Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale bei zonaler Druckvertheilung

Max Margules.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. April 1892.)

Wenn man die Erdoberfläche ganz homogen und mit einer Luftschale von sehr geringer Höhe bedeckt denkt, so wäre die Schicht bei constantem Druck in relativer Ruhe Nimmt man an, dass eine schmale Zone niedrigern oder höhern Druck erhält und will man die in der Folge eintretende Bewegung und Druckänderung berechnen, so findet man, dass die Lösung von derjenigen eines allgemeinern Problems abhängt: In einer rotirenden sphäroidalen Luftschale von constanter Temperatur den Druck und die Geschwindigkeit für jede Zeit zu bestimmen, wenn sie zu irgend einer Zeit als zonale Functionen gegeben sind.

In einer analogen Untersuchung für die Luft in der ruhenden Kugelschale hat Lord Rayleigh gezeigt, dass im reibungslosen System die Bewegung sich in eine Reihe stehender Schwingungen auflöst. Die Ausdehnung der Rechnung auf den Fall einer der Geschwindigkeit proportionalen Reibung (man denke dabei immer an eine Luftschicht von sehr geringer Dicke) ist leicht zu bewirken. Wie immer die zonalen Anfangsbedingungen beschaffen seien, die Bewegung lässt sich aus erlöschenden stehenden Schwingungen und aus schwingungslos absterbenden Bewegungen zusammensetzen.

Bei der ruhenden Kugel kommt in unserem Falle nur die meridionale Geschwindigkeit in Betracht. Eine zonale Bewegung würde, wenn sie daneben bestände, die Druckvertheilung nicht ändern, da die Geschwindigkeiten so gering angenommen sind, dass die quadratischen Glieder aus den Bewegungsgleichungen entfallen.

Anders bei dem rotirenden Sphäroid. Wenngleich man auch hier die Quadrate der relativen Geschwindigkeiten gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt, muss man doch die Producte aus der Geschwindigkeit der Erde und der relativen Geschwindigkeit der Luft beibehalten, jene Glieder, welche die Ablenkung der Bewegungen durch die Erdrotation ausdrücken. Die zonale Componente der relativen Bewegung erlangt dadurch grossen Einfluss auf die Druckvertheilung.

Die wegen der Rotation hinzukommenden Glieder machen die Rechnung verwickelter, und es gäbe wohl kein Mittel, sie durchzuführen, wenn man nicht das von Laplace beim Ebbe- und Fluthproblem eingeführte Rechnungsverfahren als Vorbild hätte. Diese Methode erweist sich bei aërodynamischen Aufgaben solcher Art als sehr fruchtbar. Durch sie lassen sich Functionen finden, welche für Bewegungen auf dem rotirenden Sphäroid die gleiche Bedeutung haben, wie Kugelfunctionen für Bewegungen auf der ruhenden Kugel.

Im reibungslosen System einer rotirenden sphäroidalen Luftschale setzt sich jede aus zonalen Anfangsbedingungen abgeleitete Bewegung zusammen aus stehenden Schwingungen und aus stationären Bewegungen längs der Parallelkreise. Führt man Reibung ein, so hat man erlöschende Schwingungen und absterbende Bewegungen in spiralähnlichen Bahnen. Die letzteren verlaufen von den Orten höhern zu jenen niedrigern Druckes.

Bei der gebräuchlichen und nothwendigerweise sehr unvollständigen Behandlung meteorologischer Aufgaben werden nur solche Bewegungen beachtet, welche im Sinne des Druckgefälles geschehen. Für diese gilt die Buys-Ballot'sche Regel: Wendet man dem Wind den Rücken, so hat man auf der nördlichen Halbkugel das Gebiet niedrigen Druckes linker Hand, auf der südlichen rechter Hand. Diese Regel ist eine einfache Folge der Ablenkung der Bewegungen durch die Erdrotation, jedoch nur dann, wenn die in die Richtung des Druckgefälles fallende Geschwindigkeitscomponente das positive Vorzeichen hat. Wäre aber die Bewegung theilweise von Orten niedrigern Druckes zu Orten höhern Druckes gerichtet, so müsste man auch die Regel abändern.

Von vornherein ist es wahrscheinlich, dass Bewegungen gegen das Gefälle vorkommen, dass die durch Druckdifferenzen eingeleitete Bewegung nicht gleichzeitig mit dem Verschwinden des Druckgefälles aufhört, sondern durch das Beharrungsvermögen noch darüber hinaus in gleichem Sinne fortdauert, dadurch den Ort, welcher Anfangs niedrigen Druck hatte, zu einem solchen hohen Druckes macht und derart Schwingungen bewirkt. Diese aber könnten der genannten Regel nicht folgen.

In Wirklichkeit findet man das Buys-Ballot'sche Gesetz auf der Erde in der weitaus überwiegenden Zahl der Fälle bestätigt, und man hält es für so sicher begründet, dass man die seltenen Ausnahmen der Unvollständigkeit oder Unsicherheit der Beobachtungen zuschreibt.

Die Verhältnisse in einer Atmosphäre von beträchtlicher Höhe mögen gegenüber der abstracten Annahme einer sehr dünnen Luftschale die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens der Regel noch bedeutend steigern; doch werden auch dort Schwingungen nicht ganz ausgeschlossen sein.

Dass man trotzdem die Buys-Ballot'sche Regel fast immer bewährt findet, mag damit zusammenhängen, dass die Reibung in der Atmosphäre sehr gross anzunehmen ist.

Im letzten Abschnitt der folgenden Rechnungen wird gezeigt, dass wenn neben den »ausfüllenden Bewegungen« noch Schwingungen vorkommen, diese viel schneller erlöschen, so dass die schwingungslosen, der Regel folgenden Bewegungen sie bald ganz überdecken.

1. Stehende Schwingungen der Luft in einer ruhenden Kugelschale.

Anlässlich akustischer Untersuchungen hat Lord Rayleigh[1] die Bewegungen der Luft in einer dünnen Kugelschale berechnet. Wegen des Zusammenhanges mit den folgenden Auf-

[1] Die Theorie des Schalles (deutsche Ausgabe, Braunschweig 1880), Bd. 2, Cap. 18.

gaben muss ich hier die Rechnung, jedoch mit der Einschränkung auf zonale Anfangsbedingungen, kurz wiederholen.

Bewirkt man irgendwie, dass Druckunterschiede von Zone zu Zone entstehen, und überlässt dann die Luft sich selbst, so wird zunächst eine Bewegung in meridionaler Richtung erfolgen, im Sinne des Druckgefälles; die Bewegung wird aber in einem reibungslosen System fortdauern, wenn auch die Druckdifferenzen ausgeglichen sind, und sie wird ein Druckgefälle von umgekehrter Richtung erzeugen. Sie löst sich in eine Reihe stehender Schwingungen auf, wie immer die anfängliche zonale Druckvertheilung beschaffen sein mochte.

S Radius der Kugelschale. p_0 Druck im Ruhezustand bei der constanten (absoluten) Temperatur T und der Dichte μ_0. $p_0 = RT\mu_0$; R eine Constante, welche für trockene Luft den Werth 287 m^2/[Sec.^{2} Celsiusgrad] hat.

$p_0(1+\varepsilon)$ Druck der bewegten Luft, t die Zeit, ω der Polabstand, b die meridionale Geschwindigkeit (in der Richtung des wachsenden ω).

Unter der Annahme, dass man die Glieder, welche in Bezug auf die Geschwindigkeit vom zweiten Grade sind, vernachlässigen darf, erhält man die Bewegungsgleichungen [1]

$$-\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{\partial b}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{S\sin\omega}\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} = 0. \tag{1}$$

Diesen kann man durch die Formen

$$b = \varphi(\omega).\cos nt, \qquad \varepsilon = E(\omega)\sin nt, \qquad \varphi = \frac{RT}{nS}\,\frac{dE}{d\omega} \tag{2}$$

genügen, wonach nur die Gleichung

$$\frac{1}{\sin\omega}\,\frac{d}{d\omega}\left(\frac{dE}{d\omega}\sin\omega\right) + \frac{n^2S^2}{RT}E = 0 \tag{3}$$

zu erfüllen ist.

---

[1] Man vergleiche die Abhandlung »Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft«. Diese Sitzungsberichte, Bd. 99, II. a (1890), S. 204.

Lösungen derselben sind:

$$E_0 = 1 \qquad \text{mit} \quad n_0 = 0$$

$$E_1 = \cos\omega \qquad n_1 S = \sqrt{1.2.RT}$$

$$E_2 = \tfrac{3}{2}\left(\cos^2\omega - \tfrac{1}{3}\right) \qquad n_2 S = \sqrt{2.3.RT}$$

$$E_3 = \tfrac{5}{2}\left(\cos^3\omega - \tfrac{3}{5}\cos\omega\right) \qquad n_3 S = \sqrt{3.4.RT}$$

allgemein $E_j = P_j(\omega)$ mit $n_j = \sqrt{j(j+1)RT}$; wenn P_j die zonale Kugelflächenfunction von der Ordnung j bezeichnet.

E_0 gehört zum Ruhezustand, jedes der folgenden E zu einer stehenden Schwingung. $T_j = 2\pi/n_j$ ist die entsprechende Schwingungsdauer.

E_1 Die Druckextreme liegen zu einer gewissen Zeit an den Polen. Nach der Zeit $^1/_4 T_1$ ist der Druck auf der ganzen Kugel ausgeglichen; nach $^1/_2 T_1$ sind die Druckextreme umgekehrt u. s. f.

E_2: Die Knoten sind an den Polen und am Äquator, derart, dass beide Pole den höchsten Druck haben, wenn am Äquator der niedrigste herrscht. Die anderen E gehören zu Schwingungen mit vier, fünf und mehr Knoten.

Bei allen E mit geradem Index ist der Äquator eine Knotenlinie. Druck und Geschwindigkeit auf der südlichen Halbkugel sind das Spiegelbild derjenigen auf der nördlichen. Die E mit ungeradem Index gehören zu Bewegungen, welche über den Äquator hinweggehen, wo das b in einem Kreis südlicher Breite ebenso gross und gleich gerichtet ist mit dem b der gleichen nördlichen Breite, ε jedoch in beiden Kreisen gleiche Grösse und verschiedenes Vorzeichen hat.

$$\varepsilon = \Sigma C_j . E_j(\omega) . \sin(n_j t + \delta_j), \quad b = \Sigma C_j \varphi_j(\omega) . \cos(n_j t + \delta_j) \quad (4)$$

ist eine allgemeine Lösung der Gleichungen (1) mit zwei Reihen willkürlicher Constanten C_j, δ_j, welche man den Anfangsbedingungen von ε und b gemäss nach dem bekannten Verfahren bestimmt. Dadurch sind Druck und Geschwindigkeit für jede folgende Zeit gegeben. In dieser Rechnung und im folgenden ist vorausgesetzt, dass die Continuitätsgleichung überall erfüllt ist, dass also der Schale von aussen weder Luft zugeführt, noch entzogen wird.

2. Stehende Schwingungen und stationäre Bewegungen der Luft in einer rotirenden Sphäroidschale.

Die relativen Bewegungen der Luft in einer rotirenden Schale zu bestimmen, wenn der Anfangszustand durch zonale Functionen gegeben ist, wird wesentlich schwieriger sein, als die analoge Rechnung für die ruhende Schale. Wegen der Ablenkung der Bewegungen kommt die zonale Componente c der relativen Bewegung hinzu.

Bezeichnet ν die Rotationsgeschwindigkeit der Schale [Rotationsdauer ein Tag, $\nu = 2\pi/(\text{Tag})$] und ist für eine nach Osten gerichtete Rotation ν positiv angenommen, so wird auch c ostwärts als positiv gerechnet. Die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes bleiben im übrigen ungeändert.

Wenn das Sphäroid eine Gleichgewichtsfigur ist in Bezug auf Attraction und Centrifugalkraft und wenn es nur wenig von der Kugelgestalt abweicht, so gelten für die Bewegung der Luft in der Sphäroidschale die Gleichungen (bei zonalen Bedingungen):

$$\left.\begin{aligned} -\frac{RT}{S}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} - 2\nu \cos\omega\,.\,c \\ 0 &= \frac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\cos\omega\,.\,b \\ 0 &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{S.\sin\omega}\,\frac{\partial (b\sin\omega)}{\partial\omega} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Nach Elimination von ε und c bleibt

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + 4\nu^2\cos^2\omega\,.\,b - \frac{RT}{S^2}\,\frac{\partial}{\partial\omega}\,\frac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,\partial\omega} = 0. \tag{6}$$

Zu den einfachsten Fällen stehender Schwingungen gehören die Formen:

$$\left.\begin{aligned} b = \varphi(\omega).\cos nt,\ \ c = \psi(\omega).\sin nt,\ \ \varepsilon = E(\omega).\sin nt \\ \psi = -\frac{2\nu}{n}\cos\omega.\varphi,\quad E = -\frac{1}{nS}\cdot\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega.d\omega} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Statt der Gleichung (6) erhält man

$$\frac{d}{d\omega}\,\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\, d\omega} + (\varkappa p - \varkappa\cos^2\omega)\varphi = 0, \left[\varkappa = \frac{4\nu^2 S^2}{RT}, p = \frac{n^2}{4\nu^2}\right] \quad (8)$$

Setzt man $\varphi = \sin\omega\,\Sigma a_j \cos^j\omega$ in diese Gleichung ein, so ergeben sich Beziehungen nur zwischen den geraden a_j untereinander und ebenso nur zwischen den ungeraden a_j unabhängig von den anderen.

Wir nehmen zunächst

$$\varphi = \sin\omega(a_1\cos\omega + a_3\cos^3\omega + a_5\cos^5\omega + \ldots). \quad (9a)$$

Die Coëfficienten müssen folgendes System von Gleichungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} 2.3(a_3 - a_1) + \varkappa p a_1 = 0 \\ 4.5(a_5 - a_3) + \varkappa p a_3 - \varkappa a_1 = 0 \\ 6.7(a_7 - a_5) + \varkappa p a_5 - \varkappa a_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (10a)$$

(Daraus lassen sich auch die Lösungen für die ruhende Schale ableiten; für $\nu = 0$ wird $\varkappa = 0$; $\varkappa p = n^2S^2/RT$ bleibt von Null verschieden. Nimmt man $a_3, a_5 \ldots = 0$, so folgt: a_1 willkürlich, $nS = \sqrt{2.3RT}$. Lässt man a_1 und a_3 allein und setzt die übrigen a gleich Null, so folgt $nS = \sqrt{4.5RT}$ u. s. f. Mit jedem solchen Werth von n ist eine endliche Reihe der a verbunden.)

Für die rotirende Schale wird die Lösung immer in der Form einer unendlichen Reihe erscheinen. Ein ähnliches System von Gleichungen wie (10 a) hat Laplace in seiner Berechnung des Ebbe- und Fluthproblems behandelt. Doch ist in jenem Falle die Periode der Schwingungen von vornherein gegeben (da es erzwungene Schwingungen sind) und nur die Coëfficienten sind zu berechnen; während in unserem Falle offenbar ein Coëfficient z. B. a_1 unbestimmt bleibt, dagegen die Hauptaufgabe in der Berechnung des p, also der Schwingungsdauer für ein gegebenes

$\varkappa$ liegt. Immerhin gelingt die Lösung auf dem von Laplace eingeschlagenen Wege.

Alle Gleichungen des Systems (10a) mit Ausnahme der ersten haben die Form

$$(j+1)(j+2)(a_{j+2}-a_j)+\varkappa p a_j-\varkappa a_{j-2}=0,$$

woraus

$$\frac{a_j}{a_{j-2}}=\frac{-\varkappa}{(j+1)(j+2)-\varkappa p-(j+1)(j+2)\,.\,\frac{a_{j+2}}{a_j}}$$

Indem man nun für a_{j+2}/a_j einen analogen Bruch berechnet, diesen in die Gleichung einsetzt, ebenso mit a_{j+4}/a_{j+2} verfährt u. s. f. ergibt sich das Verhältniss zweier aufeinanderfolgenden Coëfficienten durch einen unendlichen Kettenbruch ausgedrückt. Zunächst also

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{-\varkappa}{4.5-\varkappa p+}\,\frac{4.5\varkappa}{6.7-\varkappa p+}\,\frac{6.7\varkappa}{8.9-\varkappa p+}\,.$$

Dies ist der Werth von a_3/a_1, berechnet aus der zweiten und den folgenden Gleichungen des Systems (10a) unter der Annahme, dass man mit wachsendem j endlich zu verschwindenden Werthen von a_{j+2}/a_j gelangt.

Nun gibt aber die erste der Gleichungen (10a)

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{2.3-\varkappa p}{2.3}$$

und aus der Vergleichung beider Werthe von a_3/a_1 folgt

$$0=2.3-\varkappa p+\frac{2.3\varkappa}{4.5-\varkappa p+}\,\frac{4.5\varkappa}{6.7-\varkappa p+}\,\frac{6.7\varkappa}{8.9-\varkappa p+} \tag{11a}$$

Die Wurzeln $\varkappa p$ dieser Gleichung zu gegebenen Werthen von $\varkappa$ zu suchen, ist jetzt die nächste Aufgabe. Man kann sie durch Versuche finden, man kann aber auch ein Näherungsverfahren angeben, welches stets zum Ziele führt. Dasselbe wird an späterer Stelle entwickelt.

$2\pi S = 4.10^7$ Meter, $(2\pi/\nu) = 24.60.60$ Secunden, $R = 287$ und $T = 273°$ angenommen, erhält man

$$\varkappa = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = 10 \cdot 94.$$

$\varkappa$ und p sind reine Zahlen.

Die erste Wurzel der Gleichung (11a) mit diesem Werth von $\varkappa$ ist $\varkappa p = 10 \cdot 25$. Also $p = 0 \cdot 9369$, $n = 2\nu\sqrt{p} = 1 \cdot 936 . \nu$. Man erhält

$$b = a_1 \cos nt \sin \omega \cos \omega \, [1 - 0 \cdot 71 \cos^2 \omega + 0 \cdot 20 \cos^4 \omega - \\ - 0 \cdot 03 \cos^6 \omega + \ldots]$$

$$c = -a_1 \frac{2\nu}{n} \sin nt \sin \omega . \cos^2 \omega [1 - 0 \cdot 71 \cos^2 \omega + \ldots]$$

$$\varepsilon = \frac{a_1}{nS} \sin nt [1 - 5 \cdot 12 \cos^2 \omega + 4 \cdot 55 \cos^4 \omega - 1 \cdot 64 \cos^6 \omega + \\ + 0 \cdot 32 \cos^8 \omega - 0 \cdot 05 \cos^{10} \omega + \ldots].$$

b und c sind stets gleich Null an den Polen und am Äquator. Im Allgemeinen ist b auf der südlichen Halbkugel entgegengesetzt gerichtet, wie auf der nördlichen, c gleichgerichtet, ε in gleichen Abständen zu beiden Seiten des Äquators gleich. Das Flächenintegral von ε über die Halbkugel erstreckt, verschwindet vermöge der letzten der Gleichungen (7); der Mittelwerth des Druckes ist zu jeder Zeit der gleiche wie der Druck im Zustand relativer Ruhe.

Es genügt, die Bewegungen auf der nördlichen Hemisphäre ($\omega = 0$ bis $\pi/2$) zu beschreiben, da diejenigen der südlichen ein Spiegelbild davon sind. $t = o$: Druck constant, zonale Geschwindigkeit Null, meridionale Geschwindigkeit positiv (südwärts). Danach sinkt der Druck am Pol und wächst am Äquator bis zur Zeit $t = \pi/2n$ die extremen Werthe eintreten. Inzwischen hat die meridionale Componente bis Null abgenommen, die zonale, westwärts gerichtet, ist zum grössten Werth angewachsen. Nun kehrt b um, es beginnt die Bewegung nach Norden, während c westwärts gerichtet bleibt, aber mit abnehmendem Werth. Zur Zeit $t = \pi/n$ ist wieder der Druck auf der Halbkugel ausgeglichen, der absolute Werth von b im Maximum,

$c = 0$. Jetzt beginnt sich ein Druckmaximum am Pol, ein Druckminimum am Äquator zu bilden, c hat die Richtung nach Osten, b nach Norden. $t = 3\pi/2n$. Die Druckdifferenz hat den grössten Werth erreicht. $b = 0$, c nach Osten.

Im letzten Viertel der Periode gleicht sich der Druck wieder aus, b nimmt zu, bis es den grössten positiven Werth erreicht, c nimmt bis Null ab. Nun ist der Anfangszustand wieder hergestellt und die Bewegung wiederholt sich in der gleichen Weise.

Die Richtung der zonalen Geschwindigkeit ist entgegengesetzt derjenigen, welche die Buys-Ballot'sche Regel verlangt. Auf der ganzen nördlichen Halbkugel herrscht Westwind, wenn das Druckminimum am Äquator liegt, und Ostwind, wenn der niedrigste Druck am Pol ist.

Die Schwingung, welche aus der ersten Wurzel von (11 a) abgeleitet wurde, hat für die rotirende Schale eine ähnliche Bedeutung wie die durch E_2 bezeichnete für die ruhende Schale. Knoten sind Pole und Äquator. Die Schwingungsdauer ist

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2\nu \,.\, \sqrt{p}}\,.$$

Da nun $2\pi/\nu$ ein Tag ist, so ist in unserem Falle $\mathrm{T} = 0 \cdot 5165$ Tage. Die zur Ausgleichung des grössten Druckunterschiedes zwischen Pol und Äquator nöthige Zeit $^1/_4\mathrm{T}$ beträgt im reibungslosen System nicht viel mehr als drei Stunden. (Auf der ruhenden Kugel im analogen Fall vier Stunden).

Eine zweite Wurzel der Gleichung (11 a) ist (wieder für $\varkappa = 10 \cdot 94$) $p = 2 \cdot 3195$, also $n = 1 \cdot 523 \,.\, 2\nu$, $\mathrm{T} = 0 \cdot 3283$ Tage. Die daraus entspringende Lösung correspondirt mit der durch E_4 bezeichneten für die ruhende Kugel. Zwischen den Polen und dem Äquator sind noch zwei Knoten in der Nähe der Werthe $\omega = \mathrm{arc}\ 50°$ und $\pi - \mathrm{arc}\ 50°$ derart, dass zugleich die Druckminima an den Polen und am Äquator, die Druckmaxima in den Breiten von 40° eintreten. Die Ausgleichung des Druckes erfolgt in diesem Falle binnen weniger als zwei Stunden, worauf nach gleicher Zeit sich die Extreme umkehren u. s. f.

Noch eine dritte Wurzel sei hier angeführt. Bei gleichem $\varkappa$ genügt auch $p = 4 \cdot 337$ der Gleichung (11 a). Daraus

$n = 2 \cdot 083 . 2\nu$, $T = 0 \cdot 2400$ Tage. Hier hat man beiderseits zwischen Äquator und Pol noch je zwei Knoten, auf der nördlichen Halbkugel beiläufig bei den Werthen $\omega = \text{arc } 35^\circ$ und arc 65° Zur Zeit der grössten Ausbildung der Druckdifferenzen herrscht in den aufeinanderfolgenden Knoten abwechselnd hoher und niedriger Druck.

Die folgende Tabelle enthält die Formeln für b, c, ε welche zu der ersten, zweiten und dritten geraden Lösung der Gleichung (11 a) gehören, und die Zahlenwerthe für φ, ψ, E wenn $a_1 = 1$ gesetzt wird, von zehn zu zehn Graden berechnet. Will man einen anderen Werth a_1 wählen, so hat man alle Coëfficienten also auch die φ, ψ, E damit zu multipliciren. Die Einheiten für die Geschwindigkeiten sind Meter, Secunde. E ist eine reine Zahl. Um den Überdruck in gebräuchlichem Maasse auszudrücken, hat man $p_0 E$ zu rechnen und den mittleren Druck p_0 in diesem Maass zu nehmen.

Die Zeichenwechsel von φ und ψ (II, III S. 12) fallen auf jene Stellen, wo E ein Maximum oder Minimum wird.

$$b = \varphi(\omega) . \cos nt, \quad c = \psi(\omega) \sin nt, \quad \varepsilon = E(\omega) . \sin nt$$

$$\varphi = \sin\omega \cos\omega \, [a_1 + a_3 \cos^2\omega + a_5 \cos^4\omega + \ldots], \quad \psi = -\frac{2\nu}{n} \varphi . \cos\omega$$

$$E = \frac{2\nu}{n} \cdot \frac{1}{2\nu S} [a_1 + 3(a_3 - a_1)\cos^2\omega + 5(a_5 - a_3)\cos^4\omega + \ldots]$$

$$\varkappa = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = 10 \cdot 94, \quad 2\nu S = 925 \cdot 8 \, \frac{m}{\text{sec.}}$$

									a_{15}
I $\frac{n}{2\nu} = 0 \cdot 9679$	1	−0·7082	0·2018	−0·0320	0·0041	−0·0003	—	—
II $\frac{n}{2\nu} = 1 \cdot 5230$	1	−3·2287	1·4153	−0·2812	0·0330	−0·0026	0·0001	—
III $\frac{n}{2\nu} = 2 \cdot 0826$	1	−6·9078	10·0277	−3·1003	0·4559	−0·0421	0·0027	−0·0001

		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
I	φ	0·00	0·08	0·16	0·25	0·32	0·36	0·36	0·30	0·17	0·00
	ψ	0·00	−0·08	−0·16	−0·22	−0·25	−0·24	−0·19	−0·10	−0·03	0·00
	$10^3 E$	−1·04	−1·04	−1·04	−0·99	−0·82	−0·50	−0·02	0·51	0·95	1·12

		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
II	φ	0·00	−0·18	−0·30	−0·32	−0·23	−0·06	0·12	0·21	0·16	0·00
	ψ	0·00	0·11	0·17	0·18	0·11	0·02	−0·04	−0·05	−0·02	0·00
	$10^3 E$.	1·79	1·34	0·82	0·24	−0·38	−0·72	−0·64	−0·13	0·45	0·71
III	φ	0·00	0·22	0·27	0·12	−0·09	−0·17	−0·06	0·10	0·14	0·00
	ψ	0·00	−0·10	−0·12	−0·05	0·03	0·05	0·02	−0·02	−0·01	0·00
	$10^3 E$.	−1·49	−1·10	−0·22	0·51	0·58	0·02	−0·49	−0·40	0·19	0·52

Um die imparen stehenden Schwingungen in der rotirenden Schale zu berechnen, setzen wir in die Gleichung (8)

$$\varphi = \sin\omega\,(a_0 + a_2\cos^2\omega + a_4\cos^4\omega + \;..). \tag{9 b}$$

Für die Coëfficienten ergeben sich die Relationen

$$\left.\begin{aligned} 1.2\,(a_2 - a_0) + \varkappa p a_0 \qquad &= 0 \\ 3.4\,(a_4 - a_2) + \varkappa p a_2 - \varkappa a_0 &= 0 \\ 5.7\,(a_6 - a_4) + \varkappa p a_4 - \varkappa a_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10 b}$$

Die weitere Rechnung ist ganz ähnlich derjenigen für die geraden Lösungen. Man hat dieselbe Gleichung für a_j/a_{j-2} wie zuvor, nur mit geradem j, und gelangt schliesslich zur Gleichung

$$0 = 1.2 - \varkappa p + \cfrac{1.2\varkappa}{3.4 - \varkappa p + \cfrac{3.4\varkappa}{5.6 - \varkappa p + .}} \tag{11 b}$$

woraus die Wurzeln p zu einem gegebenen Werthe von $\varkappa$ zu suchen sind.

Die drei ersten Wurzeln sind, bei $\varkappa = 10\cdot 94$

$$p = 0\cdot 3447,\ 1\cdot 567,\ 3\cdot 238,$$

die zugehörigen Werthe der Schwingungsdauer

$$T = 0\cdot 8516,\ 0\cdot 3994,\ 0\cdot 2779 \text{ Tage.}$$

Zu der ersten Lösung gehört eine Schwingung mit zwei Knoten, an den Polen, zur zweiten eine solche mit vier, zur dritten mit sechs Knoten.

Man kann unendlich viele pare und impare Lösungen finden und hat dann als eine allgemeinere Lösung der Gleichungen (5), die sich aus der Zusammensetzung aller ergibt

$$\left.\begin{aligned} b &= \Sigma C_j . \varphi_j(\omega) . \cos(n_j t + \delta_j) \\ c &= -\Sigma C_j . \frac{2\nu}{n_j} \varphi_j(\omega) . \cos\omega . \sin(n_j t + \delta_j) \\ \varepsilon &= -\Sigma C_j . \frac{1}{n_j S} \frac{d(\varphi_j . \sin\omega)}{\sin\omega . d\omega} \sin(n_j t_j + \delta_j) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Jedes φ_j ist eine particuläre Lösung der Gleichung (8). Die Constanten C_j und δ_j sind unbestimmt und können passend gewählt werden, um die Anfangsbedingungen zu erfüllen. Es gibt jedoch drei solche Bedingungen; für eine gegebene Zeit können b, c, ε als Functionen von ω postulirt sein. Zwei unendiche Reihen unbestimmter Constanten genügen nicht zur Erfüllung der drei Bedingungen. Die Lösung ist demnach noch nicht vollständig.

Den Bewegungsgleichungen (5) genügen aber auch die Annahmen

$$\left.\begin{aligned} & b = 0, \; c = \Psi(\omega), \text{ eine willkürliche Function von } \omega \\ & \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{2\nu S}{RT} \cos\omega . \Psi(\omega). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Fügt man diese Lösung derjenigen hinzu, welche sich aus stehenden Schwingungen zusammensetzt, so kann man für die Anfangswerthe von b, c, drei beliebige Functionen von ω annehmen und die Constanten C_j, δ_j sowie die Function Ψ passend bestimmen. Dadurch sind alle folgenden Bewegungszustände gegeben. Das Verfahren, nach welchem die Bestimmung der Constanten durchzuführen ist, wäre noch zu construiren nach dem Muster der Laplace'schen Darstellung einer willkürlichen Function durch eine Reihe von Kugelfunctionen.

Die letzte Lösung (13) stellt eine stationäre Bewegung dar, welche in den Parallelkreisen stattfindet und eine der Buys-Ballot'schen Regel entsprechende Druckvertheilung bedingt. Auf der nördlichen Halbkugel nimmt ε nach Süden hin zu, wenn c positiv ist (Westwind), auf der südlichen Halbkugel verhält es sich umgekehrt.

3. Reibung. Ruhende Kugelschale.

Eine sehr dünne ebene Luftschicht zwischen zwei parallelen Wänden mag sich mit einer für alle Theile gleichen Geschwindigkeit u geradlinig fortbewegen. Angenommen, der Druck sei constant, es wirken keine Kräfte auf die Schicht, ausser der Reibung und diese sei der Geschwindigkeit proportional, so ist die Bewegungsgleichung $du/dt+lu = 0$ und ihr Integral $u = \text{Const.}\, e^{-lt}$. Die Reibungsconstante l ist dadurch bestimmt, dass die Geschwindigkeit der geradlinigen Bewegung in der Zeit $1/l$ auf den Theil $1/e$ ihres Anfangswerthes sinkt.

Für keine, noch so dünne Luftschicht ist eine solche Annahme in Betreff der Reibung richtig, sondern sie wäre nur für die Grenzen der Schicht zulässig. Wir machen sie dennoch, nur um zu sehen, wie sich die gefundenen Lösungen modificiren, wenn man überhaupt Reibung in Betracht zieht.

Die Bewegungsgleichungen für die Luft in der ruhenden Schale sind nun, wenn wir mit c die zonale Geschwindigkeit nach Osten, mit λ die östliche Länge von einem bestimmten Meridian ab bezeichnen, unter Annahme einer der Geschwindigkeit proportionalen Reibung

$$\left.\begin{aligned} -\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{\partial b}{\partial t}+lb, \quad -\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,\partial\lambda} = \frac{\partial c}{\partial t}+lc \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{S\sin\omega}\left(\frac{\partial[b\sin\omega]}{\partial\omega}+\frac{\partial c}{\partial\lambda}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Man kann versuchen, diese Gleichungen zu erfüllen durch

$$\left.\begin{aligned} b = e^{-\gamma t}.\varphi(\omega,\lambda), \quad c = e^{-\gamma t}\psi(\omega,\lambda) \quad \varepsilon = e^{-\gamma t}.E(\omega,\lambda), \\ \varphi = -\frac{RT}{S(l-\gamma)}\cdot\frac{\partial E}{\partial\omega}, \quad \psi = -\frac{RT}{S(l-\gamma)}\frac{\partial E}{\sin\omega.\partial\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Zur Bestimmung von E folgt die Gleichung

$$\frac{1}{S\sin\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial E}{\partial\omega}\sin\omega\right)+\frac{1}{\sin^2\omega}\frac{\partial^2 E}{\partial\lambda^2}+\frac{\gamma(l-\gamma)S^2}{RT}E = 0. \tag{16}$$

Diese lässt wieder eine unendliche Zahl particulärer Integrale zu, aus denen man eine allgemeine Lösung zusammensetzen kann. Jedes einzelne Integral stellt eine erlöschende Bewegung dar, und zwar entweder eine kurzweg erlöschende, oder Schwingungen mit abnehmenden Amplituden, je nachdem γ reell oder complex wird. Setzt man

$$\gamma(l-\gamma)\frac{S^2}{RT}=j(j+1)$$

$j=1, 2, 3.$ so hat man in (16) wieder die Gleichung der Kugelflächenfunctionen und

$$\gamma=\frac{l}{2}\pm\sqrt{\frac{l^2}{4}-j(j+1)\frac{RT}{S^2}} \qquad (17)$$

Zu den durch die Formeln (15) dargestellten Bewegungen kommen noch hinzu:

$$b=e^{-lt}\Phi(\omega,\lambda),\quad c=e^{-lt}\Psi(\omega,\lambda),\quad \varepsilon=o \qquad (15b)$$

Φ und Ψ sind nur durch die Continuitätsgleichung verbunden; eine der Functionen ist willkürlich. Bei zonalen Bedingungen reducirt sich diese Bewegung auf eine in den Parallelkreisen verlaufende

$$b=o,\quad c=e^{-lt}\Psi(\omega).$$

Die übrigen Gleichungen sind hier ohne Einschränkung auf zonale Anfangsbedingungen abgeleitet. Sie sollen jedoch nur an einem Beispiel zonaler Druckvertheilung erläutert werden.

$$E=\text{Const.}\left(\frac{1}{3}-\cos^2\omega\right)$$

gehört zum Werthe $j=2$; Druckmaximum am Äquator, Minima an den Polen. Bei einer Kugel von der Grösse der Erde, bei trockener Luft von der Temperatur 273° muss l^{-1} kleiner sein als 4642 Secunden, damit die Ausfüllung der Minima ohne Schwingungen geschehe. Die Reibung müsste so gross sein, dass eine geradlinige Bewegung der eingangs beschriebenen Art binnen 1 Stunde 17 Minuten oder in noch kürzerer Zeit auf den Werth $1/e$ ihrer anfänglichen Geschwindigkeit herabsinkt. In diesem Falle sind die γ reell.

$$\gamma_1=\frac{l}{2}-\sqrt{\frac{l^2}{4}-\frac{6RT}{S^2}},\quad \gamma_2=\frac{l}{2}+\sqrt{\frac{l^2}{4}-\frac{6RT}{S^2}}$$

$$\varepsilon=(C_1e^{-\gamma_1 t}+C_2e^{-\gamma_2 t})\left(\frac{1}{3}-\cos^2\omega\right)$$

$$b = -\frac{RT}{S}\left(\frac{C_1}{l-\gamma_1}e^{-\gamma_1 t}+\frac{C_2}{l-\gamma_2}e^{-\gamma_2 t}\right) 2\sin\omega\cos\omega.$$

Für kleinere Werthe der Reibungsconstante wird γ complex,

$$\gamma = \alpha+\beta\sqrt{-1}$$

$$\alpha = \frac{l}{2},\quad \beta = \sqrt{\frac{6RT}{S^2}-\frac{l^2}{4}},\qquad \eta = \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

$$\varepsilon = C.e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\delta)\left(\frac{1}{3}-\cos^2\omega\right)$$

$$b = C.\sqrt{\frac{RT}{6}}.e^{-\alpha t}.\cos(\beta t+\delta-\eta).2\sin\omega\cos\omega.$$

C und δ sind willkürliche Constanten wie vorher C_1, C_2.

Die Grenzwerthe von η sind $\pi/2$, reibungslose Bewegung (Geschwindigkeit Null zur Zeit der grössten Druckdifferenz) und $\eta = 0$ für $^1/_2\, l.S = \sqrt{6RT}$. Dieser Grenzfall bildet den Übergang zu den ohne Schwingungen erlöschenden Bewegungen, welche wir mit dem Namen ausfüllende Bewegungen bezeichnen wollen.

4. Reibung. Ausfüllende Bewegungen in der rotirenden Schale.

Nimmt man die Reibung proportional der relativen Geschwindigkeit der Luft an, so sind die Bewegungsgleichungen für die rotirende Sphäroidschale, wenn man sich wieder auf zonale Anfangsbedingungen beschränkt,

$$\left.\begin{aligned} -\frac{RT}{S}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t}-2\nu\cos\omega.c+l.b \\ 0 &= \frac{\partial c}{\partial t}+2\nu\cos\omega.b+l.c \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{S}\frac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,\partial\omega} &= 0 \end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Berechnet man c aus der ersten, setzt den Werth in die zweite Gleichung ein, und eliminirt ε aus der zweiten und dritten, so folgt:

$$\frac{RT}{S^2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+l\right)\frac{\partial}{\partial\omega}\,\frac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,\partial\omega}-\frac{\partial^3 b}{\partial t^3}-2l\frac{\partial^2 b}{\partial t^2}-(l^2+4\nu^2\cos^2\omega)\frac{\partial b}{\partial t}=0. \quad (19)$$

Wird nun für die meridionale Geschwindigkeit die Form

$$b = e^{-\gamma t}\,.\,\varphi(\omega) \quad (20)$$

angenommen, γ constant, so hat man zur Bestimmung von φ die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\omega}\;\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\,d\omega}+\varkappa'p'\varphi+\varkappa'\cos^2\omega\,.\,\varphi=0\\&\left[\varkappa'=\frac{\gamma}{l-\gamma}\cdot\frac{4\nu^2S^2}{RT}=\frac{\gamma}{l-\gamma}\varkappa,\quad p'=\left(\frac{l-\gamma}{2\nu}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Aus den Gleichungen (18) ergibt sich

$$c=-\frac{2\nu}{l-\gamma}e^{-\gamma t}\cos\omega\,.\,\varphi(\omega),\quad \varepsilon=\frac{1}{\gamma S}e^{-\gamma t}\,.\,\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,d\omega} \quad (20)$$

Die Gleichung (21) ist ganz ähnlich der Gleichung (8), nur haben wir hier $-\varkappa'$ statt $\varkappa$, und $-p'$ statt p. Für den Fall $l=0$ hat man $\gamma=n\sqrt{-1}$ zu setzen, um auf die Gleichungen des reibungslosen Systems zurückzukommen. Ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt wird man es theils mit ausfüllenden Bewegungen (γ reell), theils mit erlöschenden Schwingungen zu thun haben.

Wir können uns auf die Berechnung der Fälle, in welchen der Äquator Knoten und Symmetrieebene ist, beschränken, weil die Rechnung für die imparen Lösungen ganz ähnlich ausfällt. Setzt man

$$\varphi=\sin\omega(a_1\cos\omega+a_3\cos^3\omega+\ldots), \quad (22)$$

so sind zufolge (21) zwischen den Constanten folgende Beziehungen:

$$2.3(a_3-a_1)+\varkappa'p'a_1=0,\quad 4.5(a_5-a_3)+\varkappa'p'a_3+\varkappa'a_1=0,\ \text{u. s. f.}$$

$$\frac{a_j}{a_{j-2}}=\frac{\varkappa'}{(j+1)(j+2)-\varkappa'p'-\cfrac{(j+1)(j+2)\varkappa'}{(j+3)(j+4)-\varkappa'p'-\ldots}}$$

Die weitere Entwickelung ist ganz wie diejenige im zweiten Abschnitt und die Auffindung der Lösungen hängt zunächst davon ab, dass man die Wurzeln der Gleichung

$$0 = 2.3 - \varkappa' p' - \cfrac{2.3\varkappa'}{4.5 - \varkappa' p' - \cfrac{4.5\varkappa'}{6.7 - \varkappa' p' - \ldots}} \tag{23}$$

kennt. Dort war $\varkappa$ gegeben und das zugehörige p zu suchen. Hier aber kommt sowohl in $\varkappa'$ wie in p' das gesuchte γ vor.

Zu irgend einem Werthe von $\varkappa'$ gehören wieder unendlich viele p', welche verschiedenen Bewegungstypen entsprechen, solchen, wo zwischen Äquator und Pol kein Knoten, oder ein oder mehrere Knoten liegen.

Wir wollen zunächst nur den ersten Typus ausführlicher behandeln, bei welchem zwischen Pol und Äquator kein Maximum oder Minimum des Druckes ist. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass für $\varkappa' = 0$ (ruhende Schale) die Wurzel $\varkappa' p' = 6$ angenommen wird, demnach für sehr kleine $\varkappa'$ solche $\varkappa' p'$, die nicht viel von 6 verschieden sind.

Zur Auffindung von Wurzeln der Gleichung (23) kann man folgenderweise verfahren. Statt des Kettenbruches nimmt man den ersten Näherungsbruch und bezeichnet mit $(\varkappa' p')_1$ die Wurzel der Gleichung

$$0 = 2.3 - \varkappa' p' - \frac{2.3\varkappa'}{4.5 - \varkappa' p'}$$

$$(\varkappa' p')_1 = 13 - \sqrt{49 + 6\varkappa'}$$

(Das Vorzeichen des letzten Gliedes ist nach der oben gegebenen Anweisung gewählt; das positive Vorzeichen würde für $\varkappa' = 0$ $\varkappa' p' = 20 = 4.5$ geben und dem zweiten Typus zukommen, wo zwischen Äquator und Pol noch ein Knoten ist.)

Je kleiner $\varkappa'$, desto geringer ist der Unterschied zwischen dem ersten Näherungswerth und dem wahren Werth der Wurzel. Eine zweite Annäherung findet man mit

$$k_1 = 4.5 - \cfrac{4.5.\varkappa'}{6.7 - (\varkappa' p')_1 - \cfrac{6.7\varkappa'}{8.9 - (\varkappa' p')_1 - \ldots}}$$

durch Auflösung der Gleichung

$$(2.3 - \varkappa' p')(k_1 - \varkappa' p') - 2.3\varkappa' = 0,$$

also

$$(\varkappa' p')_2 = \frac{k_1+6}{2} - \sqrt{\left(\frac{k_1-6}{2}\right)^2 + 6\varkappa'}$$

Dann bildet man k_2 ähnlich wie vordem k_1, und findet man die dritte Annäherung $(\varkappa' p')_3$, fährt so fort, bis der Unterschied zweier Näherungswerthe so klein wird, wie man ihn wünscht.

Wenn man zu mehreren Werthen von $\varkappa'$ die Wurzeln $\varkappa' p'$ gerechnet hat, kann man eine Curve zeichnen welche diese als Function von $\varkappa'$ darstellt und erhält so eine Übersicht aller in unserem Falle zulässigen $\varkappa'$. In der folgenden Tabelle sind die aus der Curve entnommenen Wurzeln eingeklammert.

	$\varkappa' p'$	für $\varkappa = 10\cdot94$			$\varkappa' p'$	für $\varkappa = 10\cdot94$	
		$\frac{l}{2\nu}$	$\frac{\gamma}{2\nu}$			$\frac{l}{2\nu}$	$\frac{\gamma}{2\nu}$
$-10\cdot94$	$10\cdot25$	—	—	$5\cdot0$	$3\cdot759$	$1\cdot26$	$0\cdot40$
0	$6\cdot000$	∞	$0\cdot00$	$6\cdot0$	$(3\cdot27)$	$1\cdot14$	$0\cdot41$
$0\cdot01$	$5\cdot996$	$24\cdot51$	$0\cdot02$	$7\cdot0$	$2\cdot774$	$1\cdot03$	$0\ 40$
$0\cdot1$	$5\cdot967$	$7\cdot80$	$0\ 07$	$8\cdot0$	$(2\cdot26)$	$0\cdot92$	$0\cdot39$
$0\cdot5$	$(5\cdot78)$	$3\cdot56$	$0\cdot16$	$9\cdot0$	$(1\cdot80)$	$0\cdot82$	$0\cdot37$
$1\cdot0$	$5\cdot565$	$2\ 58$	$0\cdot22$	$10\cdot0$	$(1\cdot30)$	$0\cdot69$	$0\ 33$
$2\cdot0$	$(5\cdot19)$	$1\cdot88$	$0\cdot29$	$11\cdot0$	$(0\cdot81)$	$0\cdot55$	$0\ 27$
$3\cdot0$	$(4\cdot63)$	$1\cdot58$	$0\cdot34$	$12\cdot0$	$0\cdot29$	$0\cdot33$	$0\cdot17$
$4\cdot0$	$(4\cdot19)$	$1\cdot40$	$0\cdot37$	$12\cdot54$	$0\cdot00$	$0\cdot00$	$0\ 00$

Nur solche $\varkappa'$, die zwischen 0 und $12\cdot54$ liegen, führen zu ausfüllenden Bewegungen der hier behandelten Art. Alle negativen $\varkappa'$ und jene die grösser sind als $12\cdot54$ führen zu negativen p', während nach (21) p' wesentlich positiv sein soll.

Da nun $\varkappa'$ und $\varkappa$ positiv sind, so müssen auch γ und $l-\gamma$ gleiches Vorzeichen haben. Man erhält zu jedem $\varkappa'$ je einen Werth von l und γ

$$\frac{\gamma}{2\nu} = \frac{\varkappa'}{\varkappa}\sqrt{p'}, \quad \frac{l}{2\nu} = \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}+1\right)\sqrt{p'}$$

Aus den Gleichungen (18) und (20) folgt

$$-\frac{RT}{S}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{(l-\gamma)^2+4\nu^2\cos^2\omega}{l-\gamma} b.$$

$l-\gamma$ ist stets positiv, die meridionale Geschwindigkeit hat die Richtung des Druckgefälles. Ferner

$$\frac{c}{b} = -\frac{2\nu}{l-\gamma}\cos\omega = \tan\xi. \tag{24}$$

ξ ist der Winkel, welchen die Richtung der Bewegung mit dem Meridian bildet. Wenn b negativ, die meridionale Geschwindigkeit nach Norden gerichtet ist, also auch der niedrige Druck im Norden liegt, ist c positiv, d. h. nach Osten gerichtet auf der nördlichen Halbkugel, umgekehrt auf der südlichen. Alle ausfüllenden Bewegungen stimmen mit der Buys-Ballot'schen Regel überein.

$\tan\xi$ ist dem Sinus der Breite proportional, der Differenz $l-\gamma$ umgekehrt proportional. Je kleiner die Reibung desto kleiner wird auch diese Differenz, desto mehr nähert sich die Bewegungsrichtung den Parallelkreisen.

Im Grenzfalle $l = 0$ geht die Bewegung in eine stationäre über, welche in den Parallelkreisen verläuft und in den Gleichungen (13) für das reibungslose System mit inbegriffen ist.

Von den Werthen γ hängt die Zeit ab, binnen welcher die Druckdifferenzen auf einen bestimmten Bruchtheil des Anfangswerthes sinken. In unserem Falle und in allen anderen Fällen ausfüllender Bewegungen gehören sehr kleine γ sowohl zu sehr grossen, wie zu sehr kleinen Werthen der Reibungsconstante. Bei grosser Reibung nimmt die Druckdifferenz langsam ab wegen der Langsamkeit der Bewegung, bei kleiner Reibung desswegen, weil die Bewegungsrichtung nahezu senkrecht zum Druckgefälle ist.

Dabei ist zu beachten, dass es sich hier um particuläre Integrale handelt, welche für jeden Werth der Reibungsconstante eine bestimmte Druckvertheilung und ein bestimmtes Verhältniss der Geschwindigkeitscomponenten erfordern. Die allgemeine Lösung für beliebige zonale Anfangsbedingungen setzt sich aus mehreren Integralen dieser Art zusammen und aus denen, welche Schwingungen mit abnehmenden Amplituden darstellen.

Die Druckvertheilung, welche stattfinden muss, wenn eine einfache Bewegung gemäss den Gleichungen (20) eintreten soll, ist dem Typus der Kugelfunctionen, also in dem speciellen

Falle der Function Const. $(1-3\cos^2\omega)$ desto näher, je grösser die Reibung angenommen wird. Für kleine l ist das Druckgefälle in der Nähe des Äquators geringer, am Pol viel grösser als nach jener Function. Folgende zwei Beispiele, welche für die Werthe

$$2\pi S = 4\cdot 10^7, \qquad \varkappa = 10\cdot 94,$$

gerechnet sind, $[a_1 = -1]$, mögen dies erläutern. Man sieht daraus auch, wie die zonale Componente bei geringer Reibung überwiegt.

$$1)\quad \varkappa' = 1, \quad \varkappa' p' = 5\cdot 565, \quad \frac{l}{2\nu} = 2\cdot 575, \quad \frac{\gamma}{2\nu} = 0\cdot 216,$$

$$b = a_1 e^{-\gamma t}.\sin\omega\cos\omega(1+0\cdot 072\cos^2\omega+0\cdot 002\cos^4\omega+\ldots),$$

$$c = -\frac{l-\gamma}{2\nu}\cos\omega . b$$

$$\varepsilon = -\frac{a_1 e^{-\gamma t}}{\gamma . S} . (1-2\cdot 784\cos^2\omega-0\cdot 350\cos^4\omega-0\cdot 014\cos^6\omega\ldots)$$

ω	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$b.e^{\gamma t}$	0	−0·267	−0·457	−0·518	−0·441	−0·252	0
$c.e^{\gamma t}$	0	0·109	0·168	0·155	0·093	0·028	0
$10^3\varepsilon.e^{\gamma t}$ ...	−10·76	−9·54	−6·47	−2·41	1·41	4·07	5·01

$$2)\quad \varkappa' = 12, \; \varkappa' p' = 0\cdot 29, \quad \frac{l}{2\nu} = 0\cdot 326, \; \frac{\gamma}{2\nu} = 0\cdot 171,$$

$$b = a_1 e^{-\gamma t}.\sin\omega.\cos\omega(1+0\cdot 953\cos^2\omega+0\cdot 339\cos^4\omega$$
$$+0\cdot 064\cos^6\omega+0\cdot 008\cos^8\omega)$$

$$\varepsilon = -\frac{a_1 e^{-\gamma t}}{\gamma S}(1-0\cdot 142\cos^2\omega-3\cdot 069\cos^4\omega-1\cdot 922\cos^6\omega$$
$$-0\cdot 511\cos^8\omega-0\cdot 077\cos^{10}\omega.\;.)$$

ω	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$b.e^{\gamma t}$	0	−0·560	−0·838	−0·785	−0·546	−0·267	0
$c.e^{\gamma t}$	0	3·480	4·662	3·566	1·754	0·443	0
$10^3\varepsilon.e^{\gamma t}$ ...	−29·9	−24·1	−11·6	−0·7	4·7	6·2	6·3

Eine ähnliche Tabelle wie für den ersten Typus der paren Lösungen S. 615 gebe ich noch für den ersten Typus der imparen (kein Knoten zwischen den Polen); d. i. die erste Wurzelreihe der Gleichung

$$0 = 1.2 - \varkappa' p' - \frac{1.2\varkappa'}{3.4 - \varkappa' p' - \frac{3.4\varkappa'}{5.6 - \varkappa' p' - \dots}} \tag{23 b}$$

mit den zugehörigen Werthen von l und γ. Die übrigen Entwicklungen für die aus der Annahme

$$\varphi = \sin\omega(a_0 + a_2 \cos^2\omega + \quad .)$$

abgeleiteten imparen Integrale brauchen nicht wiederholt zu werden.

	$\varkappa' p'$	für $\varkappa = 10 \cdot 94$ $\frac{l}{2\nu}$	für $\varkappa = 10 \cdot 94$ $\frac{\gamma}{2\nu}$		$\varkappa' p'$	für $\varkappa = 10 \cdot 94$ $\frac{l}{2\nu}$	für $\varkappa = 10 \cdot 94$ $\frac{\gamma}{2\nu}$
—10·94	3·771	—	—	3·0	1·355	0·86	0·18
0	2·000	∞	0	4·0	1·118	0·72	0·19
0·01	1·998	14·14	0·01	5·0	0·870	0·61	0·19
0·1	1·980	4·49	0·04	6·0	0·607	0·49	0·17
0·5	1·899	2·04	0·09	7·0	0·330	0·36	0·14
1·0	1·795	1·46	0·12	8·128	0·000	0·00	0·00
2·0	1·580	1·05	0·16				

5. Reibung. Erlöschende Schwingungen in der rotirenden Schale.

Man kann auch versuchen, die Bewegungsgleichungen (18) durch Annahme folgender Formen zu erfüllen (α und β Constante)

$$\left.\begin{aligned} b &= e^{-\alpha t}[\cos\beta t . \varphi_1(\omega) + \sin\beta t . \varphi_2(\omega)] \\ c &= e^{-\alpha t}[\cos\beta t . \psi_1(\omega) + \sin\beta t . \psi_2(\omega)] \\ \varepsilon &= e^{-\alpha t}[\cos\beta t . E_1(\omega) + \sin\beta t . E_2(\omega)] \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

und erhält dann, da die Glieder mit $\cos\beta t$ und mit $\sin\beta t$ die Gleichungen gesondert erfüllen müssen, sechs Relationen, aus denen man ψ_1, ψ_2, und E_1, E_2 eliminirt.

$$[(l-\alpha)^2+\beta^2]\psi_1 = -2\nu\cos\omega[(l-\alpha)\varphi_1-\beta\varphi_2]$$
$$[(l-\alpha)^2+\beta^2]\psi_2 = -2\nu\cos\omega[\beta\varphi_1+(l-\alpha)\varphi_2]$$

$$-\frac{RT}{S}\frac{dE_1}{d\omega} = (l-\alpha)\varphi_1+\beta\varphi_2+\frac{4\nu^2\cos^2\omega}{(l-\alpha)^2+\beta^2}[(l-\alpha)\varphi_1-\beta\varphi_2]$$
$$-\frac{RT}{S}\frac{dE_2}{d\omega} = -\beta\varphi_1+(l-\alpha)\varphi_2+\frac{4\nu^2\cos^2\omega}{(l-\alpha)^2+\beta^2}[\beta\varphi_1+(l-\alpha)\varphi_2].$$

Es bleiben dann noch die simultanen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\frac{d(\varphi_1\sin\omega)}{\sin\omega d\omega}+(M+P\cos^2\omega)\varphi_1+(N-Q\cos^2\omega)\varphi_2=0\\ \frac{d}{d\omega}\frac{d(\varphi_2\sin\omega)}{\sin\omega d\omega}+(M+P\cos^2\omega)\varphi_2-(N-Q\cos^2\omega)\varphi_1=0\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\left.\begin{aligned}M=\frac{\alpha l-\alpha^2+\beta^2}{4\nu^2}\varkappa,\quad P=\frac{\alpha l-\alpha^2-\beta^2}{(l-\alpha)^2+\beta^2}.\varkappa\\ N=\frac{2\alpha\beta-l\beta}{4\nu^2}\varkappa,\quad Q=\frac{l\beta}{(l-\alpha)^2+\beta^2}.\varkappa\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

Die Gleichungen für φ_1 und φ_2 wären sehr schwer zu behandeln, wenn man nicht zu dem Auskunftsmittel greifen könnte, in den Entwicklungen des vorhergehenden Abschnittes γ complex anzunehmen.

Dann müssen auch $\varkappa'$ und p', sowie die Coëfficienten der Reihe

$$\varphi = \sin\omega(a_1\cos\omega+a_3\cos^3\omega+\quad)\quad(22)$$

complex sein.

$$\gamma=\alpha+\beta i,\quad (i=\sqrt{-1})$$

gesetzt, erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{\gamma}{l-\gamma}\varkappa=\varkappa'=P+iQ=U.e^{ui}\\ \gamma(l-\gamma).\frac{\varkappa}{4\nu^2}=\varkappa'p'=M-iN=V.e^{vi}\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

wo M, N, P, Q die in (27) angegebenen Werthe haben.

Die Rechnung gestaltet sich nun folgenderweise: Zu einem willkürlich gewählten $\varkappa'$ sucht man mittels der vorhin entwickelten Näherungsmethode das zugehörige $\varkappa' p'$, welches der Gleichung (23) genügt. Dann hat man die vier Grössen U, V, u, v und damit auch $\varkappa, l, \alpha, \beta$. Aus (28) folgt

$$\frac{\varkappa}{2\nu}(\alpha+\beta i) = \sqrt{UV}.\left(\cos\frac{u+v}{2}+i\sin\frac{u+v}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2\nu}(l-\alpha-\beta i) = \sqrt{\frac{V}{U}}\left(\cos\frac{u-v}{2}-i\sin\frac{u-v}{2}\right);$$

ferner:

$$\left.\begin{array}{ll} \varkappa = U.\dfrac{\sin\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}}, & \dfrac{1}{2\nu}\alpha = \sqrt{\dfrac{V}{U}}.\sin\dfrac{u-v}{2}.\cot\dfrac{u+v}{2} \\ \dfrac{1}{2\nu}l = \sqrt{\dfrac{V}{U}}\cdot\dfrac{\sin u}{\sin\frac{u+v}{2}}, & \dfrac{1}{2\nu}\beta = \sqrt{\dfrac{V}{U}}\,\sin\dfrac{u-v}{2} \end{array}\right\} \quad (29)$$

Nun hat man eine Lösung, aber eine solche, die zu einem speciellen Werthpaar $\varkappa$, l gehört. Die Rechnung muss für eine grössere Zahl beliebig angenommener $\varkappa'$ ausgeführt werden, damit man eine Übersicht jener $\varkappa'$ gewinne, welche zu dem gegebenen Werth von $\varkappa$ und zu positiven l führen.

Die Verhältnisse der aufeinanderfolgenden Coëfficienten a_j der Gleichung (22) findet man, wie zuvor, mittels der Kettenbruchrechnung. Das erste a [a_1 bei den paren, a_0 bei den imparen Lösungen] bleibt unbestimmt. Da es im Allgemeinen als complexe Grösse gewählt werden kann, so hat man im particulären Integral zwei unbestimmte Constante. Setzt man

$$a_j = A_j + B_j i,$$

dann zerfällt das System der Bestimmungsgleichungen S. 613 in zwei Theile:

$$\begin{array}{l} 2.3(A_3-A_1)+MA_1+NB_1 = 0 \\ 4.5(A_5-A_3)+MA_3+NB_3+PA_1-QB_1 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2.3(B_3-B_1)+MB_1-NA_1 = 0 \\ 4.5(B_5-B_3)+MB_3-NA_3+PB_1+QA_1 = 0 \end{array}$$

Schreibt man noch zur Abkürzung

$$A = \sin\omega\,\Sigma A_j \cos^j\omega, \qquad B = \sin\omega\,\Sigma B_j \cos^j\omega$$

$$A' = \frac{d(A\sin\omega)}{\sin\omega\, d\omega}, \qquad B' = \frac{d(B\sin\omega)}{\sin\omega\, d\omega}$$

so hat man bei complexem γ statt der Gleichungen (20) die folgenden als particuläre Lösung des Systems (18):

$$\left.\begin{aligned}
b &= e^{-\alpha t}[\cos\beta t A + \sin\beta t B + i(\cos\beta t B - \sin\beta t A)]\\
c &= -\frac{2\nu\cos\omega\,.\,e^{-\alpha t}}{(l-\alpha)^2+\beta^2}\left[\begin{matrix}\cos\beta t\{(l-\alpha)A-\beta B\}\\ +\sin\beta t\{\beta A+(l-\alpha)B\}\end{matrix} + i\begin{pmatrix}\cos\beta t\{\beta A+(l-\alpha)B\}\\ -\sin\beta t\{(l-\alpha)A-\beta B\}\end{pmatrix}\right]\\
\varepsilon &= \frac{e^{-\alpha t}}{S(\alpha^2+\beta^2)}\left[\begin{matrix}\cos\beta t\{\alpha A'+\beta B'\}\\ +\sin\beta t\{-\beta A'+\alpha B'\}\end{matrix} + i\begin{pmatrix}\cos\beta t\{-\beta A'+\alpha B'\}\\ -\sin\beta t\{\alpha A'+\beta B'\}\end{pmatrix}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Der reelle Theil von b, c, ε stellt für sich allein eine Lösung der Gleichungen (18) dar, ebenso die Factoren von i im andern Theil. Doch ist die zweite Lösung nicht neu, sondern sie geht aus der ersten hervor, wenn man $\cos\beta t$ gegen $-\sin\beta t$ und $\sin\beta t$ gegen $\cos\beta t$ vertauscht, oder wenn man statt βt setzt $\beta t+\pi/2$. A und B sind mit φ_1 beziehungsweise φ_2 der Gleichungen (26) identisch.

Es sollen nun die weitläufigen Rechnungen, welche das Problem erlöschender Schwingungen in einer rotirenden Schale veranlasst, an zwei Beispielen erläutert werden. Wir wählen hiefür wieder den ersten Typus der paren Lösungen, wo die Knoten nur am Äquator und an den Polen liegen, schreiben, um die Coëfficienten leichter zu bezeichnen:

$$\begin{aligned}
b &= e^{-\alpha t}\sin\omega\,.\cos\omega\,\{\cos\beta t(A_1+A_3\cos^2\omega+\ldots)\\
&\qquad +\sin\beta t(B_1+B_2\cos^2\omega+\ldots)\}\\
c &= -\frac{4\nu^2 e^{-\alpha t}}{(l-\alpha)^2+\beta^2}\,.\sin\omega\,.\cos^2\omega\,\{\cos\beta t(F_1+F_3\cos^2\omega+\ldots)\\
&\qquad +\sin\beta t(G_1+G_3\cos^2\omega+\ldots)\}\\
\varepsilon &= \frac{4\nu^2}{\alpha^2+\beta^2}\cdot\frac{e^{-\alpha t}}{2\nu S}\,.\,\{\cos\beta t(J_1+J_3\cos^2\omega+\ldots)\\
&\qquad +\sin\beta t(K_1+K_3\cos^2\omega+\ldots)\}
\end{aligned}$$

Die Werthe von $\varkappa$ in den zwei Beispielen weichen von dem vorher gewählten Werthe 10·94 nur ganz unbedeutend ab.

Erstes Beispiel: Zu $\varkappa' = 11 . e^{170° i}$ gehört als erste Wurzel der Gleichung (23) $\varkappa' p' = 10·252 . e^{-4° 13' i}$; damit erhält man aus (29)

$$\varkappa = 10·93, \quad \frac{1}{2\nu} l = 0·169, \quad \frac{1}{2\nu} \alpha = 0·120, \quad \frac{1}{2\nu} \beta = 0·964$$

ferner

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 1 \text{ (willkürlich)}, & A_1 = 1, & B_1 = 0 \\
a_3 = -0·7127\, e^{-9° 2' i}, & A_3 = -0·704, & B_3 = 0·112 \\
a_5 = 0·2043\, e^{-18° 23' i}, & A_5 = 0·194, & B_5 = -0·064 \\
a_7 = -0·0326\, e^{-27° 54' i}, & A_7 = -0·029, & B_7 = 0·015 \\
a_9 = 0·0034\, e^{-37° 33' i}, & A_9 = 0·003, & B_9 = -0·002
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
F_1 = 0·049 & G_1 = 0·964 & J_1 = 0·120 & K_1 = -0·964 \\
F_3 = -0·142 & G_3 = -0·673 & J_3 = -0·290 & K_3 = 4·968 \\
F_5 = 0·072 & G_5 = 0·184 & J_5 = -0·422 & K_5 = -4·333 \\
F_7 = -0·016 & G_7 = -0·027 & J_7 = 0·351 & K_7 = 1·569 \\
F_9 = 0·002 & G_9 = 0·003 & J_9 = -0·116 & K_9 = -0·292
\end{array}$$

Berechnet man noch b, c, ε für Polabstände von je 15°, so erhält man:

ω	$e^{\alpha t} . b$	$e^{\alpha t} . c$	$1000 . e^{\alpha t} . \varepsilon$
0°	0	0	1·17 sin (βt — 20°4)
15	0·12 cos (βt — 6°7)	—0·12 sin (βt — 4°1)	1·15...... — 18·6
30	0·25...... — 5·4	—0·19...... — 2·3	1·05...... — 12·5
45	0·35...... — 3·4	—0·21...... — 0·6	0·72...... — 8·2
60	0·36...... — 1·7	—0·16...... + 1·6	0·05...... + 42·1
75	0·24...... — 0·4	—0·06...... + 2·4	0·75...... + 171·3
90	0	0	1·11...... + 172·9

Bei einer analogen Bewegung im reibungslosen System erreicht b das Maximum in allen Breiten zu gleicher Zeit; zu derselben Zeit sind c und ε überall Null; nach einer Viertelperiode ist überall $b = 0$, zugleich haben c und ε die extremen Werthe erreicht. Die Druckamplituden nehmen vom Pol bis $\omega = 60°$ ab, von da bis zum Äquator wieder zu, und da wo sie Null sind, liegt die Grenze der Gebiete mit entgegengesetzten Druckphasen.

Durch die Annahme der Reibung ändern sich die Bewegungsumstände (von der durch den Factor $e^{-\alpha t}$ angezeigten Änderung abgesehen): Das Maximum von b tritt nicht in allen Breiten gleichzeitig ein, sondern am Pol später als am Äquator; es fällt auch in jeder Breite nicht mit dem Nullwerth von c zeitlich zusammen. Statt der Gebiete mit entgegengesetzten Druckphasen hat man hier eine continuirliche Änderung der Phase vom Pol zum Äquator; in unserem Beispiel, wo die Reibung noch gering angenommen ist, fällt die Änderung in der Nähe des Pols sowohl, wie in der Nähe des Äquators gering aus, dagegen sehr rasch in einem Gürtel bei 60°, wo die Druckamplituden gering sind.

Das β des ersten Beispiels unterscheidet sich wenig von dem n des reibungslosen Systems (S. 605). Die Dauer einer ganzen Schwingung beträgt 0·519 Tage. Die Geschwindigkeiten und Druckdifferenzen sind nach Verlauf dieser Zeit auf weniger als die Hälfte (0·457) des anfänglichen Werthes gesunken.

Zweites Beispiel: Mit $\varkappa' = 20.e^{102° i}$ und dem zugehörigen $\varkappa' p' = 11 \cdot 893\, e^{-39° 33' i}$ erhält man bei nahezu gleichem $\varkappa$ eine Lösung, welche für einen neunmal grösseren Werth der Reibungsconstante gilt.

$$\varkappa = 10\cdot 98, \quad \frac{1}{2\nu} l = 1\cdot 455, \quad \frac{1}{2\nu}\alpha = 1\cdot 201, \quad \frac{1}{2\nu}\beta = 0\cdot 728$$

$a_1 = 1$ (willkürlich)	$A_1 = 1$	$B_1 = 0$
$a_3 = 1\cdot 368\, e^{112° 43' i}$	$A_3 = -0\cdot 528$	$B_3 = 1\cdot 262$
$a_5 = 0\cdot 744\, e^{221° 42' i}$	$A_5 = -0\cdot 556$	$B_5 = -0\cdot 495$
$a_7 = 0\cdot 223\, e^{328° 34' i}$	$A_7 = 0\cdot 190$	$B_7 = -0\cdot 116$
$a_9 = 0\cdot 043\, e^{74° 9' i}$	$A_9 = 0\cdot 012$	$B_9 = 0\cdot 004$
$a_{11} = 0\cdot 006\, e^{178° 58' i}$	$A_{11} = -0\cdot 006$	$B_{11} = 0\cdot 000$

$F_1 = 0\cdot254$	$G_1 = 0\cdot728$	$J_1 = -1\cdot20$	$K_1 = -0\cdot73$
$F_3 = -1\cdot053$	$G_3 = -0\cdot064$	$J_3 = -2\cdot75$	$K_3 = 7\cdot88$
$F_5 = 0\cdot219$	$G_5 = -0\cdot530$	$J_5 = -6\cdot56$	$K_5 = -10\cdot45$
$F_7 = 0\cdot133$	$G_7 = 0\cdot109$	$J_7 = 8\cdot20$	$K_7 = -0\cdot62$
$F_9 = 0\cdot027$	$G_9 = 0\cdot019$	$J_9 = -3\cdot26$	$K_9 = 2\cdot55$
$F_{11} = -0\cdot001$	$G_{11} = -0\cdot004$	$J_{11} = -0\cdot26$	$K_{11} = 0\cdot08$

Die Werthe von b, c, ε wieder für Poldistanzen von je 15° berechnet, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

ω	$e^{\alpha t}.b$	$e^{\alpha t}.c$	$1000\, e^{\alpha t}.\varepsilon$
0°	0	0	$2\cdot01 \sin(\beta t - 110^\circ 5)$
15	$0\cdot17 \cos(\beta t - 74^\circ 5)$	$-0\cdot22 \sin(\beta t - 56^\circ 9)$	$1\cdot77 \ldots\ldots -107\cdot7$
30	$0\cdot32 \ldots\ldots -57\cdot6$	$-0\cdot36 \ldots\ldots -40\cdot2$	$1\cdot20 \ldots\ \ - 93\cdot3$
45	$0\cdot40 \ldots\ \ldots -38\cdot4$	$-0\cdot46 \ldots\ldots -19\cdot3$	$0\cdot85 \ldots\ \ldots - 63\cdot9$
60	$0\cdot38 \ldots\ldots -18\cdot7$	$-0\cdot25 \ldots\ \ldots + 0\cdot5$	$0\cdot33 \ldots\ldots + 10\cdot9$
75	$0\cdot24 \ldots\ldots - 4\cdot9$	$-0\cdot08 \ldots\ldots +14\cdot3$	$0\cdot56 \ldots\ldots +104\cdot0$
90	0	0	$0\cdot77 \ldots\ldots +121\cdot2$

Die an dem ersten Beispiel hervorgehobenen Abweichungen von der analogen Schwingung im reibungslosen System treten hier noch viel schärfer hervor. Auch der Unterschied in der Schwingungsdauer ist hier viel grösser. Die Dauer einer Periode beträgt 16·5 Stunden, aber nach dieser Zeit sind die Geschwindigkeiten und der Überdruck in jeder Breite auf den 32000sten Theil ihres Anfangswerthes gesunken. Schon nach einer halben Schwingung, da die b, c, ε im Zeichen den anfänglichen Werthen entgegengesetzt sind, sind die absoluten Werthe auf 1/178 gefallen.

Vergleicht man mit dieser Abnahme diejenige, welche in einem analogen Fall bei der ohne Schwingungen erlöschenden Bewegung stattfindet, so sieht man, dass sie hier viel langsamer ist. Zu dem gleichen Werth der Reibungsconstante gehört (Tabelle S. 615) $\gamma = 2\nu . 0\cdot36$, welcher weniger als ein Drittel unseres α beträgt. Demnach sinken b, c, ε nur auf $^1/_5$ ihres Anfangswerthes in derselben Zeit, binnen welcher sie im letzten Beispiel auf 1/178 abfallen. Dabei ist dieses Exempel einer raschen Verminderung bei der ausfüllenden Bewegung besonders günstig. Mit grösseren Werthen von l wird α grösser und das γ des vorigen Abschnittes kleiner; die Verminderung des Überdruckes und der Geschwindigkeiten fällt noch viel stärker aus bei der schwingenden, und viel langsamer bei der ausfüllenden Bewegung.

Auch bei sehr grosser Reibung muss während eines Theiles der Schwingungsdauer die meridionale Geschwindigkeitscomponente der Richtung des Druckgefälles entgegengesetzt sein und die zonale Geschwindigkeit der Buys-Ballot'schen Regel zuwiderlaufen. Diese Regel jedoch und die andere, dass die Bewegungsrichtung nach den Orten niedrigern Druckes im gleichen Niveau geht, findet man in der weitaus überwiegenden Zahl der atmosphärischen Bewegungen bestätigt. Das beruht wahrscheinlich auf dem Umstand, dass bei grosser Reibung die schwingenden Bewegungen viel schneller erlöschen, als die ausfüllenden, so dass zumeist die letzteren überwiegen.

Einige $\varkappa'$ und $\varkappa' p'$, welche für den ersten Typus der paren Lösungen zu $\varkappa = 10 \cdot 94$ gehören, sind mit den entsprechenden Werthen von l, α, β hier neben einander gestellt.

$\varkappa' = U e^{ui}$	$\varkappa' p' = V . e^{vi}$	$\frac{l}{2\nu}$	$\frac{\alpha}{2\nu}$	$\frac{\beta}{2\nu}$
$10 \cdot 94\ e^{180^\circ i}$	$10 \cdot 25\ e^{0^\circ i}$	0	0	0·968
$11\ e^{170^\circ i}$	$10 \cdot 25\ e^{-4^\circ 2\, i}$	0·17	0·12	0·964
$15\ e^{116^\circ 3\, i}$	$10 \cdot 59\ e^{-28^\circ 4\, i}$	1·07	0·82	0·80
$20\ e^{102^\circ i}$	$11 \cdot 89\ e^{-39^\circ 5\, i}$	1·46	1·20	0·73

Die Zahlen der ersten Zeile gehören zu dem S. 605 behandelten Fall der Schwingungen im reibungslosen System.

Lässt man U immer grösser werden, so nimmt u ab, V wächst, jedoch viel langsamer als U und auch $-v$ wächst. Dabei nimmt der Erlöschungsexponent α und die Schwingungsdauer $2\pi/\beta$ mit wachsender Reibung zu.

Für die ruhende Kugelschale hat man zwei Lösungen mit γ_1 und γ_2. Je nach dem Werthe von l sind entweder beide γ reell, dann sind die Lösungen verschieden, oder es sind beide complex, dann führen sie nur zu einer Lösung, meridionale Schwingungen mit dem Erlöschungsexponenten $l/2$. Hiezu kommen noch die in den Parallelkreisen verlaufenden Bewegungen mit dem Exponenten l.

Für die rotirende Schale erhält man in unserem speciellen Falle bei grosser wie bei geringer Reibung ein reelles und ein complexes γ. Bei den höheren Typen (grösseren Knotenzahlen) wird es jedoch vorkommen, dass man zu gewissen Werthen der Reibung drei reelle γ findet. Dasselbe findet schon bei dem ersten Typus der paren und imparen Bewegung statt, wenn $\varkappa$ klein angenommen wird.

Der Übergang von den Lösungen für die ruhende zu denen für die rotirende Schale vollzieht sich ganz stetig. Um ihn besser zu überblicken berechne man in den Tabellen S. 615 und 618 l und γ mit dem Werth $\varkappa = 0 \cdot 1$ (also für eine Schale von gleicher Grösse wie die Erde, die jedoch in 251 Stunden eine Umdrehung macht); man wird sehen, dass, wenn $\varkappa'$ von Null bis zum Endwerthe wächst, l von unendlich grossen Werthen bis zu einem Minimum abnimmt, dann zu einem Maximum ansteigt und wieder bis Null sinkt. Zu denjenigen Werthen von l, welche zwischen dem Maximum und dem Minimum liegen, gehören je drei reelle γ.

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (18) setzt sich aus einer Summe particulärer Lösungen zusammen, die sich theils aus reellen, theils aus complexen γ ableiten. Die ersten sind mit je einer, die anderen mit je zwei willkürlichen Constanten behaftet. Man hat über drei unendliche Reihen von Constanten zu verfügen, welche im Allgemeinen gestatten werden, die Anfangsbedingungen für b, c, ε zu erfüllen.