldots m\varepsilon$$

von ε und setzt man

$$f(a+iq\varepsilon) = u+iv \qquad \frac{q\varepsilon}{a} = t$$

$$u = a^n \varphi(t)+\alpha \qquad v = a^n \psi(t)+\beta,$$

so wird

$$u+iv = a^n(1+it)^n+c_1(a+iq\varepsilon)^{n-1}+\ldots+c_n$$
$$\alpha+i\beta = c_1(a+iq\varepsilon)^{n-1}+c_2(a+iq\varepsilon)^{n-2}+\ldots c_n$$

und demzufolge

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}(\alpha+\beta i) &\leqq b_1(a\sqrt{2})^{n-1}+b_2(a\sqrt{2})^{n-2}+\ldots+b_n \\ &< \frac{5a^n}{12}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, da $\varphi(t) > \frac{1}{2}$,

$$u > \frac{1}{2}a^n - \frac{5a^n}{12} > 0.$$

Ferner wird für die beiden äussersten Werthe $\frac{m\varepsilon}{a}$ und $-\frac{m\varepsilon}{a}$ von t, da $\frac{m\varepsilon}{a} > \frac{1}{2n}$, also $\psi\left(\frac{m\varepsilon}{a}\right) > \frac{5}{12}$ ist, beziehungsweise

$$v > \frac{5a^n}{12} - \frac{5a^n}{12} = 0$$

$$v < -\frac{5a^n}{12} + \frac{5a^n}{12} = 0.$$

Nach (2) ist demnach die Summe der Übergänge, welche bei den Resultaten

$$f(a-im\varepsilon),\ f(a-i(m-1)\varepsilon), \ldots f(a+im\varepsilon)$$

stattfinden, $=1$ und man hat $S_1 \geqq 1$.

6.

Wenn aber in I zwei benachbarte Resultate $f(w')$, $f(w)$ mit entgegengesetzten Vorzeichenpaaren vorkommen, so hat man

$$Nf(w) \leqq N(f(w')-f(w))$$

und da

$$N(w) \leqq 2a^2 \qquad N(w') \leqq 2a^2 \qquad N(w'-w) \leqq 2\varepsilon^2$$

$$\operatorname{mod} \frac{f(w')-f(w)}{w'-w} = \operatorname{mod}\left(\frac{w'^n - w^n}{w'-w} + c_1 \frac{w'^{n-1} - w^{n-1}}{w'-w} + \qquad\right)$$

$$\leqq n(a\sqrt{2})^{n-1} + b_1(n-1)(a\sqrt{2})^{n-1} + \ldots + b_{n-1}$$

ist, so wird

$$Nf(w) \leqq 2\varepsilon^2 (n(a\sqrt{2})^{n-1} + (n-1)b_1(a\sqrt{2})^{n-2} + \qquad + b_{n-1})^2.$$

Man braucht daher ε nur so zu wählen, dass w ein für die Anwendbarkeit der Newton'schen Näherungsmethode geeigneter Anfangswerth wird.