Über einige arithmetische Determinanten höheren Ranges

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. April 1892.)

Herr Stephen Smith hat bekanntlich im Mai 1876 in seiner im siebenten Bande der »Proceedings of the London Mathematical Society« enthaltenen Mittheilung »On the value of a certain arithmetical determinant« das Product $\varphi(1)\varphi(2)\ldots\varphi(n)$ durch die symmetrische quadratische Determinante n^{ter} Ordnung

$$[i, \varkappa]\,|_{(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, n)}$$

ausgedrückt, wo $[i, \varkappa]$ den grössten gemeinsamen Theiler der zwei ganzen Zahlen i und $\varkappa$ vorstellt. In den folgenden Jahren haben Mansion,[1] Catalan,[2] Cesàro[3] und ich[4] an verschiedenen Orten theils neue Beweise der Smith'schen Relation

[1] »On an arithmetical theorem of Professor Smith.« The Messenger of Mathematics, S. II, v. VII, p. 81—82. — »Sur la théorie des nombres.« Gand 1878. — Annales de la société scientifique de Bruxelles, t. II, p. 211—224.

[2] »Théorème de MM. Smith et Mansion,« Nouvelle correspondance de mathématiques, publiée par E. Catalan et P. Mansion, t. IV, p. 103—111.

[3] »Sur un théorème de M. Mansion.« Mathesis. T. V, p. 248—250. — »Determinanti in aritmetica«, Giornale matematiche pubblicato per cura del prof. G. Battaglini, t. 23, p. 182—297. — »Intorno a taluni determinanti aritmetici«, Atti della reale accademia dei Lincei. Rendiconti, Serie IV, vol. I, p. 709—711. — »Nuovo studio di determinanti aritmetici«. A. e. a. O. S. 711—715. — »Considérations sur le déterminant de Smith et Mansion.« Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Série 3e, t. II, p. 425—435.

[4] »Über den grössten gemeinschaftlichen Divisor.« Diese Sitzungsberichte, 91. Bd., S. 333—343. — »Einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie,« A. e. a. O. 92. Bd., S. 1290—1306.

angegeben, theils zahlreiche andere ihr analoge Formeln aufgestellt oder Sätze über bemerkenswerthe Verallgemeinerungen derselben mitgetheilt. In dem vor wenigen Monaten erschienenen ersten Bande der »Théorie des nombres« von Edouard Lucas finden sich ausser der Smith'schen und der ihr ähnlichen Relation Cesàro's:

$$\left|[\sqrt{[i,\varkappa]}]-[\sqrt{[i,\varkappa]-1}]\right|_{(i,\varkappa=1,2,\ldots,n)} = (-1)^{\sum\limits_{\lambda,\mu=1}^{\lambda=r,\,\mu=\left[\frac{\log n}{\log p_\lambda}\right]}\left[\frac{n}{p_\lambda^\mu}\right]}$$

in welcher $p_1, p_2, \ldots, p_r$ alle n nicht überschreitenden Primzahlen sind, noch die zwei folgenden von J. Hammond herrührenden, vorher nicht veröffentlichten Determinantendarstellungen von $\varphi(n)$, von denen jede aus der anderen unmittelbar abgeleitet werden kann

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= |a_{i,\varkappa}|_{(i,\varkappa=1,2,\ldots,n)}\\ &= |b_{i,\varkappa}|_{(i,\varkappa=1,2,\ldots,n)},\end{aligned}$$

wo $a_{i,\varkappa}$ für $\varkappa<n$ den Werth 0 oder 1 besitzt, je nachdem i durch $\varkappa$ theilbar ist oder nicht, und $a_{i,n}=i$ ist, während $b_{i,\varkappa}=\left[\frac{i}{\varkappa}\right]$ für $\varkappa\leqq n-1$ und $b_{i,n}=\frac{i(i+1)}{2}$ ist.

Jede der angeführten Formeln stellt einerseits einen extremen Fall einer Darstellung des Productes der Werthe, welche eine bestimmte zahlentheoretische Function für $r(1\leqq r\leqq n)$ ganzzahlige Werthe des Argumentes annimmt, durch eine quadratische Determinante n^{ter} Ordnung dar, anderseits bildet sie das Anfangsglied einer Kette von Ausdrücken dieser Producte durch vollkommen conform gebildete Determinanten von beliebigem Range. Dies zu zeigen und zugleich einige weitere allgemeine Relationen derselben Kategorie aufzustellen und auf mehrere besonders interessante specielle Fälle anzuwenden, ist der Zweck der folgenden Zeilen. Zu dem Behufe soll zunächst im ersten Paragraphe eine Beziehung aus der Theorie der Determinanten höheren Ranges in etwas allgemeinerer Form, als für die gegenwärtige Untersuchung nöthig ist, abgeleitet werden.

§. 1. Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n) .$$

deren Elemente aus den beiden Elementensystemen $a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}$, $b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}; j_1, j_2, \ldots, j_{s-1} = 1, 2, \ldots, n;\ i_r; j_s = 1, 2, \ldots, m)$ in der durch die Gleichung

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, \lambda}\, b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda}$$

angegebenen Weise zusammengesetzt sind, ist bekanntlich durch die Relation

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n) = \sum_{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \ldots, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)} = 1}^{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \ldots, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)} = n} \prod_{\mu=1}^{r+s-3} \left(i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)}\right) c_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}} \cdot c_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}} \cdots c_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)}}$$

definirt, in welcher $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\tau)$ diejenige quadratische Determinante bezeichnet, welche entsteht, wenn in der gewöhnlichen Determinante τ^{ter} Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

an Stelle der $\varkappa^{\text{ten}}$ Horizontalreihe die $\alpha_\varkappa^{\text{te}}$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, \tau$ gesetzt wird. Es sei zunächst mindestens eine der beiden Zahlen r und s, zum Beispiel s gerade.

Führt man auf der rechten Seite der letzten Formel die durch die Gleichung 1) angegebenen Werthe der Elemente $c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}}$ ein, so verwandelt sich dieselbe in die folgende:

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} \right| (i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n) = \sum\limits_{\substack{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \ldots, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)}; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 1}}^{\substack{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \ldots, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)} = n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = m}} \underset{1}{\overset{r+s-3}{\left\lceil \mu \right\rceil}} (i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)}).$$

$$\cdot a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r-2)}, \lambda_1} \, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r-2)}, \lambda_2} \ldots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r-2)}, \lambda_n}$$

$$\cdot b_{i_1^{(r-1)}, i_1^{(r)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, \lambda_1} \, b_{i_2^{(r-1)}, i_2^{(r)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \lambda_2} \ldots b_{i_n^{(r-1)}, i_n^{(r)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)}, \lambda_n}.$$

In der entwickelten Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung kommen Glieder, in denen zwei der Grössen $\lambda_\varkappa$ mit verschiedenem Index denselben Werth haben, nicht vor. Es entspricht nämlich jedem Gliede derselben, welches abgesehen vom Zeichen gleich

$$a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-1}, \sigma} \, b_{\varkappa_r, \varkappa_{r+1}, \ldots, \varkappa_{r+s-2}, \sigma} \, a_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r-1}, \sigma} \, b_{\tau_r, \tau_{r+1}, \ldots, \tau_{r+s-2}, \sigma}$$

ist, ein anderes von der Form

$$a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-1}, \sigma} \, b_{\tau_r, \tau_{r+1}, \ldots, \tau_{r+s-2}, \sigma} \, a_{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r-1}, \sigma} \, b_{\varkappa_r, \varkappa_{r+1}, \ldots, \varkappa_{r+s-2}, \sigma} \ldots$$

wo die nicht aufgeschriebenen Factoren in beiden identisch sind, und da diese zwei Glieder durch $s-1$ Vertauschungen von zweien der Indices i aus einander abgeleitet werden können, so sind sie dem absoluten Betrage nach gleich, dem Vorzeichen nach aber verschieden und heben sich demnach auf. Ist $n>m$, so kann ein Glied, in welchem sämmtliche Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von einander verschieden sind, nicht auftreten und daher hat man die Relation

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, \lambda}\, b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1, 2, \ldots, n)} = 0 \qquad (n>m;\ s \text{ gerade}).$$

Ist $n \leqq m$, so bilden die in einem Gliede der Determinante auftretenden Indices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ eine Combination n^{ter} Classe mit Versetzung und ohne Wiederholung der ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, m$, und daher kann man in diesem Falle die letzte Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$\left|c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}}\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1, 2, \ldots, n)} = \sum_{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \ldots, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)}; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n=1}^{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \ldots, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)}=n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n=m} \prod_{\mu=1}^{r+s-3} (i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)}).$$

$$.(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^2\, a_{1, i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \ldots, i_1^{(r-2)}, \lambda_1}\, a_{2, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \lambda_2} \ldots a_{n, i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)}, \lambda_n}$$

$$.b_{i_1^{(r-1)}, i_1^{(r)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, \lambda_1}\, b_{i_2^{(r-1)}, i_2^{(r)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \lambda_2} \ldots b_{i_n^{(r-1)}, i_n^{(r)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)}, \lambda_n}$$

Vollzieht man nun in dieser Gleichung zunächst die Summation in Bezug auf $i_\mu^{(r-1+\varkappa)}$ $(\varkappa = 0,1,2,\ldots s-2;\ \mu = 1,2,\ldots,n)$, so wird für jede aus denselben n ganzen Zahlen $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ gebildete Combination der Grösse $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \sum_{i_1^{(r-1)}, i_1^{(r)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, i_2^{(r-1)}, i_2^{(r)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \ldots, i_n^{(r-1)}, i_n^{(r)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)} = 1}^{i_1^{(r-1)}, i_1^{(r)}, \ldots, i_1^{(r+s-3)}, i_2^{(r-1)}, i_2^{(r)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \ldots, i_n^{(r-1)}, i_n^{(r)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)} = n} \prod_{\mu=r-1}^{r+s-3} (i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_n^{(\mu)})\, b_{i_1^{(r-1)}, i_1^{(r)}, \ldots, i_1^{(r+-1)}, \lambda_1}$$

$$\cdot\, b_{i_2^{(r-1)}, i_2^{(r)}, \ldots, i_2^{(r+s-3)}, \lambda_2} \cdots b_{i_n^{(r-1)}, i_n^{(r)}, \ldots, i_n^{(r+s-3)}, \lambda_n} = \left| b_{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, i_s} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1} = 1, 2, \ldots, n;\ i_s = \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)})}$$

und demnach ergibt die Summation rücksichtlich der übrigen Indices $i_\tau^{(\rho)}$ und der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Relation

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, i_r} \right| \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}, j_s} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, j_1, j_2, \ldots, j_{s-1} = 1, 2, \ldots, n;\ i_r, j_s = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}, \qquad 2)$$

wo die Summation bezüglich $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ über alle Combinationen n^{ter} Classe ohne Versetzung und ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2, \ldots, m$ zu erstrecken ist. Ist $n = m$, so erhält man die von mir früher abgeleitete Gleichung

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} = \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_r} \right| \cdot \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_s} \right|_{(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_r;\, j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n)}, \tag{3}$$

welche das Multiplicationstheorem der Determinanten höheren Ranges ausspricht.

Die Gleichungen 2) und 3) bleiben aber auch bestehen, wenn beide Zahlen r und s ungerade sind. Sondert man nämlich in diesem Falle aus den n^{r+s-2} Elementen $c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}}$ n^{r+s-3} dadurch aus, dass man für einen willkürlich gewählten, nicht an der Stelle der festen Indices des Systems $b_{j_1, j_2, \ldots, j_s}$ befindlichen Index $i_{r+\varkappa}$ irgend eine bestimmte Permutation $i_1^{(r+\varkappa)}, i_2^{(r+\varkappa)}, \ldots, i_n^{(r+\varkappa)}$ der Zahlen 1, 2, .., n setzt, und bildet aus denselben die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-3$

$$\left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+\varkappa-1}, i_{r+\varkappa}, i_{r+\varkappa+1}, \ldots, i_{r+s-2}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+\varkappa-1}, i_{r+\varkappa+1}, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

so ist dieselbe nach 2) gleich der Summe

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} \left| a_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, i_r} \right| \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_\varkappa, j_{\varkappa+1}, j_{\varkappa+2}, \ldots, j_{s-1}, j_s} \right|_{(i_1, i_2, \ldots i_{r-1};\, j_1, j_2, \ldots, j_\varkappa, j_{\varkappa+2}, \ldots, j_{s-1} = 1, 2, \ldots, n;\; i_r, j_s = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}.$$

Addirt man nun alle auf diese Weise entstehenden $n!$ Determinanten, nachdem man jede von ihnen mit dem Vorzeichen $(i_1^{(r+\varkappa)}, i_2^{(r+\varkappa)}, \ldots, i_n^{(r+\varkappa)})$ versehen hat, und berücksichtigt, dass nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Determinanten höheren Ranges

$$\sum_{i_1^{(r+\varkappa)}, i_2^{(r+\varkappa)}, \ldots, i_n^{(r+\varkappa)} = 1}^{i_1^{(r+\varkappa)}, i_2^{(r+\varkappa)}, \ldots, i_n^{(r+\varkappa)} = n} (i_1^{(r+\varkappa)}, i_2^{(r+\varkappa)}, \ldots, i_n^{(r+\varkappa)}) .$$

$$\cdot \left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+\varkappa-1}, i_{r+\varkappa}, i_{r+\varkappa+1}, \ldots, i_{r+s-2}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+\varkappa-1}, i_{r+\varkappa+1}, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \left| c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)}$$

$$\sum_{i_1^{(r+\varkappa)}, i_2^{(r+\varkappa)}, \ldots, i_n^{(r+\varkappa)} = n}^{i_1^{(r+\varkappa)}, i_2^{(r+\varkappa)}, \ldots, i_n^{(r+\varkappa)} = n} (i_1^{(r+\varkappa)}, i_2^{(r+\varkappa)}, \ldots, i_n^{(r+\varkappa)}) .$$

$$\cdot \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_\varkappa, \ldots, j_{r+\varkappa}, j_{\varkappa+2}, \ldots, j_{s-1}, j_s} \right|_{(j_1, j_2, \ldots, j_\varkappa, j_{\varkappa+2}, \ldots, j_{s-1} = 1, 2, \ldots, n;\ j_s = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)} =$$

$$= \left| b_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}, j_s} \right|_{(j_1, j_2, \ldots, j_{s-1} = 1, 2, \ldots, n;\ j_s = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)}$$

ist, so erhält man sofort die Relation 2). Die eben bewiesenen Formeln bilden die Ausdehnung des Cauchy-Binet'schen Determinantensatzes auf Determinanten beliebigen Ranges.

Von den speciellen Fällen der Relation 2) mögen folgende zwei besonders hervorgehoben werden

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, \lambda}\, a_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \quad, n)} =$$

$$\gamma_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r+s-2}} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}, \lambda} \beta_{\mu_r, \mu_{r+1}, \ldots, \mu_{r+s-2}, \lambda}, \qquad 4)$$

wo $\alpha_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r}$, $\beta_{\varkappa_1, \varkappa_2,}$ $\gamma_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r+s-2}}$, beziehungsweise die Adjuncte des Elementes $a_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r}$, $b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s}$, $c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r+s-2}}$ vorstellt.

§. 2. Die in der Gleichung 3) auftretenden Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}$ mögen so beschaffen sein, dass die Determinante

$$|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)} = 1$$

ist, so dass also 3) in

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, \lambda} b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} = |b_{i_1, i_2, \ldots, i_s}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_s = 1, 2, \ldots, n)}$$

übergeht.

Für den vorliegenden Zweck geeignete Elemente $a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}$ der eben genannten Beschaffenheit sind die Grössen

$$a_{i_1.} \qquad = \prod_{\mu=1}^{s_1} \left\{ \left[\frac{u_{i_\mu}}{u_{i_r}}\right] - \left[\frac{u_{i_\mu} - 1}{u_{i_r}}\right] \right\} \prod_{\lambda=s_1+1}^{r+1} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\lambda}}{u_{i_r}}\right]\right), \qquad (\chi(x) = 0 \quad x < 1, \chi(1) = 1),$$

wo die Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend welche verschiedene ganze Zahlen vorstellen und $u_\lambda < u_\varkappa$ $(\lambda < \varkappa)$ ist. Aus der oben angeführten Definitionsgleichung der Determinanten höheren Ranges folgt, dass in diesem

Falle in der Entwicklung von $|a_{i_1, i_2, \dots, i_r}|_{(i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n)}$ sowohl alle Glieder fehlen, in denen $i_\varkappa^{(\mu)} < i_\varkappa^{(r-1)}$ $\mu < r-1$) ist, als auch jene, in welchen $i_\varkappa^{(r-1)} > \varkappa$ ist. Da nun aber jedes der $r-1$ Zahlensysteme $i_\varkappa^{(\nu)}$ ($\varkappa = 1, 2, \dots, n$) eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$ bildet, so könnte, wenn auch nur für einen Werth von $\varkappa$ $i_\varkappa^{(\mu)} > i_\varkappa^{(r-1)}$ oder $i_\varkappa^{(r-1)} < \varkappa$ wäre, für irgend einen anderen die eben als nothwendig erkannte Ungleichung nicht erfüllt sein, und daher tritt nur jenes Glied auf, in welchem $i_\varkappa^{(\nu)} = \varkappa$ ($\nu = 1, 2, \dots, r-1$; $\varkappa = 1, 2, \dots, n$) ist, so dass also

$$\left| \prod_{\mu=1}^{s_1} \left\{ \left[\frac{u_{i_\mu}}{u_{i_r}}\right] - \left[\frac{u_{i_\mu}-1}{u_{i_r}}\right] \right\} \prod_{\lambda=s_1+1}^{r-1} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\lambda}}{u_{i_r}}\right]\right) \right|_{(i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n)} = 1$$

und demnach

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \prod_{\mu=1}^{s_1} \left\{ \left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda}\right] - \left[\frac{u_{i_\mu}-1}{u_\lambda}\right] \right\} \prod_{\nu=s_1+1}^{r-1} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right) b_{i_r, i_{r+1}, \dots, i_{r+s-2}, \lambda} \right|_{(i, i_2, \dots, i_{r+s-2} = 1, 2, \dots, n)} = |b_{i_1, i_2, \dots, i_s}|_{(i_1, i_2, \dots, i_s = 1, 2, \dots, n)} \qquad 5)$$

ist.

Berücksichtigt man, dass die Differenz $\left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda}\right] - \left[\frac{u_{i_\mu}-1}{u_\lambda}\right]$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem u_{i_μ} durch u_λ theilbar ist oder nicht, so erkennt man, dass nur jene Glieder des Elementes $c_{i_1, i_2, \dots, i_{r+s-2}}$ der auf der linken Seite dieser Gleichung stehenden Determinante von 0 verschieden sind, in denen u_λ ein gemeinsamer Theiler der Zahlen $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{s_1}}$ ist und demnach stellt dasselbe die Summe der Werthe vor, welche das Product

$$\prod_{\nu=s_1+1}^{r-1} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right) b_{i_r, i_{r+1}, \dots, i_{r+s-2}, \lambda}$$

annimmt, wenn u_λ alle zu den Zahlen $u_\varkappa$ gehörigen Theiler des grössten gemeinsamen Theilers $[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}]$ der Zahlen $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}$ durchläuft.

Ist speciell

$$\chi(x) = [x],$$

so wird

$$\prod_{\nu=s_1+1}^{r-1} \chi\left[\left(\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right)\right] b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda} = \prod_{\nu=s_1+1}^{r-1} \sum_{y_\nu=1}^{y_\nu=u_{i_\nu}} \varepsilon\left(\frac{u_{i_\nu}}{y_\nu u_\lambda}\right) b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda}$$

$$= \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}}{}' \varepsilon\left(\frac{u_{i_{s_1+1}}}{m_1}\right) \varepsilon\left(\frac{u_{i_{s_1+2}}}{m_2}\right) \cdots \varepsilon\left(\frac{u_{i_{r-1}}}{m_{r-s_1-1}}\right) b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda},$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von $m_\varkappa$ zu nehmen sind, für welche

$$y_{s_1+\varkappa} u_\lambda = m_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, r-s_1-1)$$

ist, und daher, wie man sofort sieht,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \prod_{\mu=1}^{s_1} \left\{\left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda}\right] - \left[\frac{u_{i_\mu}-1}{u_\lambda}\right]\right\} \prod_{\nu=s_1+1}^{r-1} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right) b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda} =$$

$$= \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}} B_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}]), \qquad 6)$$

wo die über alle Werthe von λ, für welche u_λ ein Theiler von $[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}]$ ist, ausgedehnte Summe

$$\sum_\lambda b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda} = B_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}])$$

gesetzt ist. Man kann demnach in diesem Falle die Gleichung 5) in folgender Form schreiben:

$$\left| \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}} B_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}]) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \left| b_{i_1, i_2, \ldots, i_s} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_s = 1, 2, \ldots, n)}. \qquad 7)$$

Es mag bei dieser Gelegenheit nur darauf hingewiesen werden, dass sich aus 6), falls

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}] = m, \quad u_{i_{s_1+\nu}} = m_\nu, \quad b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{s+s-2}, \lambda} = \mu(\lambda)$$

gesetzt wird, für die Anzahl jener die Bedingungen $1 \leqq \alpha_\varkappa \leqq m_\varkappa$ erfüllenden ganzzahligen Werthsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$, welche mit m ein theilerfremdes System von r ganzen Zahlen bilden, der Ausdruck

$$\sum_d \prod_1^{r-1}{}_\nu \left[\frac{m_\nu}{d}\right] \mu(d)$$

ergibt, wo die Summation bezüglich d über alle Theiler von m zu erstrecken ist.

$$b_{i_1, i_2, \ldots, i_s} = 0 \qquad (i_{s-1} < i_s)$$

$$b_{i_1, i_2, \ldots, i_s} = \prod_{\sigma=1}^{s_2} \left\{ \left[\frac{u_{i_\sigma}}{u_{i_s}}\right] - \left[\frac{u_{i_\sigma}-1}{u_{i_s}}\right] \right\} \prod_{\mu=s_2+1}^{s-2} \left[\frac{u_{i_\mu}}{u_{i_s}}\right] g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s})$$

in allen anderen Fällen, so wird, wie man leicht findet,

$$|b_{i_1, i_2, \ldots, i_s}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_s = 1, 2, \ldots, n)} = \prod_{\mu=1}^{n} g(u_\mu, u_\mu)$$

$$B_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}]) =$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}} G(u_{i_{r+s-2}},$$

$$,[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]),$$

wo $G(x, z)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $g(x, y)$ annimmt, wenn y alle zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler der ganzen Zahl z durchläuft. Die Gleichung 7) verwandelt sich daher für dieses specielle Elementensystem $b_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$ in die Formel

$$\Bigg|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}},\, n_1=u_{i_{r+s_2}},\, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])\Bigg|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \prod_{\mu=1}^{n} g(u_\mu, u_\mu), \qquad 8)$$

welche für

$$s_1 = r-1, \quad s_2 = s-2$$

die Gestalt

$$\left|G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1, 2, \ldots, n)} = \prod_{\mu=1}^{n} g(u_\mu, u_\mu)$$

annimmt.

§. 3. Es sollen nun durch zweckmässige Specialisirung der Function $g(x, y)$ einige bemerkenswerthe arithmetische Beziehungen abgeleitet werden.

α) Es sei

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left\{\left[\frac{u_{i_{s-1}}}{u_{i_s}}\right] - \left[\frac{u_{i_{s-1}}-1}{u_{i_s}}\right]\right\} \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s}) \qquad (i_{s-1} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}) \qquad 9)$$

$$g(u_n, u_{i_s}) = \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s})$$

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \eta(u_{i_s}) \qquad (i_{s-1} = i_s,\ i_{s-1} \gtrless \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n)$$
$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = 0 \qquad (i_{s-1} > i_s;\ i_{s-1} \gtrless \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n),$$

wo $\eta(x)$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem x eine bestimmte Eigenschaft besitzt oder nicht. Alsdann wird:

$$\left.\begin{aligned}
&G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) = \\
&\quad = \left\{\left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2})}{u_{i_{s+r-2}}}\right] - \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}] - 1}{u_{i_{s+r-2}}}\right]\right\} \eta(u_{i_{r+s-2}}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i_{r+s-2} \gtrless \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\tau, n) \\
&G(u_n, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) = \\
&\qquad = F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \\
&G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) = \\
&\quad = F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i_{r+s-2} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}),
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wo $F_{u,\eta}(x)$ die Summe der Werthe bezeichnet, welche die Function $f(y)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler der ganzen Zahl x durchläuft, welche die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, und demnach hat man den Satz:

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| H_0(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend welche unter einander verschiedene ganze Zahlen ($u_\lambda < u_\varkappa$; $\lambda < \varkappa$) bezeichnen und die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index den Werth 0 besitzen, wenn $u_{i_{r+s-2}}$ die durch die Function $\eta(x)$ charakterisirte Eigenschaft nicht besitzt, sonst aber durch die Summe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2} = 1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\left\{ \left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]}{u_{i_{r+s-2}}} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}] - 1}{u_{i_{r+s-2}}} \right] \right\} \qquad 11)$$

gegeben sind, während die übrigen die Werthe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2} = 1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_s}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \quad (i_{s+s-2} = n) \qquad 12)$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2-1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])$$

$$(i_{r+s-2} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}) \qquad 13)$$

besitzen, wo $F_{u,\eta}(x)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $f(y)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler der ganzen Zahl x durchläuft, welche zu den Zahlen u_λ gehören und die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, ist gleich $f(u_{\varkappa_1}), f(u_{\varkappa_2}), \ldots, f(u_{\varkappa_{\tau-1}}), f(u_n)$ oder 0, je nachdem sämmtlichen Zahlen u_λ die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft zukommt oder nicht.

Ist speciell

$$s_1 = r-1, \quad s_2 = s-2,$$

so werden die Ausdrücke 11), 12), 13) der Reihe nach

$$\left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-3}}]}{u_{i_{r+s-2}}}\right] - \left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-3}}]-1}{u_{i_{r+s-2}}}\right]; \; F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-3}}]); \; F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]).$$

Ist $\eta(z) = 1$ für jeden ganzzahligen Werth von z, $u_\lambda = \lambda$, $\tau = 1$, $r = s = 2$, $f(x) = \varphi(x)$, so liefert das letzte Theorem für $s_1 = 1$, $s_2 = 0$ die erste Hammond'sche Relation, während sich für $s_1 = s_2 = 0$ aus ihr die zweite ergibt.

β) Wird die Relation 9) durch die folgende ersetzt

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left[\frac{u_{i_{s-1}}}{u_{i_s}}\right] \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s}) \qquad (i_{s-1} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}),$$

während alle anderen in α) für $g(x, y)$ angegebenen Beziehungen bestehen bleiben, so tritt an die Stelle der dritten Gleichung des Systems 10) die Formel

$$G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) =$$

$$= \sum_{n_{s-s_2-1}=1}^{n_{s-s_2-1}=u_{i_{r+s-2}}} F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}])$$

$$(i_{r+s-2} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1})$$

und daher erhält man den neuen Satz:

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| H_1(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend welche unter einander verschiedene ganze Zahlen sind ($u_\lambda < u_\varkappa$; $\lambda < \varkappa$) und die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index den Werth 0 besitzen, wenn $u_{i_{r+s-2}}$ die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft nicht besitzt, sonst aber durch die Summe

$$m_1 = u_{i_{s_1+1}},\ m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\ n_1 = u_{i_{r+s_2}},\ n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}$$

$$\sum_{m_2, \ldots, m_{r-s_1-1},\, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2} = 1}$$

$$\left\{\left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]}{u_{i_{r+s-2}}}\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}] - 1}{u_{i_{r+s-2}}}\right]\right.$$

definirt sind, während die übrigen die Werthe

$$m_1 = u_{i_{s_1+1}},\ m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\ n_1 = u_{i_{r+s_2}},\ n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r+s_1-1},\, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2} = 1}$$

$$F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \qquad (i_{r+s-2} = n)$$

$$m_1 = u_{i_{s_1+1}},\ m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r+1}},\ n_1 = u_{i_{r+s_2}},\ n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-1} = u_{i_{r+s-2}}$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1},\, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1} = 1}$$

$$F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}]) \quad (i_{r+s-2} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1})$$

haben, wo $F_{u,\eta}(x)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $f(y)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler der ganzen Zahl x durchläuft, welche zu den Zahlen u_λ gehören und die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, ist gleich $f(u_{\varkappa_1}) f(u_{\varkappa_2}) \ldots f(u_{\varkappa_{\tau-1}}) f(u_n)$ oder Null, je nachdem sämmtlichen Zahlen u_λ die eben erwähnte Eigenschaft zukommt oder nicht.

Auch in diesem Satze ist die zweite Hammond'sche Relation als specieller Fall enthalten.

γ) Bestehen für die Function $g(x, y)$ die Relationen

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left\{\left[\frac{u_{i_{s-1}}}{u_{i_s}}\right] - \left[\frac{u_{i_{s-1}}-1}{u_{i_s}}\right]\right\} \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s}) \qquad (i_{s-1} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n)$$

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left\{\left[\frac{u_{i_{s-1}}}{u_{i_s}}\right] - \left[\frac{u_{i_{s-1}}-1}{u_{i_s}}\right]\right\} \eta(u_{i_s})$$

in allen anderen Fällen, so wird

$$G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) =$$
$$= \eta_0^{(u)}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}])$$
$$(i_{r+s-2} \gtrless \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n)$$

$$G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) =$$
$$= F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])$$
$$(i_{r+s-2} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n),$$

wo $\eta_{\sigma}^{(u)}(x)$ die Summe der σ^{ten} Potenzen derjenigen Theiler von x vorstellt, welche zu den Zahlen u_λ gehören und die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen. Man hat daher das Theorem:

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| H_2(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend welche unter einander verschiedene ganze Zahlen ($u_\lambda < u_\varkappa$; $\lambda < \varkappa$) vorstellen und die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index durch die Summe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\eta_0^{(u)}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])$$

gegeben sind, wo $\eta_0^{(u)}(x)$ die Anzahl derjenigen Theiler von x vorstellt, welche zu den Zahlen u_λ gehören und die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, während die übrigen die Werthe

$$\sum_{\ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])$$

haben, wo $F_{u,\eta}(x)$ die Summe derjenigen Werthe bezeichnet, welche die Function $f(y)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler von x durchläuft, denen die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft zukommt, ist gleich $f(u_{\varkappa_1})f(u_{\varkappa_2}) \ldots f(u_{\varkappa_{\tau-1}})f(u_n)$ oder 0, je nachdem die eben angezogene Eigenschaft allen Zahlen u_λ zukommt oder nicht.

Hat $\eta(z)$ für jeden ganzzahligen Werth von z den Werth 1 und ist

$$r = s = 2,\ u_\lambda = \lambda,\ \varkappa_\mu = \mu,\ \tau = n,\ s_1 = 1,\ s_2 = 0,$$

so liefert das eben abgeleitete Theorem für $f(x) = \varphi(x)$ die Smith'sche Formel, während sich für $f(x) = \lambda(x)$ aus ihm die oben angeführte Cesàro'sche Gleichung ergibt.

δ) Setzt man endlich

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left[\frac{u_{i_{s-1}}}{u_{i_s}}\right] \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s}) \qquad (i_{s-1} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n)$$

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left[\frac{u_{i_{s-1}}}{u_{i_s}}\right] \eta(u_{i_s})$$

in allen anderen Fällen, so wird

$$G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) =$$

$$= \sum_{n_{s-s_2-1}=1}^{n_{s-s_2-1}=u_{i_{r+s-2}}} F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}])$$

$$(i_{r+s-2} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n)$$

$$G(u_{i_{r+s-2}}, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) =$$

$$= \sum_{n_{s-s_2-1}=1}^{n_{s-s_2-1}=u_{i_{r+s-2}}} \eta_0^{(u)}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}])$$

$$(i_{r+s-2} \gtreqless \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n)$$

und daher hat man das weitere Theorem:

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| H_3(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend welche unter einander verschiedene ganze Zahlen $(u_\lambda < u_{\varkappa_1}; \varkappa < \lambda)$ bezeichnen und die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index durch die Summe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}=1}^{m=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-1}=u_{i_{r+s-2}}}$$

$$\eta_0^{(u)}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}])$$

definirt sind, während die übrigen die Werthe

$$m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-1} = u_{i_{r+s_2-2}}$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1} = 1} F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_1-1}])$$

haben, wo $\eta_0^{(u)}(x)$ die Anzahl derjenigen zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler von x vorstellt, welche die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, und $F_{u,\eta}(x)$ die Summe der Werthe ist, welche die Function $f(y)$ annimmt, wenn ihr Argument die eben genannten Theiler durchläuft, ist gleich $f(u_{\varkappa_1}) f(u_{\varkappa_2}) \ldots f(u_{\varkappa_\tau - 1}) f(u_n)$ oder 0, je nachdem die eben erwähnte Eigenschaft allen Zahlen u_λ zukommt oder nicht.

Die in diesem Paragraphe aufgestellten vier Theoreme führen sofort zu folgenden Gleichungen

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \prod_{\mu=1}^{s} \left\{ \left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda} \right] - \left[\frac{u_{i_\mu} - 1}{u_\lambda} \right] \right\} \prod_{\nu=s_1+1}^{r-1} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda} \right] \right) H(u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}, u_\lambda) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= f(u_{\varkappa_1}) f(u_{\varkappa_2}) \ldots f(u_{\varkappa_\tau - 1}) f(u_n) \prod_{\rho=1}^{n} \eta(u_\rho)$$

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\prod_{\mu}^{s}\left\{\left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda}\right]-\left[\frac{u_{i_\mu}-1}{u_\lambda}\right]\right\}\prod_{\nu}^{r-1}\chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right)H_1(u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}, u_\lambda)\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= f(u_{x_1})f(u_{x_2})\ldots f(u_{x_\tau-1})f(u_n)\prod_{\rho}^{n}\eta(u_\rho)$$

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\prod_{\mu}^{s}\left\{\left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda}\right]-\left[\frac{u_{i_\mu}-1}{u_\lambda}\right]\right\}\prod_{\nu}^{r-1}\chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right)H_2(u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}, u_\lambda)\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= f(u_{x_1})f(u_{x_2})\ldots f(u_{x_\tau-1})f(u_n)\prod_{\rho}^{n}\eta(u_\rho)$$

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\prod_{\mu}^{s}\left\{\left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda}\right]-\left[\frac{u_{i_\mu}-1}{u_\lambda}\right]\right\}\prod_{\nu}^{r-1}\chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right)H_3(u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}, u_\lambda)\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= f(u_{x_1})f(u_{x_2})\ldots f(u_{x_\tau-1})f(u_n)\prod_{\rho}^{n}\eta(u_\rho).$$

Nach der Definition der Function $F_{u,\eta}(x)$ besteht offenbar die Relation

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{f(u_\lambda)\eta(u_\lambda)}{u_\lambda^\sigma}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m^\sigma}=\sum_{x=1}^{\lambda=\infty}\frac{F_{u,\eta}(x)}{x^\sigma},$$

aus welcher sofort die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{f(u_\lambda)\,\eta(u_\lambda)}{u_\lambda^\sigma} = \sum_{x,y=1}^{x,y=\infty} \frac{F_{u,\eta}(x)\,\mu(y)}{(xy)^\sigma}$$

folgt, die zeigt, dass die über alle Theiler d der ganzen Zahl n ausgedehnte Summe

$$\sum_d F_{u,\eta}(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

den Werth $f(u_\lambda)\,\eta(u_\lambda)$ oder 0 hat, je nachdem n eine Zahl u_λ ist, oder nicht. Die rechten Seiten der aufgestellten Gleichungen können daher auch in folgender Weise geschrieben werden

$$\prod_\lambda \sum_d F_{u,\eta}(d)\,\mu\left(\frac{u_\lambda}{d}\right) \prod_\mu \eta(u_\mu)$$

$$(\lambda = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n;\ \mu = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-\tau})$$

wo $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-\tau}, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ ist.

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System von ganzen Zahlen, d. h. ein Zahlensystem, das alle Theiler jedes seiner Elemente enthält, so stellt die Function $\eta_0^{(n)}(x)$ die Anzahl aller Theiler von x vor, welche die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, und $F_{u,\eta}(x)$ die Summe der Werthe, welche die Function $f(y)$ annimmt, wenn ihr Argument die eben genannten Theiler durchläuft.

Ist die Function $f(x)$ so beschaffen, dass für jedes eventuell gewisse Bedingungen befriedigende Werthepaar x, y die Gleichung

$$f(x)f(y) = f(xy)$$

besteht, so liefert jede der abgeleiteten Formeln, falls $\eta(z)$ für alle in Betracht kommenden Werthe des Argumentes gleich 1 genommen wird und die Zahlen $u_{\varkappa_1}, u_{\varkappa_2}, \ldots u_{\varkappa_{\tau-1}}, u_n$ so gewählt werden, dass sie den etwa für x und y aufgestellten Bedingungen genügen, eine Darstellung von $f(u_{\varkappa_1} u_{\varkappa_2} \ldots, u_{\varkappa_{\tau-1}} u_n)$ durch eine Determinante vom Range $s+r-2$, deren Ordnung (n) im Allgemeinen wesentlich kleiner ist, als das Argument der dargestellten Function. Der eben erwähnten Gleichung genügen beispielsweise für jedes beliebige ganzzahlige Werthepaar x, y die Functionen $x^{\varkappa}$, $x^{\varkappa}\lambda(x)$, für jedes theilerfremde Paar aber $\mu(x)$, $\mu_r(x)$, $\varphi(x)$. Nimmt man namentlich

$$u_1 = 1,\ u_2 = p_1,\ u_3 = p_1^2,\ \ldots,\ u_{\alpha_1+1} = p_1^{\alpha_1},\ u_{\alpha_1+2} = p_2,\ u_{\alpha_1+3} = \\ = p_2^2, \ldots,\ u_{\alpha_1+\alpha_2+1} = p_2^{\alpha_2}, \ldots,\ u_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r+1} = p_r^{\alpha_r}, \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r+1 = n,$$

so dass also die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System bilden, und setzt

$$\tau = r,\ \varkappa_1 = \alpha_1+1,\ \varkappa_2 = \alpha_1+\alpha_2+1, \ldots,\ \varkappa_{r-1} = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{r-1}+1,$$

so ergeben sich aus den bewiesenen Theoremen und Formeln für jede der eben angeführten und alle ihnen analogen Functionen mit dem Argumente $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ Darstellungen durch Determinanten $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Ranges von der Ordnung $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r+1$.

Ich will am Schlusse dieses Paragraphes die sich darbietende Gelegenheit benützen, um zu zeigen, wie sich mit Hilfe der eben erwähnten Eigenschaft der zahlentheoretischen Function $\varphi(x)$ ein möglichst elementarer Beweis eines bekannten Paoli'schen Satzes aus der Theorie der additiven Zusammensetzung (Zerlegung) der ganzen Zahlen liefern lässt, der dann zu einer einfachen Begründung eines demselben Gebiete angehörigen De Morgan-Sylvester'schen Theorems und eines Ausdruckes für den asymptotischen Werth der Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in vorgeschriebene Elemente führt.

Sind β_1, β_2 zwei theilerfremde ganze Zahlen, t_1 und t_2 Theiler von β_1, beziehungsweise β_2, so haben unter den ganzen Zahlen

$$\beta = \delta_1\beta_1 + \delta_2\beta_2 \qquad (0 \leqq \delta_1 < \beta_2,\ 0 \leqq \delta_2 < \beta_1)$$

offenbar nur diejenigen mit dem Producte $\beta_1\beta_2$ den grössten gemeinsamen Theiler $t_1 t_2$, in denen $\frac{\delta_1}{t_2}$ zu $\frac{\beta_2}{t_2}$ und $\frac{\delta_2}{t_1}$ zu $\frac{\beta_1}{t_1}$ theilerfremde ganze Zahlen sind, ihre Anzahl ist daher

$$\varphi\left(\frac{\beta_1}{t_1}\right)\varphi\left(\frac{\beta_2}{t_2}\right) = \varphi\left(\frac{\beta_1\beta_2}{t_1 t_2}\right),$$

d. i. gleich der Anzahl derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1\ldots\beta_1\beta_2$, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Es sind demnach die Zahlen β die um $\beta_1\beta_2$ vermehrten, in die Elemente β_1, β_2 nicht zerlegbaren und die durch dieselben additiv erzeugbaren Zahlen des Intervalles $0\ldots\beta_1\beta_2-1$. Da man also jede ganze Zahl $n \geqq \beta_1\beta_2$ auf die Form

$$n = \nu\beta_1\beta_2+\beta$$

bringen kann, so erkennt man, dass die ganzzahligen Coëfficienten γ_1, γ_2 der Darstellungsformel

$$n = \gamma_1\beta_1+\gamma_2\beta_2 \qquad (0 \leqq \gamma_1, \gamma_2)$$

nur die durch die Gleichungen

$$\gamma_1 = \left(\frac{n-\beta}{\beta_1\beta_2}-\mu\right)\beta_2+\delta_1$$

$$\gamma_2 = \beta_1\mu+\delta_2 \qquad \left(\mu = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-\beta}{\beta_1\beta_2}\right)$$

angegebenen Werthe annehmen können und demnach ist die Anzahl der Zerlegungen von n in die zwei theilerfremden Elemente β_1, β_2 gleich $\frac{n-\beta}{\beta_1\beta_2}$, d. i. $\left[\frac{n}{\beta_1\beta_2}\right]+1$ oder $\left[\frac{n}{\beta_1\beta_2}\right]$, je nachdem $\beta<\beta_1\beta_2$ ist oder nicht. Es lässt sich daher, wie Paoli und Cesàro gezeigt haben, jede ganze Zahl n auf $\left[\frac{n}{\beta_1\beta_2}\right]+\eta$ verschiedene Arten aus den zwei theilerfremden Elementen β_1 und β_2 additiv zusammensetzen, wo η den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem der bei der Division von n durch $\beta_1\beta_2$ verbleibende Rest in diese Elemente zerlegt werden kann oder nicht. Speciell folgt aus diesen Entwicklungen, was übrigens unmittelbar einleuchtet, dass jede Zahl n auf $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ Arten in die Elemente 1 und 2 zerlegt werden kann.

Mit Hilfe der eben ermittelten Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in zwei theilerfremde Elemente, deren Auftreten nicht beschränkt ist, lässt sich leicht die Anzahl der analogen Zerlegungen derselben in $\varkappa$ Elemente $\beta_1, \beta_2, \ldots\beta_\varkappa$, welche ein theilerfremdes System von $\varkappa$ Zahlen bilden, ausdrücken. Ist nämlich $\overline{n}_\varkappa$ die gesuchte Anzahl, so besteht bekanntlich die Beziehung

$$\overline{n}_\varkappa = \overline{n}_{\varkappa-1} + \overline{(n-\beta_\varkappa)}_\varkappa,$$

aus der sich sofort die allgemeine Relation

$$\overline{n}_\varkappa = \overline{n}_{\varkappa-1} + \overline{(n-\beta_\varkappa)}_{\varkappa-1} + \overline{(n-2\beta_\varkappa)}_{\varkappa-1} + \ldots + \overline{\left(n-\beta_\varkappa\left[\frac{n}{\beta_\varkappa}\right]\right)}_{\varkappa-1} \qquad 14)$$

$$((0)_\lambda = 1)$$

ergibt, welche die eben gemachte Behauptung beweist.

Setzt man in dieser Formel speciell

$$\varkappa = 3,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2,\ \beta_3 = 3,$$

so erhält man unter Benützung des oben angegebenen Werthes von n_2 die Relation

$$n_3 = \left[\frac{n}{3}\right] + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n}{3}\right]} \left[\frac{n-3\lambda}{2}\right],$$

in welcher n_s die Anzahl der Zerlegungen von n in die ersten s natürlichen Zahlen bezeichnet. Da die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe alle ganzen Zahlen von 1 bis $\left[\frac{n}{2}\right]$ enthält mit Ausnahme derjenigen von der Form $3t+\frac{\varkappa(7-3\varkappa)}{2}-1$, wenn n durch 3 dividirt den Rest $\varkappa$ lässt, so wird

$$(6s)_3 = 3s^2+3s+1$$

$$(6s+\mu)_3 = 3s^2+(3+\mu)s+\mu \qquad (\mu > 0).$$

Nun ist aber

$$\frac{(6s+3+\mu)^2}{12} = 3s^2+(3+\mu)s+\mu+\varepsilon_\mu$$

$$\left(\varepsilon_0 = \frac{3}{4};\ \varepsilon_1 = \varepsilon_5 = \frac{1}{3};\ \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \frac{1}{12};\ \varepsilon_3 = 0\right)$$

und demnach ist n_3 gleich der an $\frac{(n+3)^2}{12}$ zunächst liegenden ganzen Zahl, wie die Herren De Morgan und Sylvester erkannt haben. Für $\overline{n}_3$ ergibt sich hieraus auf Grund eines bekannten Euler'schen Satzes die an $\frac{n^2}{12}$ zunächst liegende ganze Zahl.

Ist

$$\overline{n}_{\varkappa-1} = \frac{n^{\varkappa-2}}{(\varkappa-2)!\,\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{\varkappa-1}} + A_{\varkappa-1}, \qquad 15)$$

wo

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_{\varkappa-1}}{n^{\varkappa-2}} = 0$$

ist, so hat man nach 14) die Relation

$$\overline{n}_\varkappa = \frac{1}{(\varkappa-2)!\,\beta_1\beta_2 \ldots \beta_{\varkappa-1}} \Big\{ n^{\varkappa-2} + (n-\beta_\varkappa)^{\varkappa-2} + (n-2\beta_\varkappa)^{\varkappa-2} + \\ + \ldots + \left(n - \beta_\varkappa \left[\frac{n}{\beta_\varkappa}\right]\right)^{\varkappa-2} \Big\} + A_\varkappa,$$

welche sich mit Hilfe der bekannten Formel

$$\frac{1}{2}\, a^\mu + (a+h)^\mu + (a+2h)^\mu + \ldots + (a+(m-2)h)^\mu + \\ + \frac{1}{2}(a+(m-1)h)^\mu = \frac{(a+(m-1)h)^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{(\mu+1)h} + \\ + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{\mu}{2\lambda-1} \frac{B_\lambda h^{2\lambda-1}}{2\lambda} \,. \\ . \left\{(a+(m-1)h)^{\mu-2\lambda+1} - a^{\mu-2\lambda+1}\right\} + R_m,$$

in der für ganzzahlige positive μ der Rest R_m verschwindet, während für beliebige reelle jedenfalls

$$|R_m| < \frac{h^{2m-1}}{2m} \binom{\mu}{2m-1} B_m \left\{(a+(m-1)h)^{\mu-2m+1} - a^{\mu-2m+1}\right\}$$

ist, in die folgende verwandelt

$$\overline{n}_\varkappa = \frac{n^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!\,\beta_1\beta_2 \ldots \beta_\varkappa} + A'_\varkappa.$$

Da nun

$$\bar{n}_2 = \frac{n}{\beta_1 \beta_2} + \varepsilon \qquad (|\varepsilon| \leqq 1)$$

ist, so gilt die Gleichung 15) für alle zulässigen Werthe von $\varkappa$.

§. 4. Es soll nun eine Reihe von besonders interessanten speciellen Fällen der im vorigen Paragraphe aufgestellten Sätze und Relationen angegeben werden. Dieselben lauten:

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System, so hat die Determinante

$$\left| \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2} = 1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}} \Big\{ \Big[\sqrt[\rho]{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]} \Big] - \right.$$

$$\left. - \Big[\sqrt[\rho]{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}] - 1} \Big] \Big\} \right|$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)$$

den Werth 0, wenn eine der Zahlen u_λ eine Primzahl in einer Potenz enthält, deren Exponent nach dem Modul ρ einer der Zahlen $2, 3, \ldots \rho-1$ congruent ist, während sie in allen anderen Fällen gleich

$$(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=n} \sigma_\mu}$$

ist, wo σ_μ die Anzahl jener Primzahlen vorstellt, welche in u_μ in der Potenz $\varkappa\rho+1$ $(\varkappa=0,1,\ldots)$ auftreten.

Für $r=s=2$, $u_\lambda=\lambda$, $s_1=r-1$, $s_2=s-2$ folgt aus diesem Satze das im Anfange erwähnte Theorem des Herrn E. Cesàro.

Sind die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die ρ^{ten} Potenzen der ersten n Individuen eines geschlossenen Systems, so ist

$$\left|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_1-2}=u_{i_{r+s-3}}} \tau_{\rho,\varkappa,\sigma}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \prod_{\lambda}^{n}{}_{1}\, \mu_\sigma(\sqrt[\rho]{u_\lambda})\, u_\lambda^{\varkappa}$$

$$\left|\sum_{{}_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}} \mu_\sigma([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r+s_1-1}, n_1, n_2, \quad, n_{s-s_2-2}])\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \prod_{\lambda}^{n}{}_{1}\, \mu(\sqrt[\sigma]{u_\lambda})$$

$$\left|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s}}}\right.$$

$$P_{\varkappa,\rho}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_1-2}])\Bigg|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{n} u_\lambda^\varkappa.$$

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System ausser der Einheit von der Art, dass kein Element einen Primfactor in einer höheren als der zweiten Potenz, oder mehr als einen in einer höheren als der ersten enthält, hat ferner $F(x)$ den Werth $f(x)$ oder 0, je nachdem x eine Primzahl ist oder nicht, so hat die Determinante

$$\left|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2-1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}\right.$$

$$F([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])\Bigg|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)}$$

den Werth

$$\prod_{\mu} (-1)^{\tilde{\omega}(u_\mu)} f(p^{(\mu)}) \prod_{\nu} \left\{ (-1)^{\tilde{\omega}(u_\nu)+1} \sum_{\lambda_\nu} f(p^{(\nu)}_{\lambda_\nu}) \right\},$$

wo das Product bezüglich μ über jene Zahlen u_μ zu erstrecken ist, welche einen Primfactor $(p^{(\mu)})$ in der zweiten, alle anderen aber in der ersten Potenz enthalten, das Product hinsichtlich ν aber über alle anderen und die Summation nach λ_ν über alle Primtheiler $p^{(\nu)}_{\lambda_\nu}$ von u_ν auszudehnen ist.

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes Zahlensystem und bezeichnet $A(x)$ den Überschuss der Anzahl derjenigen Theiler einer ganzen Zahl x, welche eine der Formen $2r\mu+1, 2r\mu+2, \ldots, 2r\mu+r$ besitzen, über die Anzahl der übrigen, so hat die Determinante

$$\left| \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2-1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}} A([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)}$$

den Werth

$$(-1)^{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left[\frac{u_\lambda - 1}{r}\right]}$$

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System, so bestehen die Relationen:

$$\left|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r+s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}\right.$$

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])^{\varkappa}\Bigg|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{n} \varphi_{\varkappa}(u_\lambda)$$

$$\left|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}\right.$$

$$\frac{S_{\varkappa}([u_{i_2}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])}{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]^{\varkappa}}\Bigg|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{n} \varphi^{(\varkappa)}(u_\lambda)$$

$$\left|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}\right.$$

$$\varphi(\Delta, [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r+s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \Big|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \tau \prod_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\Delta}{u_\lambda}\right)$$

$$\left|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}\right.$$

$$f_\beta([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \Big|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{n} f_{\beta-1}(u_\lambda)$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{n} \lambda(u_\lambda)\,\tilde{\omega}(u_\lambda)$$

$$\Bigg| \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2-1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\psi^2([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}])\Bigg|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{n} \psi(u_\lambda^2).$$

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System, so ist die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left|K(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}})\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index durch die Summen

$$m_1 = u_{i_{s_1+1}},\ m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\ n_1 = u_{i_{r+s_2}},\ n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1} \left\{\left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]}{u_{i_{r+s-2}}}\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]-1}{u_{i_{r+s-2}}}\right]\right\}$$

gegeben sind, während die übrigen die Werthe

$$m_1 = u_{i_{s_1+1}},\ m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\ n_1 = u_{i_{r+s_2}},\ n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}$$

$$\sum_{{}_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}$$

besitzen, wo $B(x)$ gleich 0 ist, wenn ν keine ρ^{te} Potenz ist, sonst aber den Werth $\mu(\sqrt[\rho]{x})$ hat, ist gleich Null, wenn auch nur eine der Zahlen $u_{\varkappa_1}, u_{\varkappa_2}, \ldots, u_{\varkappa_{\tau-1}}, u_n$ durch eine andere, als eine erste, ρ^{te} oder $(\rho+1)^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl theilbar ist, während sie in allen anderen Fällen den Werth

$$(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\tau-1} \rho_{\varkappa_\lambda}+\rho_n}$$

besitzt, wo ρ_λ die Anzahl jener Primzahlen vorstellt, welche in u_λ in der ersten oder ρ^{ten} Potenz auftreten.

Sind die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die ρ^{ten} Potenzen der ersten n Individuen eines geschlossenen Systems, so hat die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| K(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index durch die Summe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r+s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\left\{\left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r+s_2-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]}{u_{i_{r+s-2}}}\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{[n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_{s_1}}, n_{i_r}, n_{i_{r+1}}, \ldots, n_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}]-1}{u_{i_{r+s-2}}}\right]\right\}$$

gegeben sind, während die übrigen die Werthe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}},\, n_1=u_{i_{r+s_2}},\, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$C([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \qquad (i_{r+s-2}=n)$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r+1}},\, n_1=u_{i_{r+s_2}},\, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$C([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \quad (i_{r+s-2}=\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1})$$

besitzen, wo $C(x)$ den Werth 0 hat, wenn x durch eine Potenz einer Primzahl theilbar ist, deren Exponent nach dem Modul $\sigma\rho$ einer von den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, \rho-1$ verschiedenen Zahl congruent oder grösser als $2\sigma\rho-1$ ist, in allen Fällen aber gleich $(-1)^{\tau}$ ist, wenn τ die Anzahl jener Primzahlen vorstellt, welche in x in der $(\sigma\rho)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommen, ist gleich 0, wenn auch nur eine der Zahlen $u_{\varkappa_1}, u_{\varkappa_2}, \ldots, u_{\varkappa_{\tau-1}}, u_n$ durch eine andere als eine erste, ρ^{te} oder $(\rho+1)^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl theilbar ist, während sie sonst den Werth

$$(-1)^{\rho_n + \sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\tau-1} \rho_{\varkappa_\lambda}}$$

besitzt, wo ρ_λ die Anzahl jener Primzahlen vorstellt, welche in u_λ in der ersten oder ρ^{ten} Potenz auftreten.

Sind die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die ρ^{ten} Potenzen der ersten n Individuen eines geschlossenen Systems, so hat die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| K(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen Index durch die Summen

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2} = 1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, n_2 = u_{i_{s_2+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_1-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\left\{ \left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]}{u_{i_{r+s-2}}} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_1-2}] - 1}{u_{i_{r+s-2}}} \right] \right\}$$

gegeben sind, während die übrigen die Werthe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}},\, n_1=u_{i_{r+s_2}},\, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$D([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \qquad (i_{r+s-2} = n)$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}},\, n_1=u_{i_{r+s_2}},\, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$D([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}, m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]) \quad (i_{r+s-2} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1})$$

besitzen, wo $D(x)$ die Anzahl derjenigen Theiler von x bezeichnet, welche $(\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, den Werth 0, wenn auch nur eine der ganzen Zahlen $\sqrt[\rho]{u_{\varkappa_1}}, \sqrt[\rho]{u_{\varkappa_2}}, \ldots, \sqrt[\rho]{u_{\tau-1}}, \sqrt[\rho]{u_n}$ eine Primzahl in einer Potenz enthält, deren Exponent nach dem Modul σ einer der Zahlen $2, 3, \ldots, \sigma-1$ congruent ist, während sie in allen anderen Fällen gleich

$$(-1)^{\tau_n + \sum\limits_{n=1}^{\lambda=\tau-1} \tau_{\varkappa_\lambda}}$$

ist, wo τ_μ die Anzahl jener Primzahlen vorstellt, welche in $\sqrt[\rho]{u_\mu}$ in der Potenz $\varkappa\sigma+1$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$) enthalten sind.

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| E(2i_1-1, 2i_2-1, \ldots, 2i_{r+s-2}-1) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher $E(x)$ den Überschuss der Anzahl jener Theiler von x, welche eine der Formen $4\rho\mu+1, 4\rho\mu+3, \ldots, 4\rho\mu+2\rho-1$ besitzen, über die Anzahl der übrigen ungeraden Divisoren vorstellt, ist gleich

$$(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=n} \left[\frac{\lambda-1}{\rho}\right]}$$

§. 5. Berücksichtigt man, dass

$$\sum_{i_\varkappa=1}^{i_\varkappa=n} \left\{ \left[\frac{u_{i_\varkappa}}{u_\lambda}\right] - \left[\frac{u_{i_\varkappa}-1}{u_\lambda}\right] \right\} \mu\left(\frac{\sigma}{u_{i_\varkappa}}\right) = \sum_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{u_n}{u_\lambda}\right]} \mu\left(\frac{\sigma}{\tau u_\lambda}\right),$$

ist, wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von τ zu nehmen sind, für welche τu_λ eine Zahl $u_\varkappa$ wird, den Werth 0 hat, wenn $u_\lambda > \sigma$ oder kein Theiler dieser ganzen Zahl ist, weil dann keine der auftretenden Functionen $\mu(x)$ ein ganzzahliges Argument besitzt, während für

$$\sigma = \alpha u_\lambda \quad (\alpha \text{ ganzzahlig})$$

diese Summe, falls $u_1, u_2, \ldots u_n$ ein geschlossenes System bilden, gleich der über alle Theiler d von α zu erstreckenden Summe

$$\sum_d \mu(d)$$

wird und demnach nur dann einen von Null verschiedenen Werth besitzt, wenn $\alpha = 1$, ist, so erkennt man, dass in diesem Falle

$$\sum_{i_\varkappa=1}^{i_\varkappa=n} c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} \mu\left(\frac{u_\rho}{u_i}\right)$$

wo $c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}}$ durch die Gleichung

$$c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \prod_{1}^{s_1}{}_{\mu} \left\{\left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda}\right] - \left[\frac{u_{i_\mu}-1}{u_\lambda}\right]\right\} \prod_{s_1+1}^{r-1}{}_{\nu} \left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right] b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda}$$

definirt ist, gleich

$$\prod_{s_1+1}^{r-1}{}_{\nu} \left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\rho}\right] b_{i_r, i_r, \ldots, i_{r+s-2}, \rho}$$

oder Null ist, je nachdem u_ρ ein Theiler des grössten gemeinsamen Theilers von $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{\varkappa-1}}, u_{i_{\varkappa+1}}, \ldots, u_{i_{s_1}}$ ist oder nicht.

Speciell folgt hieraus der Satz:

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System und bezeichnet $F_{u,\eta}(x)$ die Summe der Werthe, welche die Function $f(y)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler der ganzen Zahl x durchläuft, welche die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, so ist

$$\sum_{i_\varkappa=1}^{i_\varkappa=n} F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])\, \mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_\varkappa}}\right)$$

gleich $f(u_\rho)\,\eta(u_\rho)$ oder 0, je nachdem u_ρ ein Theiler von $[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{\varkappa-1}}, u_{i_{\varkappa+1}}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]$ ist oder nicht.

Ist nun $\eta(z)$ gleich 1 für jedes ganzzahlige z und multiplicirt man den Ausdruck

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \frac{\mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_1}}\right) \mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_2}}\right) \ldots \mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_{r+s-2}}}\right)}{f(u_\rho)}$$

mit $F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-3}}, u_{i'_{r+s-2}}])$ und summirt bezüglich $i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-3}$ von 1 bis n, so erhält man unter Benützung des eben aufgestellten Satzes die Gleichung

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-3}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-3}=n} A_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-3}, i_{r+s-2}} F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-3}}, u_{i'_{r+s-3}}]) =$$

$$= \sum_{\rho, i_1, i_2, \ldots, i_{\varkappa-1}, i_{\varkappa+1}, \ldots, i_{r+s-3}=1}^{\rho, i_1, i_2, \ldots, i_{\varkappa-1}, i_{\varkappa+1}, \ldots, i_{r+s-3}=n}{}' \mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_1}}\right) \mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_2}}\right) \cdot\,\cdot\, \mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_{\varkappa-1}}}\right) \mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_{\varkappa+1}}}\right) \cdot\,\cdot\, \mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_{r+s-3}}}\right),$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von ρ zu nehmen sind, für welche u_ρ ein Theiler von $[u_{i_1}, u_{i_2}, \cdot\,\cdot, u_{i_{\varkappa-1}}, u_{i_{\varkappa+1}}, \cdot\,\cdot, u_{i_{r+s-3}}, u_{i'_{r+s-2}}]$ ist. Da nun offenbar nur jene Glieder der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Summe, in denen

$$u_\rho \geqq u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{\varkappa-1}}, u_{i_{\varkappa+1}}, \ldots, u_{i_{r+s-3}}$$

ist, von Null verschieden sind, so muss u_ρ ein Theiler von $u_{i'_{r+s-2}}$ und zugleich

$$u_\rho = u_{i_1} = u_{i_2} = \cdot\,\cdot = u_{i_{\varkappa-1}} = u_{i_{\varkappa+1}} = \cdot\,\cdot = u_{i_{r+s-3}}$$

sein, wesshalb sich die letzte Gleichung in die folgende verwandelt

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-3}=1}^{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-3}=n} A_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-3}, i_{r+s-2}} F_{u,\eta}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-3}}, u_{i'_{r+s-2}}]) = \sum_d \mu\left(\frac{d}{u_{i_{r+s-2}}}\right),$$

wo die Summation bezüglich d über alle Theiler von $u_{i'_{r+s-2}}$ zu erstrecken ist. Man hat daher den Satz:

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes Zahlensystem, so ist

$$\sum_{\rho, i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-3}=1}^{\ldots, i_{r+s-3}=n} \frac{F([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-3}}, u_{i'_{r+s-2}}])\,\mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_1}}\right)\mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_2}}\right)\ldots\mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_{r+s-3}}}\right)\mu\left(\frac{u_\rho}{u_{i_{r+s-2}}}\right)}{\sum\limits_{d_\rho} F\left(\frac{u_\rho}{d_\rho}\right)\mu(d)} = \delta_{i_{r+s-2}, i'_{r+s-2}}$$

$$(\delta_{\varkappa,\lambda} = 0,\ \varkappa \gtrless \lambda;\ \delta_{\varkappa,\varkappa} = 1),$$

wo die Summation bezüglich d_ρ über alle Theiler von u_ρ zu erstrecken ist.

Dieser Satz kann auch mit Hilfe der am Schlusse des §. 1 abgeleiteten Relation 4) bewiesen werden. Derselbe zeigt übrigens, dass die Grösse $A_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}}$ der Quotient aus der Adjuncte des Elementes $F([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots u_{i_{r+s-2}}])$ und der Determinante $|F([u_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}}])|$ ist. Der Ausdruck $A_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}}$ ist, wie man sofort sieht, gleich Null, wenn das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}$ dividirt durch ihren grössten gemeinsamen Theiler $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)$ durch ein Quadrat (ausser 1) theilbar ist; denn da für u_ρ in der aufgestellten Summe nur Zahlen zu setzen sind, welche durch das erwähnte Vielfache theilbar sind, so erhält in diesem Falle jedes Glied derselben mindestens eine Function $\mu(x)$, deren Argument durch ein Quadrat (ausser 1) theilbar ist. Auch für die Unterdeterminanten höherer Ordnung der eben angezogenen Determinanten gelten, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, analoge bemerkenswerthe Sätze.

§. 6. Ist

$$a_{i_1, i_2, \ldots,} = \prod_{\mu=1}^{s_1} \left\{\left[\frac{u_{i_r}}{u_{i_\mu}}\right] - \left[\frac{u_{i_r}-1}{u_{i_\mu}}\right]\right\} \prod_{\nu=s_1+1}^{r-1} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_{i_r}}\right]\right),$$

so folgt aus der im §. 1 angeführten Definitionsgleichung der Determinanten höheren Ranges, dass in der Entwicklung der Determinante $|a_{i_1, i_2, \ldots, i_r}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, n)}$ sowohl alle Glieder, in denen $i_\varkappa^{(r-1)} < \varkappa$ ist, als auch jene fehlen, in welchen $i_\varkappa^{(r-1)} < i_\varkappa^{(\mu)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, s_1)$ oder $i_\varkappa^{(r-1)} > i_\varkappa^{(\nu)}$ $(\nu = s_1 + 1, \ldots, r-2)$ ist. Aus dieser Bemerkung folgt analog, wie in §. 2, dass die eben genannte Determinante nur das Glied enthält, in welchem $i_\varkappa^{(\nu)} = \varkappa$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r-1;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, n)$ ist und demnach den Werth $+1$ besitzt. Man hat daher die Relation

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \underset{1}{\overset{s_1}{\prod_{\mu}}} \left\{ \left[\frac{u_\lambda}{u_{i_\mu}}\right] - \left[\frac{u_\lambda - 1}{u_{i_\mu}}\right] \right\} \underset{s_1+1}{\overset{r-1}{\prod_{\nu}}} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right) b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= |b_{i_1, i_2, \ldots, i_s}|_{(i_1, i_2, \ldots, i_s = 1, 2, \ldots, n)}.$$

Da die Differenz $\left[\frac{u_\lambda}{u_{i_\mu}}\right] - \left[\frac{u_\lambda - 1}{u_{i_\mu}}\right]$ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem u_λ ein Vielfaches von u_{i_μ} ist oder nicht, so sieht man, dass nur jene Glieder des Elementes $c_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}}$ der auf der linken Seite dieser Gleichung stehenden Determinante von 0 verschieden sind, in denen u_λ durch jede der Zahlen $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}$ theilbar ist, und demnach stellt dasselbe die Summe derjenigen Werthe vor, welche das Product

$$\underset{s_1+1}{\overset{r-1}{\prod_{\nu}}} \left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right) b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda}$$

annimmt, wenn u_λ alle zu den Zahlen $u_\varkappa$ gehörigen Vielfachen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen $(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}})$ durchläuft.

Ist speciell

$$\chi(x) = [x],$$

so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$\left| \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}} C_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}}([m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}]; (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}})) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \left| b_{i_1, i_2, \ldots, i_s} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_s = 1, 2, \ldots, n)},$$

wo die über alle Werthe von λ, für welche u_λ ein Theiler von $[m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}]$ und zugleich ein Vielfaches von $(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}})$ ist, ausgedehnte Summe

$$\sum_\lambda b_{i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+s-2}, \lambda} = C_{i_r, i_{r+1}, i_{r+2}, \ldots, i_{r+s-2}}([m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}]; (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}))$$

gesetzt wurde.

Nimmt man in dieser Gleichung

$$b_{i_1, i_2, \ldots, i_s} = 0 \qquad (i_{s-1} < i_s)$$

$$b_{i_1, i_2, \ldots, i_s} = \prod_{\sigma=1}^{s_2} \left\{ \left[\frac{u_{i_s}}{u_{i_\sigma}} \right] - \left[\frac{u_{i_s} - 1}{u_{i_s}} \right] \right\} \prod_{\mu=s_2+1}^{s-2} \left[\frac{u_{i_\mu}}{u_{i_s}} \right] g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s})$$

in allen anderen Fällen, so verwandelt sie sich in

$$\left|\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}},\, n_1=u_{i_{r+s_2}},\, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2}=u_{i_{s+s-3}}} G(u_{i_{r+s-2}}; [m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}))\right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)} =$$

$$= \prod_{\mu}{}_{1}^{n}\, g(u_\mu, u_\mu),$$

wo $G(x; z, u)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $g(x, y)$ annimmt, wenn y alle zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler von z durchläuft, welche durch u theilbar sind. Dieselbe geht für

$$s_1 = r-1,\ s = s-2$$

über in

$$|G_1(u_{i_{r+s-2}}, (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-3}})|_{(i, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1, 2, \ldots, n)} = \prod_{\mu}{}_{1}^{n}\, g(u_\mu, u_\mu),$$

wo mit $G_1(x, z)$ die Summe jener Werthe bezeichnet wird, welche die Function $g(x, y)$ annimmt, wenn y alle zu den Zahlen u_λ gehörigen Vielfachen von z durchläuft.

Nimmt man nun wieder der Reihe nach

$$g(u_n, u_{i_s}) = \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s}) \qquad 1)$$

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \eta(u_{i_s}) \qquad (i_{s-1} = i_s,\ i_{s-1} \gtreqless \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n)$$

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = 0 \qquad (i_{s-1} > i_s;\ i_{s-1} \gtreqless \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n)$$

und

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left\{\left[\frac{u_{i_s}}{u_{i_{s-1}}}\right] - \left[\frac{u_{i_s}-1}{u_{i_{s-1}}}\right]\right\} \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s}) \text{ bez. } = \left[\frac{u_{i_{s-1}}}{u_{i_s}}\right] \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s}) \qquad (i_{s-1} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1})$$

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left\{\left[\frac{u_{i_s}}{u_{i_{s-1}}}\right] - \left[\frac{u_{i_s}-1}{u_{i_{s-1}}}\right]\right\} \eta(u_{i_s}) f(u_{i_s}) \qquad (i_{s-1} = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\tau-1}, n) \qquad 2)$$

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left\{\left[\frac{u_{i_s}}{u_{i_{s-1}}}\right] - \left[\frac{u_{i_s}-1}{u_{i_{s-1}}}\right]\right\} \eta(u_{i_s})$$

in allen anderen Fällen,

$$g(u_{i_{s-1}}, u_{i_s}) = \left[\frac{u_{i_{s-1}}}{u_{i_s}}\right] \eta(u_{i_s})$$

in allen anderen Fällen, so ergeben sich die folgenden Theoreme:

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| L_0(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2,}$$

in welcher $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend welche unter einander verschiedene ganze Zahlen ($u_\lambda < u_\varkappa$; $\lambda < \varkappa$) bezeichnen und die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index den Werth 0 besitzen, wenn $u_{i_{r+s-2}}$ die durch die Function $\eta(x)$ charakterisirte Eigenschaft nicht besitzt, sonst aber durch die Summe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2} = 1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}},\, m_2 = u_{i_{s_2+1}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\, n_1 = u_{i_{s+r_2}},\, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\left\{\left[\frac{u_{i_{r+s-2}}}{(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}})}\right] - \left[\frac{u_{i_{r+s-2}}-1}{(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}})}\right]\right\}$$

$$\left\{\left[\frac{[m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]}{u_{i_{r+s}}}\right] - \left[\frac{[m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]-1}{u_{i_{r+s-2}}}\right]\right\}$$

gegeben sind, während die übrigen die Werthe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}},\, n_1=u_{i_{r+s_2}},\, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}} F_{u,\eta}([m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}})) \qquad (i_{r+s-2}=n)$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}},\, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_2-1}=u_{i_{r-1}},\, n_1=u_{i_{r+s_2}},\, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}} F_{u,\eta}([m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}))$$

$$(i_{r+s-2}=\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1})$$

besitzen, wo $F_{u,\eta}(x, y)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $f(z)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler der ganzen Zahl x durchläuft, welche Vielfache von y sind und die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, ist gleich $f(u_{\varkappa_1}) f(u_{\varkappa_2}) \ldots f(u_{\varkappa_{\tau-1}}) f(u_n)$ oder 0, je nachdem sämmtlichen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft zukommt oder nicht.

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| L_1(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2}=1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend welche unter einander verschiedene ganze Zahlen ($u_\lambda < u_\varkappa$; $\lambda < \varkappa$) sind und die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{z-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index den Werth 0 besitzen, wenn $u_{i_{r+s-2}}$ die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft nicht besitzt, sonst aber durch die Summe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r-s-3}}}$$

$$\left\{\left[\frac{u_{i_{r+s-2}}}{(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}})}\right] - \left[\frac{u_{i_{r+s-2}}-1}{(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}})}\right]\right\}$$

$$\left\{\left[\frac{[m_1, m_2, \ldots, m_{r+s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]}{u_{i_{r+s-2}}}\right] - \left[\frac{[m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1\, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]-1}{u_{i_{r+s-2}}}\right]\right\}$$

gegeben sind, während die übrigen die Werthe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_1, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1=u_{i_{s_1+1}}, m_2=u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1}=u_{i_{r-1}}, n_1=u_{i_{r+s_2}}, n_2=u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-2}=u_{i_{r+s-3}}}$$

$$F_{u,\eta}([m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}})) \qquad (i_{r+s-2} = n)$$

$$\sum_{m_1, m_2, \dots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \dots, n_{s-s_2-1} = 1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \dots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \dots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}, n_{s-s_2-1} = u_{i_{r+s-2}}} \cdot$$

$$F_{u,\eta}([m_1, m_2, \dots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \dots, n_{s-s_2-1}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \dots, u_{i_{r+s_2-1}})) \qquad (i_{r+s-2} = \varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{\tau-1})$$

besitzen, wo $F_{u,\eta}(x, y)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $f(z)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler der ganzen Zahl x durchläuft, welche Vielfache von y sind und die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, ist gleich $f(u_{\varkappa_1}) f(u_{\varkappa_2}) \dots f(_{\varkappa_{\tau-1}}) f(u_n)$ oder 0, je nachdem sämmtlichen Zahlen u_λ die eben erwähnte Eigenschaft zukommt oder nicht.

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| L_2(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \dots, i_{r+s-2} = 1, 2, \dots, n)},$$

in welcher $u_1, u_2, \dots, u_n$ irgend welche unter einander verschiedene ganze Zahlen ($u_\lambda < u_\varkappa$; $\lambda < \varkappa$) vorstellen und die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index durch die Summe

$$\sum_{\dots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \dots, n_{s-s_2-2} = 1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}}, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \dots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}}, n_1 = u_{i_{r+s_2}}, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \dots, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\eta_0^{(u)}([m_1, m_2, \dots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \dots, n_{s-s_2-2}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \dots, u_{i_{r+s_2-1}}))$$

gegeben sind, während die übrigen die Werthe

$$\sum_{\ldots,\, m_{r-s_1-1},\, n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}},\, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\, n_1 = u_{i_{r+s_2}},\, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$. F_{u,\eta}(m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}, u_{i_{r+s-2}}))$$

haben, wo $\eta_0^{(u)}(x, y)$ die Anzahl derjenigen zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler von x vorstellt, welche Vielfache von y sind und die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, und $F_{u,\eta}(x, y)$ die Summe der Werthe ist, welche die Function $f(z)$ annimmt, wenn ihr Argument die eben genannten Theiler durchläuft, ist gleich $f(u_{\varkappa_1}) f(u_{\varkappa_2}) \ldots f(u_{\varkappa_{\tau-1}}) f(u_n)$ oder 0, je nachdem die eben erwähnte Eigenschaft allen Zahlen u_λ zukommt oder nicht.

Die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left| L_3(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)},$$

in welcher $u_1, u_2, \ldots, u_n$ irgend welche unter einander verschiedene ganze Zahlen ($u_\lambda < u_\varkappa$; $\lambda < \varkappa$) bezeichnen und die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index durch die Summe

$$\sum_{\ldots,\, m_{r-s_1-1},\, n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_{s-s_2-1}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}},\, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\, n_1 = u_{i_{r+s_2}},\, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}},\, n_{s-s_2-1} = u_{i_{r+s-2}}}$$

$$\eta_3^{(u)}([m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}))$$

definirt sind, während die übrigen die Werthe

$$m_1 = u_{i_{s_1+1}},\ m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\ n_1 = u_{i_{r+s_2}},\ n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots, n_{s-s_2-1} = u_{i_{r+s-2}}$$

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1} = 1} F_{u,\eta}([m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-1}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}))$$

haben, wo $\eta_0^{(u)}(x, y)$ die Anzahl derjenigen zu den Zahlen u_λ gehörigen Theiler von x vorstellt, welche Vielfache von y sind und die durch die Function $\eta(z)$ charakterisirte Eigenschaft besitzen, und $F_{u,\eta}(x, y)$ die Summe der Werthe ist, welche die Function $f(z)$ annimmt, wenn ihr Argument die eben genannten Theiler durchläuft, ist gleich $f(u_{\varkappa_1}) f(u_{\varkappa_2}) \ldots f(u_{\varkappa_\tau - 1}) f(u_n)$ oder 0, je nachdem die eben erwähnte Eigenschaft allen Zahlen u_λ zukommt oder nicht.

Diese Theoreme führen sofort zu folgenden Gleichungen:

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \prod_{\mu=1}^{s_1} \left\{ \left[\frac{u_{i_\mu}}{u_\lambda}\right] - \left[\frac{u_{i_\mu} - 1}{u_\lambda}\right] \right\} \prod_{\nu=s_1+1}^{r-1} \chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right) L_\tau(u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}, \lambda) \right|_{(i_1, i_2, \quad i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= f(u_{\varkappa_1}) f(u_{\varkappa_2}) \ldots f(u_{\varkappa_\tau - 1}) f(u_n) \prod_{\rho=1}^{n} \eta(u_\rho)$$

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\prod_{\mu=1}^{s_1}\left\{\left[\frac{u_\lambda}{u_{i_\mu}}\right]-\left[\frac{u_\lambda-1}{u_{i_\mu}}\right]\right\}\prod_{\nu=s_1+1}^{r-1}\chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right)L_\tau(u_{i_r},u_{i_{r+1}},\ldots,u_{i_{r+s-2}},\lambda)\right|_{(i_1,i_2,\ldots,i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)}=$$

$$=f(u_{\varkappa_1})f(u_{\varkappa_2})\ldots f(u_{\varkappa_{\tau-1}})f(u_n)\prod_{\rho=1}^{n}\eta(u_\rho)$$

$$\left|\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\prod_{\mu=1}^{s_1}\left\{\left[\frac{u_\lambda}{u_{i_\mu}}\right]-\left[\frac{u_\lambda-1}{u_{i_\mu}}\right]\right\}\prod_{\nu=s_1+1}^{r-1}\chi\left(\left[\frac{u_{i_\nu}}{u_\lambda}\right]\right)H_\tau(u_{i_r},u_{i_{r+1}},\ldots,u_{i_{r+s-2}},\lambda)\right|_{(i_1,i_2,\ldots,i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)}=$$

$$=f(u_{\varkappa_1})f(u_{\varkappa_2})\ldots f(u_{\varkappa_{\tau-1}})f(u_n)\prod_{\rho=1}^{n}\eta(u_\rho)\qquad(\tau=0,1,2,3).$$

Von den zahlreichen bemerkenswerthen speciellen Fällen der in diesem Paragraphe angegebenen Sätze mögen die folgenden besonders erwähnt werden.

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System, so hat die Determinante n^{ter} Ordnung vom Range $r+s-2$

$$\left|M(u_{i_1},u_{i_2},\ldots,u_{i_{r+s-2}})\right|_{(i_1,i_2,\ldots,i_{r+s-2}=1,2,\ldots,n)},$$

in welcher die Elemente mit einem von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau-1}, n$ verschiedenen $(r+s-2)^{\text{ten}}$ Index durch die Summen

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}},\, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\, n_1 = u_{i_{r+s_2}},\, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\left\{\left[\frac{u_{i_{r+s-2}}}{(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}})}\right] - \left[\frac{u_{i_{r+s-2}}-1}{(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}})}\right]\right\}$$

$$\left\{\left[\frac{[m_1, m_2, \ldots, m_{r+s_2-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]}{u_{i_{r+s-2}}}\right] - \left[\frac{[m_1, m_2, \ldots, m_{r+s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}]-1}{u_{i_{r+s-2}}}\right]\right\}$$

gegeben sind, während die übrigen die Werthe

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_2-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}=1}^{m_1 = u_{i_{s_1+1}},\, m_2 = u_{i_{s_1+2}}, \ldots,\, m_{r-s_1-1} = u_{i_{r-1}},\, n_1 = u_{i_{r+s_2}},\, n_2 = u_{i_{r+s_2+1}}, \ldots,\, n_{s-s_2-2} = u_{i_{r+s-3}}}$$

$$\zeta([m_1, m_2, \ldots, m_{r-s_1-1}, n_1, n_2, \ldots, n_{s-s_2-2}], (u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{s_1}}, u_{i_r}, u_{i_{r+1}}, \ldots, u_{i_{r+s_2-1}}))$$

besitzen, wo $\zeta(x, y)$ gleich Null ist, wenn y zu x theilerfremd ist oder mehr als einen Primfactor enthält, während es für $y = p^\alpha$ den Werth

$$\left[\frac{\log x}{\log y}\right] \log p$$

hat, den Werth

$$\prod_{\lambda=1} \log \prod_{r_\lambda} 2\sin\frac{r_\lambda \pi}{u_{\varkappa_\lambda}} \qquad (\varkappa_\tau = n)$$

wo r_λ alle zu $u_{\varkappa_\lambda}$ theilerfremden Zahlen unterhalb $u_{\varkappa_\lambda}$ durchläuft; sie ist demnach gleich Null, wenn auch nur eine der Zahlen $u_{\varkappa_1}, u_{\varkappa_2}, \ldots, u_{\varkappa_{\tau-1}}, u_n$ mehr als einen Primtheiler besitzt.

Bilden die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ein geschlossenes System, so ist

$$\left| \frac{(-1)^{(\varkappa+1)\tilde{\omega}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])}\, \pi^{\varkappa}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])\, \varphi_\varkappa([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])}{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} = \prod_{\rho=1}^{n} u_\lambda \mu(\lambda)$$

$$\left| \frac{f_{\beta-1}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])\, \psi([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])^2\, \pi^{\beta-2}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])}{(\beta-1)^{\tilde{\omega}([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}])}} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} =$$

$$= \prod_{\rho=1}^{n} \frac{f_{\beta-2}(u_\rho)\, \psi(u_\rho^2\, \pi^{\beta-3}(u_\rho))}{(\beta-2)^{\tilde{\omega}(u_\rho)}}$$

$$\left| \left(\frac{\Delta}{[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]} \right) [u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]^{\mu-\varkappa} \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} = \prod_{\rho=1}^{n} \frac{\chi_{\varkappa,\mu}(\Delta, u_\rho)}{u_\rho^{\varkappa}}$$

$$\left| \lambda\left([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]\right) f_\beta\left([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]\right) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} = \prod_{\rho=1}^{n} \frac{\lambda(u_\rho) f_{\beta-1}(u_\rho)\, \psi\left(u_\rho^2 \pi^{\beta-2}(u_\rho)\right)}{(\beta-1)^{\bar{\omega}(u_\rho)}}$$

$$\left| \omega\left([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]\right) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} = 0 \qquad (n \geqq 4)$$

$$\left| \omega\left([u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{r+s-2}}]\right) \right|_{(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s-2} = 1, 2, \ldots, n)} = 1 \qquad (n < 4).$$