Über adjungirte lineare Differentialgleichungen

Georg Pick in Prag.

(**Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juni 1892.**)

Wenn man für die linearen Differentialgleichungen eine invariantentheoretische Schreibweise wählt, welche, schon früher in speciellen Fällen gebraucht, neuestens von Herrn Waelsch in allgemeiner Form aufgestellt worden ist,[1] so stellt sich die Beziehung zwischen zwei adjungirten Differentialgleichungen in merkwürdig einfacher Weise dar, wie ich im Folgenden zeigen will.

Es sei in der berührten Schreibweise

$$\text{1)} \qquad \Lambda_g(\varphi) = (A, \varphi)^n + (n)_1 (A', \varphi)^{n-1} + \quad + A^{(n)}.\varphi$$

ein Differentialausdruck n^{ter} Ordnung; dabei sind $A, A', \quad . A^{(n)}$ als Formen vom beziehungsweise $m^{\text{ten}}, (m-2)^{\text{ten}}, . \quad (m-2n)^{\text{ten}}$ Grade vorausgesetzt, während den Grad g besitzen soll; durch die symbolischen Klammern sind Überschiebungen im Sinne der Invariantentheorie bezeichnet. Um den zu $\Lambda_g(\varphi)$ adjungirten Ausdruck zu finden, behandeln wir zunächst einen einzelnen Bestandtheil von der Form

$$\text{2)} \qquad (C, \varphi)^\nu = \sum_{\rho=0}^{\nu} (-1)^\rho (\nu)_\rho \, C_\rho \, \varphi_{\nu-\rho}.$$

C habe den Grad μ; die unteren Indices bedeuten einseitige Ableitungen in bekannter Normirung:

[1] E. Waelsch, in »Mittheilungen der deutschen mathematischen Gesellschaft in Prag« (bei G. Freitag).

$$f_k = \frac{1}{h(h-1) \quad (h-k+1)} \frac{d^k f}{dx^k} = \frac{\Pi(h-k)}{\Pi(h)} \cdot \frac{d^k f}{dx^k},$$

wo h der Grad von f ist. Ersetzt man nach letzterer Formel die Grössen $\varphi_{\nu-\rho}$ in 2), und geht dann zum adjungirten Differentialausdruck über, der durch $[(C,\varphi)^\nu]$ bezeichnet werden soll, so ergibt sich zunächst

$$3) \qquad [(C,\varphi)^\nu] = \sum_{\rho=0}^{\nu} (-1)^\nu (\nu)_\rho \frac{\Pi(g-\nu+\rho)}{\Pi(g)} \frac{d^{\nu-\rho}}{dx^{\nu-\rho}}(C_\rho \psi).$$

Hiebei ist die unbestimmte Form, welche in dem ursprünglichen Differentialausdruck φ hiess, nun mit ψ bezeichnet; wir behalten uns vor, über den Grad derselben, g', später geeignet zu verfügen.

Führt man in 3) die angezeigten Differentiationen aus, so ergibt sich für $[(C,\varphi)^\nu]$ eine Doppelsumme, welche durch Umkehrung der Summationsfolge sich leicht vereinfachen lässt.

Man erhält

4)

$$[(C,\varphi)^\nu] = (-1)^\nu \frac{\Pi(g')\,\Pi(g-\nu)}{\Pi(g)\,\Pi(g'-\nu)} \sum_{\sigma=0}^{\nu} (-1)^\sigma \cdot \frac{(\mu-\nu+g+1)_\sigma}{(\nu-g'-1)_\sigma} (k)_\sigma C_\sigma \psi_{\nu-\sigma}$$

Nun ist ersichtlich, dass man nur nöthig hat

$$\mu-\nu+g+1 = \nu-g'-1$$

zu setzen, um dem ganzen Ausdruck wieder die Form einer Überschiebung zu geben. Es bestimmt sich dann g' durch die Relation

$$g+g' = -\mu+2\nu-2$$

und der zu $(C,\varphi)^\nu$ adjungirte Ausdruck lautet

$$(-1)^\nu \frac{\Pi(g')\,\Pi(g-\nu)}{\Pi(g)\,\Pi(g'-\nu)} \cdot (C,\psi)^\nu.$$

Kehren wir nun zur ursprünglichen Aufgabe zurück, indem wir

$$C = A^{(r)}, \qquad \nu = n-r, \qquad \mu = m-2r$$

machen. Die Beziehung zwischen den Gradzahlen g, g' lautet dann

$$g+g' = -(m-2r)+2(n-r)-2$$
$$= -m+2n-2,$$

zeigt sich also von r unabhängig. Das Gesammtresultat lässt sich demnach offenbar folgendermassen aussprechen:

Der zu

$$\Lambda_g(\varphi) = (A,\varphi)^n + (n)_1 (A,\varphi)^{n-1} + \ldots + A^{(n)}\varphi$$

adjungirte Ausdruck

$$\Lambda'_{g'}(\psi) = (B,\psi)^n + (n)_1 (B,\psi)^{n-1} + \quad + B^{(n)}\psi$$

ist durch die Relationen bestimmt

$$\begin{cases} g+g' = -m+2n-2 \\ \dfrac{\Pi(g'-n+r)}{\Pi(g')} B^{(r)} = (-1)^{n-r} \dfrac{\Pi(g-n+r)}{\Pi(g)} A^{(r)}, \end{cases}$$

in welchen sich auch die Gegenseitigkeit der Beziehung direct ausspricht.[1]

---

[1] Normirt man die Zahlencoëfficienten anders in folgender Weise (vgl. Waelsch a. a. O.)

$$\Lambda_g(\varphi) = \sum_{r=0}^{n} (g)_{n-r} (A^{(r)}, \varphi)^{n-r}, \; \Lambda'_{g'}(\psi) = \sum_{r=0}^{n} (g)_{n-r} (B^{(r)}, \psi)^{n-r},$$

so lauten die Relationen einfacher

$$g+g' = -m+2n-2$$
$$B^{(r)} = (-1)^{n-r} A^{(r)}.$$

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 101_2a

Autor(en)/Author(s): Pick Georg

Artikel/Article: Über adjungirte lineare Differentialgleichungen. 893-895