Über die bei einer Gattung centrischer Rückungsflächen der vierten Ordnung auftretende Reciprocität

Prof. **Anton Sucharda** in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Mai 1892.)

1. In meiner Arbeit »Über die Singularitäten einer Gattung von Rückungsflächen vierter Ordnung«, welche ich die Ehre hatte im Jahre 1888 in diesen Sitzungsberichten zu veröffentlichen, habe ich es versucht darauf hinzuweisen, dass eine jede von diesen Flächen eine Reihe von Singularitäten aufweist, welche sich derart in Paare ordnen lassen, dass nebst einer jeden Singularität stets auch ihre reciproke vorhanden erscheint.

In den vorliegenden Zeilen sei es gestattet diese Reciprocität näher zu beleuchten.

Zu dem Behufe wollen wir eine beliebige centrische Rückungsfläche **P** vierter Ordnung von der gedachten Gattung herausgreifen.

Es sei dies diejenige, deren Leit- und erzeugende Curven Kreise sind, der eine, A_s, vom Halbmesser R, der andere B vom Halbmesser r, hiebei soll $R > r$ sein. Die Ebenen dieser beiden Curven seien zu einander normal, und der Leitkreis A_s sei der geometrische Ort der Mittelpunkte aller mit B congruenten und homothetischen Kreise ${}^{\mu}B$, welche die Fläche **P** ausfüllen. Dieselbe enthält bekanntlich auch eine Schaar von mit A_s congruenten und homothetischen Kreisen ${}^{\mu}A$, deren Mittelpunkte einen mit B congruenten und homothetischen, der Fläche offenbar nicht angehörigen, Kreis B_s bilden. Der Kreis A_s sei in der XY-Ebene, der Kreis B_s in der XZ-Ebene enthalten, ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt sei im Coordinatenanfang 0 gelegen.

Die Ebenen $^{\mu}\mathrm{A}$ aller Kreise $^{\mu}A$ sind zur XY-Ebene parallel, die Ebenen $^{\mu}\mathrm{B}$ der Kreise $^{\mu}B$ zur XZ-Ebene. Unter den Ebenen $^{\mu}\mathrm{A}$ gibt es bekanntlich zwei, von deren jeder die Fläche längs eines ganzen Kreises des Systems $^{\mu}A$ berührt wird. Es sind dies die Cnictropebenen $^{0}\mathrm{A}$ $^{\omega}\mathrm{A}$ der Cnictropkegelschnitte ^{0}A $^{\omega}A$; analog gibt es auch unter den Ebenen $^{\mu}\mathrm{B}$ die zwei Cnictropebenen $^{0}\mathrm{B}$ $^{\omega}\mathrm{B}$ der Cnictropkegelschnitte ^{0}B $^{\omega}B$.

2. Zu dieser Fläche P soll nun ihre reciproke construirt werden. Bekanntlich lässt sich dies dadurch leicht bewerkstelligen, dass man eine beliebige Fläche zweiter Ordnung als Directrix wählt und die gegebene Fläche in Bezug auf dieselbe nach dem Gesetze der Polarität transformirt. Auf diese Weise wird nämlich die allgemeine Reciprocität in Polarreciprocität in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung übergeführt. Da bekanntlich[1] zwei reciproke Räume immer in diese involutorische Lage der Polarreciprocität übergeführt werden können, so thut unser Vorgang der Allgemeinheit keinen Abbruch.

Als Directrix wählen wir ein elliptisches Paraboloid mit dem Scheitel im Coordinatenanfang 0 und der Axe in der positiven X-Axe. Von diesem Paraboloide wird die XY-Ebene in der Parabel P, die XZ-Ebene in der Parabel Q getroffen. Man übersieht sofort, dass die Fläche P von der XY-Ebene längs zwei mit A_s congruenten Kreisen $^{\alpha}A$ $^{\varepsilon}A$ geschnitten wird, welche den krummlinigen Theil der Contour bezüglich der XY-Ebene ausmachen, und dass die Tangentialebenen der P in den sämmtlichen Punkten dieser Kreise zur XY-Ebene normal sind. Diese Ebenen umhüllen zwei zur XY-Ebene normale Contourcylinder $^{\alpha}\breve{\mathrm{A}}$ $^{\varepsilon}\breve{\mathrm{A}}$ der Rückungsfläche.

Einer jeden Tangentialebene des Cylinders $^{\alpha}\breve{\mathrm{A}}$ als Polarebene entspricht ein in der XY-Ebene enthaltener Punkt als Pol. Auf diese Weise entspricht der ganzen Cylinderfläche eine in der XY-Ebene enthaltene Curve als reciprokes Gebilde.

Weil bekanntlich, wenn die Polare einen Kegelschnitt K umhüllt, ihre Pole in Bezug auf einen in seiner Ebene enthaltenen Kegelschnitt K' einen neuen Kegelschnitt K'' ausfüllen, muss die in unserem Falle erwähnte reciproke Curve auch ein

[1] Fiedler, Darstellende Geometrie, II. Aufl. S. 711.

Kegelschnitt sein, und wenn wir bedenken, dass die zu transformirende Cylinderfläche die XZ-Ebene zur Normalsymmetrieebene hat, so folgt daraus, dass dieser Kegelschnitt, er möge ${}^{\alpha}A'$ heissen, in der X-Axe eine seiner Axen haben muss. Ähnliches gilt auch in Bezug auf die mit ${}^{\alpha}\breve{\mathrm{A}}$ congruente Cylinderfläche ${}^{\tau}\breve{\mathrm{A}}$. Derselben entspricht reciprok der Kegelschnitt ${}^{\tau}A'$, dessen eine Axe auch in die Gerade X zu liegen kommt.

Die erwähnten Cylinderflächen werden von der X-Axe in den respectiven Punktepaaren $a\,b$, $c\,d$ getroffen. Die den Tangentialebenen dieser Punkte als Polarebenen reciprok entsprechenden Punkte $a'\,b'$, $c'\,d'$ liegen in der X-Axe und sind offenbar $a'\,b'$ zwei Scheitel des Kegelschnittes ${}^{\alpha}A'$, und $c'\,d'$ zwei Scheitel des Kegelschnittes ${}^{\tau}A'$. Aus dem bekannten Satze, dass der in der Axe eines elliptischen Paraboloides enthaltene Pol und seine Polarebene von dem Scheitel dieser Fläche gleich weit abstehen, folgt sofort, dass $\overline{ac} = \overline{a'c'}$ und $\overline{bd} = \overline{b'd'}$ ist, weil ferner $\overline{ac} = \overline{bd}$ so folgt hieraus $\overline{a'c'} = \overline{b'd'}$, d. i. die in der X-Axe enthaltenen Axen der beiden Kegelschnitte ${}^{\alpha}A'$ und ${}^{\tau}A'$ sind einander gleich. Hiebei ist ausserdem $a' \equiv d$, $b' \equiv c$, $a \equiv d'$, $b \equiv c'$.

Die Cylinderflächen ${}^{\alpha}\breve{\mathrm{A}}$ ${}^{\tau}\breve{\mathrm{A}}$ besitzen ferner zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen. Es sind das die zu der XZ-Ebene parallelen Cnictropebenen ${}^{0}\mathrm{B}$ ${}^{\omega}\mathrm{B}$. Von diesen Ebenen wird die Parabel P in den Punkten ${}^{0}p$ ${}^{\omega}p$ getroffen. Diesen Ebenen, da dieselben durch den Mittelpunkt der Directrix hindurchgehen, entsprechen reciprok zwei unendlich entfernte Punkte der XY-Ebene. Es sind das die unendlich entfernten Punkte ${}^{0}b'_{\infty}$ ${}^{\omega}b'_{\infty}$ der Tangenten T_{op} und $T_{\omega p}$ der Parabel P. Diese beiden Punkte gehören offenbar den beiden Kegelschnitten ${}^{\alpha}A'$ ${}^{\tau}A'$ an, und hieraus folgt:

Die den beiden Contourcylinderflächen reciprok entsprechenden Kegelschnitte ${}^{\alpha}A'$ ${}^{\tau}A'$ sind zwei congruente und homothetische Hyperbeln. Ihre reellen Axen liegen in der X-Axe des Coordinatensystems; eine jede derselben hat die Länge $2\,R$. Ihre Mittelpunkte fallen mit den Mittelpunkten der Kreise ${}^{\alpha}A$ und ${}^{\tau}A$ zusammen.

Bestimmen wir nun die Kegelschnitte, welche den Cylinderflächen des Systems ${}^{\mu}\breve{\mathrm{B}}$ reciprok entsprechen. Es sind dies Flächen, welche der Rückungsfläche längs den Kegelschnitten des Systems ${}^{\mu}B$ berührend umschrieben sind. Eine jede Fläche ${}^{\mu}\breve{\mathrm{B}}$ besitzt zwei verticale parallele Tangentialebenen, deren eine gleichzeitig Tangentialebene des Contourcylinders ${}^{\alpha}\breve{\mathrm{A}}$, die andere des Contourcylinders ${}^{\tau}\breve{\mathrm{A}}$ ist. Hieraus folgt, dass der der Cylinderfläche ${}^{\mu}\breve{\mathrm{B}}$ reciprok entsprechende Kegelschnitt ${}^{\mu}B'$ die Hyperbeln ${}^{\alpha}A'$ ${}^{\tau}A'$ in je einem Punkte schneidet. Weil ferner die Schnittgerade der beiden Tangentialebenen in der unendlich entfernten Ebene liegt, deren reciproken Punkt der Mittelpunkt der Directrix abgibt, so folgt hieraus, dass die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte zur X-Axe parallel ist. Die Entfernung dieser beiden Punkte ist constant, denn sie gleicht der Strecke $\overline{a'c'} = \overline{b'd'} = 2r$. Beachten wir ferner, dass die sämmtlichen Cylinderflächen ${}^{\mu}\breve{\mathrm{B}}$ die zwei Cnictropebenen ${}^{0}\mathrm{A}$ ${}^{\omega}\mathrm{A}$ zu gemeinschaftlichen Tangentialebenen haben. Weil diese Ebenen zu der XY-Ebene parallel sind, folglich durch den Mittelpunkt der Directrix hindurchgehen, so entsprechen ihnen zwei in der XZ-Ebene enthaltene unendlich entfernte Punkte ${}^{0}\alpha'_{\infty}$ ${}^{\omega}\alpha'_{\infty}$. Es sind dies die unendlich entfernten Punkte der Tangenten zur Parabel Q in den Punkten ${}^{0}q$ ${}^{\omega}q$, in welchen dieselbe von jenen Tangentialebenen getroffen wird. Die unendlich entfernten Punkte ${}^{0}\alpha'_{\infty}$ ${}^{\omega}\alpha'_{\infty}$ sind offenbar allen Kegelschnitten ${}^{\mu}B'$ gemeinschaftlich und es folgt hieraus, dass diese Kegelschnitte in den zur XZ-Ebene parallelen Ebenen enthaltene congruente und homothetische Hyperbeln sind. Die Hauptaxe jeder derselben beträgt $2r$.

3. Dies alles zusammengefasst führt zu dem folgenden Schlusse:

Die aus der Rückungsfläche P durch Reciprocität abgeleitete Fläche P′ ist eine Rückungsfläche der eingangs dieses Aufsatzes angeführten Gattung. Die Curven der beiden Systeme sind Hyperbeln, ihre Ebenen zu einander normal. Es ist folglich eine hyperbel-hyperbolische Rückungsfläche. Dieselbe lässt sich also durch Polarreciprocität unter Anwendung eines elliptischen Paraboloides als Directrix aus der Kreis-Kreisrückungsfläche $(R > r)$ herleiten.

Hiemit ist die bei diesen zwei centrischen Rückungsflächen der vierten Ordnung auftretende Reciprocität der Singularitäten erklärt.

Weil nämlich die Kreis-Kreisrückungsfläche nach dem Vorangeführten zu der hyperbel-hyperbolischen reciprok ist, besitzt die eine dieser Flächen die reciproken aller Singularitäten der anderen Fläche. Weil ferner beide Flächen centrische Rückungsflächen vierter Ordnung von einer und derselben Gattung sind, müssen alle Singularitäten und Charaktere der einen von ihnen auch Eigenthum der anderen sein, folglich besitzt jede dieser beiden Flächen nebst jeder ihrer Singularität auch die zu derselben reciproke.

In ähnlicher Weise würde man sich überzeugen, dass auch aus einer jeden anderen centrischen Rückungsfläche vierter Ordnung vorausgesetzter Gattung stets als reciproke eine centrische Rückungsfläche dieser Gattung abgeleitet werden kann, und dass folglich bei allen diesen Rückungsflächen die oberwähnte Reciprocität der Singularitäten Platz hat, die einen als der Fläche als Originalfläche angehörig, die anderen, reciproken, aus dem Grunde, weil dieselben offenbar der reciproken Fläche angehören, welche mit der ursprünglichen zu derselben Gattung zählend die Existenz derselben auch für die Originalfläche verbürgt.

Hiebei ist stets nur darauf zu achten, dass zur Directrix ein elliptisches Paraboloid gewählt werde, dessen Axe den Mittelpunkt der Rückungsfläche enthält und zu den Ebenen $^{\mu}A$ $^{\mu}B$ der beiden Courvensysteme parallel ist.

4. Ein anderes Bewandtniss hat es mit der Frage, ob man diese Flächen oder aber irgend welche unter ihnen als sich selbst reciproke bezeichnen könne.

Um diese Frage zu beantworten, greifen wir neuerdings zu der Anfangs betrachteten Kreis-Kreisrückungsfläche und ihrer reciproken, der hyperbel-hyperbolischen Fläche zurück.

Aus dem Umstande, dass hier das Gesetz der Polarität zur Geltung kommt, folgt, dass die einander reciproken Flächen alle gegenseitig reciproken Singularitäten gleichzeitig beide reell oder aber beide imaginär haben. So entsprechen beispielsweise den vier reellen Cnictropen der ersteren Fläche vier reelle Knotenpunkte der letzteren, hingegen den vier imaginären Knotenpunkten der ersteren vier imaginäre Cnictrops der letzteren. Sollte also eine der behandelten Rückungsflächen sich selbst reciprok sein, so müsste sie in erster Reihe die Paare ihrer reciproken Singularitäten gleichzeitig reell, oder gleichzeitig maginär haben.

Untersuchen wir in dieser Hinsicht die einzelnen Flächen der behandelten Gattung, so haben wir uns (wenn wir anstatt eines geschlossenen Kegelschnittes stets Kürze halber den Kreis setzen) mit der Kreis-Kreisfläche, der Hyperbel-Kreisfläche und der Hyperbel-Hyperbelfläche zu befassen.

Die erste von diesen Flächen, die Kreis-Kreisfläche, besitzt vier reelle Cnictrops, die zu ihnen reciproken Singularitäten, die Knotenpunkte nämlich, hat sie aber imaginär.

Hieraus geht schon hervor, dass diese Fläche sich selbst nicht reciprok sein kann.

Die Hyperbel-Kreisfläche besitzt entweder zwei oder aber vier reelle Cnictrops, je nachdem die Ebene irgend eines Kreises keine der Hyperbeln tangirt, oder aber eine derselben. Im ersteren Falle soll sie als eine vom Typus a, im letzteren als eine vom Typus b bezeichnet werden. Der letztere Typus b gibt offenbar zu keiner sich selbst reciproken Fläche Anlass, da diese Fläche stets nur zwei reelle Knotenpunkte besitzt, nach dem Vorangeführten aber vier reelle Cnictrops aufzuweisen hat.

Um die Frage nach dem reciproken sich selbst Entsprechen der Fläche Typus a zu beantworten, fassen wir ihre Doppelcurve näher ins Auge, als auch den derselben reciprok entsprechenden Bitangentialebenenkegel.

Man übersieht nun leicht Folgendes:

Besitzt die Fläche eine imaginäre Doppelcurve, d. i. liegen ihre beiden Mäntel so, dass sie einander im Endlichen nirgends treffen, so liegt ihr Mittelpunkt ausserhalb der Fläche und die durch denselben gehenden Bitangentialebenen derselben sind reell, folglich auch der Bitangentialebenenkegel. Und umgekehrt: ist die Doppelcurve reell, dann ist der Bitangentialebenenkegel imaginär. Aus diesem einzigen Umstande geht zur Genüge hervor, dass diese Fläche sich selbst nicht reciprok sein könne.

Es erübrigt also nur die Hyperbel-Hyperbelfläche. Diese Fläche besitzt stets vier reelle Knotenpunkte, kann aber keinen oder zwei oder aber vier reelle Cnictropkegelschnitte haben. Je nachdem soll sie als eine vom Typus a, b, c bezeichnet werden.

Den Typus a haben wir bereits kennen gelernt. Es ist derjenige, den wir in Art. 2 als die reciproke der Kreis-Kreisfläche erkannt haben.

Um ihn zu erhalten, brauchen wir die Leithyperbel A_s und die erzeugende B so zu wählen, dass die Ebenen der Curven $\left\{ \begin{matrix} {}^{\mu}A \\ {}^{\mu}B \end{matrix} \right\}$ zu keiner Tangente der Curven $\left\{ \begin{matrix} {}^{\mu}B \\ {}^{\mu}A \end{matrix} \right\}$ parallel werden; nehmen wir also leichterer Anschaulichkeit halber stets an, dass die Leithyperbel der Ort der Mittelpunkte der Erzeugenden sein soll, und dass die Ebenen der beiden Curven zu einander normal sind, so erhält man Typus a etwa dadurch, dass man die beiden Hyperbeln so wählt, dass in die Schnittgerade derselben die reellen Axen beider Curven zu liegen kommen.

Um Typus b zu erhalten, wählen wir die Hyperbeln ${}^{\mu}A$ und ${}^{\mu}B$ so, dass eine Tangente von B mit der Ebene der A parallel werde (nicht aber eine Tangente von A mit der Ebene einer B); also etwa so, dass bei obiger Voraussetzung in die Schnittlinie der Ebenen der beiden Curven A_s und B die reelle Axe der einen und die imaginäre der anderen zu liegen komme.

Um schliesslich Typus c zu erhalten, wähle man die Hyperbeln so, dass eine Tangente von ${}^{\mu}B$ parallel werde zu einer Tangente von ${}^{\mu}A$.

In dem zur besseren Veranschaulichung gewählten Falle wäre dies etwa so zu erzielen, dass man die imaginären Axen der beiden Hyperbeln A_s und B parallel wählen würde.

Weil alle drei Typen je vier reelle Knotenpunkte aufweisen, vier reelle Cnictrops aber bloss bei Typus c vorkommen, so ist einzig bei diesem die Wahrscheinlichkeit eines reciproken sich selbst Entsprechens vorhanden.

5. Dass dieses Entsprechen wirklich stattfindet, soll in dem Folgenden bewiesen werden. Wählen wir hiezu eine Hyperbel-Hyperbelfläche, deren Leitcurve A_s und Erzeugende B gleichseitige Hyperbeln sind von den Halbaxen a, b wobei $a > b$ ist.

Der Mittelpunkt der Erzeugenden B liege in der Leitcurve A_s, die Ebenen der beiden Curven seien zu einander normal, und die imaginären Axen beider Curven parallel. Die Leitcurve A_s liege in der XY-Ebene des rechtwinkligen Coordinatensystems, in der X-Axe ihre imaginäre, in der Y-Axe ihre reelle Axe. Die Erzeugende bleibe stets mit der XZ-Ebene parallel, ihre imaginäre Axe mit der X-Axe.

Als Directrix wählen wir ein elliptisches Paraboloid, dessen Scheitel in dem Coordinatenanfang 0, dem Mittelpunkte der Fläche, und seine Axe in der positiven X-Axe gelegen sei. Seine in der XY-Ebene enthaltene Parabel P habe zum Parameter die Länge a, die in der XZ-Ebene enthaltene Parabel $\underset{\smile}{Q}$ die Länge b.

Alle Cylinder des Systems ${}^{\mu}\breve{\mathrm{A}}$, welche die Originalfläche längs den Hyperbeln ${}^{\mu}A$ berühren, besitzen zwei gemeinschaftliche Tangentialebenen, die Cnictropebenen ${}^{0}\mathrm{B}$ ${}^{\omega}\mathrm{B}$, welche zur XZ-Ebene parallel sind und von ihr um die Länge a abstehen. Diesen beiden Ebenen entsprechen zwei unendlich entfernte in der XY-Ebene enthaltene, Knotenpunkte ${}^{0}b'_{\infty}$ ${}^{\omega}b'_{\infty}$ der reciproken Fläche; sie sind die unendlich entfernten Punkte der Tangenten zur Parabel P in jenen Punkten, in welchen dieselbe von den beiden Cnictropebenen getroffen wird. Diese Tangenten liegen offenbar zur X-Axe symmetrisch und gegen einander normal. Aus dem Vorangeführten folgt, dass die den Cylinderflächen ${}^{\mu}\breve{\mathrm{A}}$ entsprechenden Curven gleichseitige Hyperbeln ${}^{\mu}A'$ sind, welche durch die Punkte ${}^{0}b'_{\infty}$ ${}^{\omega}b'_{\infty}$ hindurchgehen, folglich homothetisch sind und in zu der XY-Ebene parallelen Ebenen liegen. Beachten wir ferner, dass die sämmtlichen Cylinderflächen ${}^{\mu}\breve{\mathrm{A}}$ durch zwei unendlich entfernte Punkte, Knotenpunkte der Originalfläche, hindurchgehen. Diese Punkte sind offenbar identisch mit den vorerwähnten Punkten ${}^{0}b'_{\infty}$ ${}^{\omega}b'_{\infty}$, und entsprechen ihnen also reciprok die früher erwähnten Cnictropebenen ${}^{0}\mathrm{B}$ ${}^{\omega}\mathrm{B}$. Von diesen Ebenen werden die sämmtlichen Hyperbeln ${}^{\mu}A'$ berührt. Die Berührungspunkte sind offenbar reelle Scheitel dieser Hyperbeln, welche Curven, weil ${}^{0}\mathrm{B}$ und ${}^{\omega}\mathrm{B}$ von der XZ-Ebene um die Länge a abstehen, somit reelle Axen von der Länge $2a$ besitzen und infolge dessen nicht nur homothetische, sondern auch congruente Curven sind. Man findet leicht, dass sie congruent und homothetisch sind mit den Hyperbeln ${}^{\mu}A$. Ihre Mittelpunkte liegen in der XZ-Ebene. Suchen wir nun den geometrischen Ort derselben. Zu diesem Behufe beachten wir, dass eine jede Hyperbel ${}^{\mu}A'$ von der unendlich entfernten Ebene in den Punkten ${}^{0}b'_{\infty}$ ${}^{\omega}b'_{\infty}$ getroffen wird, und dass der Schnittpunkt der Tangenten in diesen Punkten ihren Mittelpunkt liefert.

Übertragen wir dieses reciprok auf die Originalfläche, so finden wir leicht Folgendes: Die reciproken Ebenen ${}^{0}\mathrm{B}$ ${}^{\omega}\mathrm{B}$ berühren eine jede der Cylinderflächen ${}^{\mu}\breve{\mathrm{A}}$ längs zweier parallelen Geraden. Die eine derselben ist eine Tangente des Cnictropkegelschnittes ${}^{0}B$, die andere des congruenten und homothetischen ${}^{\omega}B$. Die durch diese beiden Geraden bestimmte Ebene ist das reciproke Gebilde des Mittelpunktes der Hyperbel ${}^{\mu}A'$. Nun umhüllen aber diese Ebenen eine gerade Cylinderfläche, welche ${}^{0}B$ (oder ${}^{\omega}B$) zur Leitcurve hat und deren Erzeugende zur Y-Axe parallel sind. Die dieser Fläche reciproke Curve ist der gesuchte geometrische Ort der Mittelpunkte. Nun sieht man aber, dass diese Cylinderfläche die beiden Cnictropebenen ${}^{0}\mathrm{A}$ und ${}^{\omega}\mathrm{A}$ zu Tangentialebenen hat, welche von der XY-Ebene um die Länge b abstehen und die Parabel $\underset{\sim}{Q}$ in zwei Punkten treffen, deren Verbindungsgerade zur Z-Axe parallel ist. Folglich besitzt die reciproke Curve zwei unendlich entfernte Punkte, welche in den Tangenten der Parabel $\underset{\sim}{Q}$ in jenen zwei Punkten gelegen sind. Diese Tangenten haben die X-Axe zur Symmetrieaxe und sind zu einander normal. Hieraus folgt, dass die Curve eine gleichseitige Hyperbel B'_s ist. Den unendlich entfernten Geraden der Cylinderfläche entsprechen schliesslich zwei in der XZ-Ebene enthaltene, mit der X-Axe parallele und von ihr um die Länge b abstehende Gerade, offenbar Tangenten der gesuchten Hyperbel, welche in diesen Geraden ihre reellen Scheitel hat. Dieselben sind reciprok jenen Tangentialebenen der Kegelfläche, welche durch die Y-Axe, folglich durch den Scheitel der Directrix hindurchgehen, und liegen demnach in der Z-Axe des Coordinatensystems.

Aus dem Vorangeführten folgt, dass der gesuchte geomemetrische Ort der Mittelpunkte eine gleichseitige Hyperbel B'_s ist, deren reelle Axe die Länge $2b$ besitzt, in der Z-Axe liegt, und deren Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfange zusammenfällt. Man sieht, dass diese Hyperbel mit der Hyperbel B_s der Originalfläche identisch ist. Fassen wir nun alles über die aus der Originalfläche durch Reciprocität abgeleitete Fläche P' bereits

Gesagte zusammen, indem wir namentlich berücksichtigen, dass die Hyperbeln ${}^{\mu}A'$ mit den Hyperbeln ${}^{\mu}A$ der Originalfläche congruent und homothetisch sind, und dass ihre Mittelpunkte die mit der Hyperbel B_s identische Hyperbel B'_s ausfüllen, so gelangen wir zu dem nachfolgenden Resultate:

Die aus der hyperbel-hyperbolischen Rückungsfläche Typus c unter Anwendung der Polarreciprocität in Bezug auf das vorangegebene elliptische Paraboloid abgeleitete Fläche ist mit der Originalfläche identisch.

Diese Fläche ist folglich sich selbst reciprok.

6. Einem beliebigen Punkte ${}^{\mu}p$ dieser Fläche als Original entspricht eine bestimmte Tangentialebene derselben als reciprokes Gebilde.

Von dieser Ebene wird die Fläche in einem bestimmten Punkte ${}^{\nu}p$ berührt. Auf diese Weise kann einem jeden Punkte ${}^{\mu}p$ der Fläche ein bestimmter Punkt ${}^{\nu}p$ derselben zugeordnet werden. Jedem Kegelschnitte ${}^{\mu}A$ als Original entspricht eine die Fläche bekanntlich längs eines Kegelschnittes ${}^{\nu}A$ desselben Systems berührende Cylinderfläche; es bilden also alle den Punkten ${}^{\mu}p$ des Kegelschnittes ${}^{\mu}A$ nach Obigem entsprechenden Punkte ${}^{\nu}p$ den Kegelschnitt ${}^{\nu}A$, als Berührungspunkte der den Punkten ${}^{\mu}p$ reciprok entsprechenden Tangentialebenen.

Bekanntlich wird durch die Reciprocität die Doppelverhältnissgleichheit nicht gestört. Folglich gleicht auch das Doppelverhältniss von vier beliebigen Punkten ${}^{\mu}p$ des Kegelschnittes ${}^{\mu}A$ dem Doppelverhältnisse der vier die reciproke Cylinderfläche umhüllenden Tangentialebenen, von welchen die Rückungsfläche in den Punkten ${}^{\nu}p$ des Kegelschnittes ${}^{\nu}A$ berührt wird.

Nun gleicht aber das Doppelverhältniss der vier Tangentialebenen dem Doppelverhältnisse der vier Punkte, in welchen die vier Tracen derselben in der Ebene des Kegelschnittes ${}^{\nu}A$ (offenbar Tangenten desselben in den Punkten ${}^{\nu}p$) von irgend einer fünften Tangente geschnitten werden. Folglich gleicht das Doppelverhältniss der Punkte ${}^{\mu}p$ dem Doppelverhältnisse der Tangenten in den Punkten ${}^{\nu}p$ und weil bekanntlich das Doppelverhältniss von vier Tangenten eines Kegelschnittes dem Doppelverhältnisse ihrer vier Berührungspunkte gleicht, so finden wir: die Punkte ${}^{\mu}p$ und die ihnen entsprechenden ${}^{\nu}p$

bilden auf den respectiven Curven ${}^{\mu}A$ und ${}^{\nu}A$ als Trägern zwei projectivische Punktreihen.

Nennen wir nun ${}^{\mu}s$ den Mittelpunkt des Kegelschnittes ${}^{\mu}A$ und ${}^{\nu}s$ den Mittelpunkt des entsprechenden ${}^{\nu}A$. Weil nach dem Vorigen dem Kegelschnitte ${}^{\mu}A$ ein ganz bestimmter ${}^{\nu}A$ zugeordnet ist, so bilden die Mittelpunkte ${}^{\mu}s$ und ${}^{\nu}s$ auf B_s zwei conlocale projectivische Reihen, und es muss bekanntlich zweimal vorkommen, dass ${}^{\mu}s$ mit ${}^{\nu}s$ zusammenfällt. In jedem dieser Fälle wird auch ${}^{\mu}A$ mit ${}^{\nu}A$ zusammenfallen. Dann entspricht also jedem Punkte ${}^{\mu}p$ der Hyperbel ${}^{\mu}A \equiv {}^{\nu}A$ je ein Punkt ${}^{\nu}p$ derselben Curve, oder: die der Hyperbel reciprok entsprechende Cylinderfläche berührt die Rückungsfläche längs dieser Curve.

Die Hyperbel ${}^{\mu}A \equiv {}^{\nu}A$ ist folglich auch Träger zweier conlocalen projectivischen Reihen.

Diese Reihen besitzen aber zwei Doppelpunkte, also Punkte, in welchen der Originalpunkt ${}^{\mu}p$ mit seinem entsprechenden ${}^{\nu}p$ zusammenfällt. Die sich selbst reciproke Rückungsfläche besitzt folglich vier sich selbst entsprechende Punkte, d. i. solche Punkte, deren jeder zugleich Berührungspunkt der ihm reciprok entsprechenden Tangentialebene ist. Die vorherigen Untersuchungen kann man wiederholen, wenn man an Stelle der Hyperbel B_s die Hyperbel A_s substituirt. Man wird dann auf analoge Weise zu der Überzeugung gelangen, dass einer beliebigen Hyperbel ${}^{\mu}B$ eine vollkommen bestimmte Hyperbel ${}^{\nu}B$ entspricht, und dass es zweimal vorkommt, dass die Hyperbel ${}^{\mu}B$ mit ihrer entsprechenden ${}^{\nu}B$ zusammenfällt.

Demnach gibt es im Ganzen vier Hyperbeln (zwei von dem einen, zwei von dem anderen Systeme) deren Punkten als Originalen die Tangentialebenen der Fläche in anderen Punkten derselben Curve als reciproke entsprechen.

Auch eine jede der letztgenannten zwei Hyperbeln enthält zwei sich selbst entsprechende Punkte, doch ist nach dem Vorigen klar, dass dieselben mit den bereits besprochenen vier Punkten identisch sind. Eine jede Hyperbel des einen Systems der Rückungsfläche wird nämlich von einer jeden des anderen Systems in je einem Punkte getroffen. Dies findet auch bei jenen vier Hyperbeln statt und die so erhaltenen vier Schnittpunkte sind die vier sich selbst entsprechenden Punkte der Rückungsfläche. Beachten wir ferner, dass ein Punkt, durch welchen die ihm reciprok entsprechende Tangentialebene hindurchgeht, der Directrix angehören müsse und dass diese Ebene in ihm gleichzeitig Tangentialebene der Directrix ist, so finden wir, dass diese vier Punkte auch jene Punkte sind, in welchen die Rückungsfläche von der Directrix berührt wird. Die Rückungsfläche hat mit der Directrix offenbar eine Curve der achten Ordnung gemein und man sieht, dass die genannten vier Punkte vier reelle Doppelpunkte dieser Curve liefern.

Die Curve besitzt ausser diesen vier Doppelpunkten noch weitere vier Doppelpunkte, nämlich diejenigen, in welchen die Directrix von dem Doppelkegelschnitte der Rückungsfläche getroffen wird. Dieser Doppelkegelschnitt liegt in der YZ-Ebene, da aber die Directrix in dieser Ebene bloss ihren Scheitel hat, so sind diese vier Doppelpunkte imaginär.

Weil die XZ-Ebene sowohl für die eine als auch für die andere Fläche Normalsymmetrieebene ist, so wird die Curve in diese Ebene in einer Curve der vierten Ordnung projicirt, welche offenbar vier Doppelpunkte besitzt und folglich in zwei Kegelschnitte zerfällt.

Hieraus folgt, dass die Curve auf zwei mit der Y-Axe parallelen quadratischen Cylindern liegt.

Ähnliches gilt auch in Bezug auf die XZ-Ebene und es folgt hieraus, dass die Curve der achten Ordnung aus zwei Curven der vierten Ordnung zusammengesetzt ist, durch welche je zwei quadratische Cylinder hindurchgehen, deren einer zur Y-Axe, der andere zur Z-Axe parallel ist. Es sind folglich zwei Raumcurven der vierten Ordnung und ersten Art. Die längs diesen beiden Curven der Directrix umschriebene Developpable ist offenbar das reciproke Gebilde derselben. Sie ist folglich auch der Rückungsfläche umschrieben, besteht aus zwei Flächen der vierten Classe und achten Ordnung, deren jede vier Doppelkegelschnitte besitzt u. s. w.

Zu bemerken wäre nur noch, dass die erwähnten beiden Raumcurven bis auf ihre vier reellen Doppelpunkte imaginär sind.

Analoges gilt auch für die beiden reciproken Developpablen.