# Über Krümmung und Indicatricen der Helikoide

J. Sobotka in Zürich.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Mai 1892.)

Wir betrachten ein allgemeines Helikoid H, erzeugt durch Schraubung einer Curve $u$, für die wir in der Lage sind, in jedem Punkte die Schmiegungsebene und den Krümmungsmittelpunkt zu construiren.

1. Wir wollen uns zunächst mit der Construction der Hauptkrümmungsmittelpunkte für einen Punkt $A$ des Helikoides beschäftigen.

Hiebei gehen wir von dem folgenden Satze aus:

»Denkt man sich auf einer Fläche H beliebige Curven, die alle durch einen Punkt $A$ gehen und bestimmt die Flächen der Normalen zu H längs dieser Curven, so berühren alle einander in zwei Punkten $G$, $H$ der Normalen $n$ zu H, die durch $A$ geht. Die Punkte $G$ und $H$ sind die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Fläche H, die dem Punkte $A$ entsprechen. Die gemeinschaftlichen Berührungsebenen aller Normalflächen in $G$ und $H$ sind zu einander normal und enthalten die Hauptkrümmungskreise der Fläche H im Punkte $A$.«[1]

Im gegenwärtigen Falle sind durch $A$ auf der Fläche H unmittelbar zwei Curven bestimmt; erstens die Curve $u^a$ als die den Punkt $A$ enthaltende Lage der erzeugenden Curve $u$ und

---

[1] Man sehe A. Mannheim: Cours de géométrie descriptive 1880, p. 276, wo der obige Satz unter dieser Ausdrucksform aufgestellt ist.

zweitens die Schraubenlinie $l$ als die durch $A$ gehende Bahncurve des entsprechenden Punktes auf $u$.

Was die Normale $n$ anbelangt, so sei (Fig. 1)[1] $t$ die Tangente an $u^{\alpha}$, $t'$ die Tangente an $l$ in $A$; beide Tangenten bestimmen die Tangentialebene des Helikoides in $A$, deren Spur in der um den reducirten Schraubengang (pas réduit) $\gamma$ unterhalb $A$ liegenden Normalebene der Schraubung $s$ heissen möge. $n_1$[2] ist normal zu $s_1$ und der Spurpunkt $S$ von $n$ in die genannte Ebene lässt sich ohneweiters darstellen.

Ziehen wir nun die beiden Normalflächen $\mathrm{U}^{\alpha}$ und L des Helikoides längs der Curven $u^{\alpha}$, beziehungsweise $l$ in Erwägung.

Wir wissen, dass das Büschel von Tangentialebenen durch $n$, welches wir der Fläche $\mathrm{U}^{\alpha}$ umschrieben denken, zu der Reihe der entsprechenden Berührungspunkte auf $n$ projectivisch ist. Dessgleichen bezüglich der Fläche L.

Sucht man also die Berührungspunkte jeder Ebene des Büschels mit den beiden Flächen $\mathrm{U}^{\alpha}$, L, so sind dieselben zwei entsprechende Punkte der so auf $n$ entstehenden projectivischen Punktereihen. Die zwei sich selbst entsprechenden Punkte dieser Punktereihen sind die in Frage stehenden Krümmungsmittelpunkte $G$ und $H$.

Umgekehrt, sucht man die Berührungsebenen in jedem Punkte auf $n$ zu den beiden Flächen $\mathrm{U}^{\alpha}$ und L, so sind dieselben zwei sich entsprechende Ebenen der so entstehenden projectivischen Ebenenbüschel durch $n$. Die zwei sich selbst entsprechenden Ebenen dieser Büschel sind die Hauptkrümmungsebenen.

Zur Lösung unserer Aufgabe ist also nothwendig und hinreichend, dass wir zu irgend drei Ebenen des Büschels die ent-

---

1 Die Darstellung geschieht durch die orthogonale Projection eine Normalebene zur Schraubungsaxe. Der Kürze halber wird diese Projection als Hauptprojection bezeichnet. Der Sinn der Schraubung wird durch einen Pfeil angedeutet.

2 Die Hauptprojection eines Gebildes $\Sigma$ wird mit $\Sigma_{\mathrm{I}}$, deren Bild mit $\Sigma_1$ bezeichnet; ähnlich wird die Orthogonalprojection in eine zweite Ebene mit $\Sigma_{\mathrm{II}}$, deren Bild $\Sigma_2$ u. s. bezeichnet. Der reducirte Schraubengang $\gamma$ wird durch den in der Projectionsebene liegenden Kreis $(\gamma)$ vom Halbmesser $\gamma$ mit dem Mittelpunkt in der Schraubungsaxe ausgedrückt.

sprechenden Berührungspunkte mit $U^\alpha$ und L oder umgekehrt angeben können, was den Gegenstand folgender Erwägungen ausmachen möge.

2. Was zuerst die Fläche $U^\alpha$ anbelangt, so ist $(t, n)$ die Berührungsebene in $A$; ihre Spur heisse $a$.

Ist weiter $K$ der Krümmungsmittelpunkt von $u^\alpha$ im Punkte $A$, so trifft die Normale aus diesem Mittelpunkte zu der Schmiegungsebene $(K, t)$ von $u^\alpha$ die Normale $n$ im Punkte $B$, welcher nach dem Satze von Meusnier der Mittelpunkt des Krümmungskreises in $A$ für die Schnittcurve der Ebene $(t, n)$ mit dem Helikoide ist.

Nach einem bekannten Satze[1] ist die Ebene $(t, n)$ normal zu der Fläche $U^\alpha$ im Punkte $B$; demgemäss berührt die durch $n$ normal zu $(t, n)$ gelegte Ebene die Fläche $U^\alpha$ im Punkte $B$.

Übrigens kommen wir zu diesem Ergebniss sogleich, wenn wir die Normalenfläche des durch den Krümmungskreis von $u^\alpha$ in $A$ erzeugten Helikoides längs dieses Kreises in seine Ebene orthogonal projiciren.

Ist $o$ die Spur der Schmiegungsebene $(K, t)$ in die früher erwähnte Normalebene der Schraubung, so schneidet die Senkrechte aus $K_1$ zu $o_1$ das Bild der Normale $n$ in $B_1$.

Die Tangentialebene in $B$ ist senkrecht zu $t$; ihre Spurlinie $b_1$ ist desshalb senkrecht zu $t_1$ und geht durch $S_1$; dass $(K_1, A_1)$ durch den Schnitt von $o_1$ mit $b_1$ gehen muss, braucht wohl nicht bemerkt zu werden.

Endlich wollen wir noch den Berührungspunkt $C$ der Fläche $U^\alpha$ mit der projicirenden Ebene von $n$ bestimmen, deren Spurlinie $c_1$ also mit $n_1$ zusammenfällt.

Die Projection $C_I$ dieses Punktes können wir als den Schnittpunkt von $n_I$ mit der Projection der Normalen $n'$ des Helikoids in dem auf der Curve $u^\alpha$ unendlich nahe an $A$ gelegenen Punkte $A'$ construiren.

Zu dem Behufe legen wir durch $z_I$ — die Projection der Schraubenaxe — die Senkrechte zu $t_I$ und von ihrem Schnittpunkte $\mathfrak{A}_I$ mit $n_I$ die Senkrechte $o'_I$ zu $o_I$.

---

[1] A. Mannheim, O., S. 279.

Man sieht leicht die Bedeutung dieser Construction. Wählt man für den Richtungskegel der Curve $u^{\alpha}$ die Spitze auf der Schraubungsaxe $z$, dann ist derselbe bestimmt durch seine Spur in der Normalebene der Schraubung, welche um $\gamma$ unterhalb der Spitze liegt. Denken wir uns diesen Richtungskegel um $z$ im Sinne der Schraubung um 90° gedreht, so ist $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$ die Projection des gedrehten Spurpunktes der zu $t$ parallelen Erzeugenden des Kegels und $o'_{\mathrm{I}}$ ist die Projection der gedrehten Spur der Tangentialebene des Kegels längs dieser Erzeugenden.

Hieraus ergibt sich, dass die Senkrechte aus $z_{\mathrm{I}}$ zu der Tangente in $A'_{\mathrm{I}}$ an $u^{\alpha}_{\mathrm{I}}$ die Projection von $n'$ in einem Punkte $\mathfrak{A}'_{\mathrm{I}}$ trifft, der gleichfalls auf $o'_{\mathrm{I}}$ liegt.

Die Parallele zu $(z_{\mathrm{I}}, \mathfrak{A}_{\mathrm{I}})$ durch $A_{\mathrm{I}}$ und die Parallele zu $(z_{\mathrm{I}}, \mathfrak{A}'_{\mathrm{I}})$ durch $A'_{\mathrm{I}}$ begegnen einander im Mittelpunkte $\mathfrak{K}$ des Krümmungskreises von $u^{\alpha}_{\mathrm{I}}$ in $A_{\mathrm{I}}$, welcher im vorhinein aus $K_{\mathrm{I}}$ abgeleitet werden kann. So bestimmen z. B. die durch $K_{\mathrm{I}}$ gezogene Parallele und Senkrechte zu $o_{\mathrm{I}}$, ferner die Tangente $t_{\mathrm{I}}$ und die Senkrechte zu ihr durch $A_{\mathrm{I}}$ als Tangenten eine Parabel, deren Berührungspunkt mit der zuletzt genannten Geraden der Punkt $\mathfrak{K}$ ist.

Die Verbindungsgerade $(A_{\mathrm{I}}, A'_{\mathrm{I}})$ kann durch $t_{\mathrm{I}}$ ersetzt werden, und wir gelangen so zu folgendem Resultat.

Das Strahlenbüschel durch $\mathfrak{K}$ bestimmt auf $t_{\mathrm{I}}$ eine Punktereihe; verschieben wir es parallel so, dass sein Mittelpunkt nach $z_{\mathrm{I}}$ kommt, so schneidet es auf $o'_{\mathrm{I}}$ eine zur ersten projectivische Punktereihe. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte beider Punktereihen umhüllen einen Kegelschnitt, welcher von $n_{\mathrm{I}}$ im Punkte $C_{\mathrm{I}}$ berührt wird.

Die Parallele $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{K}$ zu $o'_{\mathrm{I}}$ und die Parallele $\mathfrak{q}$ durch $z_{\mathrm{I}}$ zu $t_{\mathrm{I}}$ sind gleichfalls Tangenten dieses Kegelschnittes. Wir sind also im Stande, mit Hilfe des dem Kegelschnitte umschriebenen Fünfecks $(\mathfrak{p}, o_{\mathrm{I}}, \mathfrak{q}, t_{\mathrm{I}}, n_{\mathrm{I}})$ den Berührungspunkt von $n_{\mathrm{I}}$ nach dem Satze von Brianchon zu construiren. Man braucht bloss durch den Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ und $n_{\mathrm{I}}$ die Parallele zu $t_{\mathrm{I}}$, ferner durch $A_{\mathrm{I}}$ die Parallele zu $\mathfrak{p}$ zu ziehen und den gemeinschaftlichen Punkt $\mathfrak{J}$ beider Parallelen mit dem Schnitte $\underset{\sim}{Q}$ von $o'_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{q}$ durch eine Gerade zu verbinden, welche $n_{\mathrm{I}}$ in dem gesuchten Punkte $C_{\mathrm{I}}$ trifft.

Erheischt es die Genauigkeit der Construction, so kann man natürlich jede der hier hervorgehobenen Tangenten durch eine beliebige andere Tangente des Kegelschnittes ersetzen.

3. Die Fläche L ist ein windschiefes Helikoid, welches durch die Schraubung von $n$ um $z$ erzeugt wird.

Wir können entweder seine Berührungspunkte mit den Ebenen $(n, a)$, $(n, b)$, $(n, c)$ oder seine Berührungsebenen in den Punkten $A$, $B$, $C$ ermitteln. Wir thuen das Letztere.

Die Tangentialebene des Helikoides L im Punkte $A$ ist $(t', n)$, ihre Spur heisse $a'$.

Construiren wir in jeder Ebene des Büschels durch $n$ diejenige Gerade grössten Falles gegen die Projectionsebene, welche den Berührungspunkt dieser Ebene mit L enthält, so schneiden alle diese Fallgeraden bekanntlich die zur Projectionsebene normale Gerade $f$ des orthogonalen Hyperboloids, welches sie bilden.

Das Bild $f_1$ dieser Geraden erhält man im Schnitte der beiden Senkrechten von $A_1$ auf $a'_1$ und von $z_1$ auf $n_1$, oder wenn man auf die letztgenannte Senkrechte von $z_1$ im entsprechenden Sinne die Strecke $(A_1, S_1)$ überträgt.

Demnach ist die Senkrechte $b'_1$ von $S_1$ auf $(f_1, B_1)$ das Bild der Spur für die Tangentialebene des Helikoides L in $B$ und die Senkrechte $c'_1$ von $S_1$ auf $(f_1, C_1)$ das Bild der Spur für seine Tangentialebene in $C$.

Jetzt erübrigt noch in den projectivischen concentrischen Strahlenbüscheln $a_1, b_1, c_1, \ldots$ und $a'_1, b'_1, c'_1, \ldots$ die Doppelelemente $g_1, h_1$ mit Hilfe eines beliebigen, durch $S_1$ gezeichneten Kreises zu construiren.

Die Ebenen $(g, n)$ und $(h, n)$ sind die Hauptkrümmungsebenen des gegebenen Helikoids in $A$.

Die Senkrechten von $f_1$ auf $g_1$ und $h_1$ treffen $n_1$ in $G_1$, beziehungsweise $H_1$.

Kürzer noch kommt man auf folgende Weise zum Ziele. In den gesuchten Punkten $G$ und $H$ haben die Flächen $U^\alpha$ und L gemeinschaftliche Normalen; die Normalenparaboloide beider Flächen längs $n$ haben die unendlich ferne Gerade der zu $n$ senkrechten Ebenen mit einander gemein und erzeugen auf derselben zwei ineinanderliegende projectivische Reihen, deren

Doppelpunkte den Normalen aus $G$ und $H$ angehören. Überträgt man diese Beziehung auf die Projectionen der Normalenparaboloide, so kommt man zur nachstehenden Construction. Man zieht, soweit dies noch nicht geschehen, durch $f_1$ die Senkrechten $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ zu $a_1$, $b_1$, $c_1$ und die Geraden $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ nach $A_1$, $B_1$, $C_1$; hiedurch bekommt man zwei Tripel von Strahlen, welche zwei projectivische concentrische Strahlenbüschel bestimmen, deren Doppelstrahlen $\varphi'_1{}''$, $\psi'_1{}''$ auf $n_1$ die Punkte $G_1$, $H_1$ herausschneiden.

Die Senkrechten von $S_1$ zu $(f_1, G_1)$ und $(f_1, H_1)$ sind die Geraden $g_1$ und $h_1$.

Der Punkt $G$ ist nun der Krümmungsmittelpunkt der Schnittcurve der Ebene $(h, n)$, der Punkt $H$ der Krümmungsmittelpunkt der Schnittcurve der Ebene $(g, n)$ mit dem Helikoid im Punkte $A$.

Der Werth $\dfrac{1}{(\overline{AG}) \times (\overline{AH})}$ ist das Krümmungsmaass des Helikoids für den Punkt $A$.

Die Verbindungsgeraden des Punktes $A$ mit den Schnittpunkten $(h, s)$ und $(g, s)$ sind die Axen der Indicatrix; die Quadrate ihrer Längen sind den Strecken $\overline{AG}$, resp. $\overline{AH}$ proportional; man kann also die Indicatrix selbst construiren.

4. Wenn die Projection der behandelten Gebilde in eine Normalebene der Schraubung für die Construction ungünstig ausfällt, so nimmt man eine zweite Projection in eine zur Schraubungsaxe parallele Ebene zu Hilfe. Dies gilt insbesondere für Punkte der Curve $u^\alpha$, in denen die Schmiegungsebene parallel zur Schraubungsaxe ist, in welchem Falle alle vorigen Darstellungen unverändert anwendbar bleiben mit Ausnahme der des Punktes $C$, für den die angegebene Construction versagt; im Wesen kann dieselbe jedoch beibehalten werden.

Wir haben da die orthogonale Darstellung in zwei Ebenen gewählt; in die um $\gamma$ unterhalb des Punktes $A$ liegende Normalebene der Schraubung und in die zu ihr normale Schmiegungsebene der Curve $u^\alpha$ in $A$ (Fig. 2). Die Spitze $\mathfrak{B}$ des Richtungskegels für $u^\alpha$ wählen wir in gleicher Höhe mit $A$ und denken uns diesen Kegel in die durch $z$ gelegte, zur zweiten Projectionsebene normale Ebene projicirt. Wir bezeichnen diese

Projection als die dritte. Dann wird nach der üblichen Darstellungsweise $\mathfrak{B}_3$ auf dem Kreise $(\gamma_1)$ liegen und $(\mathfrak{B}_3, A_3)$ parallel zu $(K_2, A_2)$ sein, und da $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{A}_3$ zusammenfällt, so haben wir den früheren Erwägungen gemäss folgendes Resultat.

Das Strahlenbüschel durch $K_2$ bestimmt auf $t_2$ eine Punktereihe. Projiciren wir diese orthogonal auf $t_1$, so bekommen wir eine zweite Punktereihe, welche projectivisch ist mit der auf $o'_1$ durch das Büschel $\mathfrak{B}_3$ gebildeten Punktereihe, wobei jedem Strahle durch $K_2$ der Parallelstrahl durch $\mathfrak{B}_3$ entspricht. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte auf $t_1$ und $o'_1$ umhüllen einen Kegelschnitt, welcher von $n_1$ in $C_1$ berührt wird.

Die Parallele $\mathfrak{p}_1$ durch $K_1$ zu $o'_1$ und die Parallele $\mathfrak{q}_1$ durch den Schnittpunkt $\mathfrak{L}_1$ der Normalen aus $\mathfrak{B}_3$ zu $(\mathfrak{B}_3, A_3)$ mit $o'_1$ sind gleichfalls Tangenten dieses Kegelschnittes.

Die weitere Construction, um zum Punkte $C_1$ zu gelangen, stimmt nun wörtlich mit der früher gegebenen überein.

Die Construction gestaltet sich also sehr einfach.

Wenn speciell die Schmiegungsebene in $A$ an die Curve $u^\alpha$ durch die Axe $z$ geht, so übt dieser Umstand keinen Einfluss auf die eben auseinandergelegte Construction aus; sie wird mit denselben Hilfsgeraden ausgeführt.

Darin liegt auch die Lösung unseres Problems für diejenigen Helikoide, welche durch ihre Meridiancurven gegeben sind.

Ist die Osculationsebene der Curve $u^\alpha$ im Punkte $A$ normal zur Schraubungsaxe, so fällt der Punkt $C$ mit dem Punkte $B$ zusammen; wir müssen noch eine weitere Berührungsebene durch $n$ an die Fläche $\mathrm{U}^\alpha$ benützen. Als solche wählen wir die asymptotische Ebene, welche leicht zu bestimmen ist; ihre Spur ist nämlich parallel zu $(z_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{I}})$. Denn ist $k$ der Krümmungskreis der Curve $u^\alpha$ in $A$, so nimmt, wenn $u^\alpha$ durch die Schraubung in die unendlich nahe Lage $u'$ gelangt, der Kreis $k$ die Lage $k'$ und der Punkt $A$ die Lage $A'$ ein. Durch $k$ und $k'$ ist eine Cylinderfläche bestimmt und es ist klar, dass dieselbe in den Punkten $A$ und $A'$ gemeinschaftliche Normalen mit dem Helikoide besitzt; oder mit anderen Worten, die Normalenfläche des Cylinders und die Fläche $\mathrm{U}^\alpha$ berühren einander längs der Erzeugenden $n$, haben also in allen ihren Punkten gemeinschaftliche Tangentialebenen. Die Richtung der Cylinderfläche ist die Tangente an die durch $K$ beschriebene Helix. Es ist darum die Normalebene zu dieser Tangente die Richtungsebene der Normalenfläche des Cylinders längs $k$ und ihre Spur ist thatsächlich parallel zu $(z_I, K_I)$.

Hiedurch gestaltet sich die Construction womöglich noch einfacher, als in den früheren Fällen.

Darin liegt auch die Lösung unseres Problems für diejenigen Helikoide, welche durch ihre Normalcurven, d. h. durch Curven, welche in Normalebenen der Schraubung liegen, gegeben sind.

Übrigens ist allgemein die durch $n$ parallel zu $(C_I, z_I)$ gelegte Ebene eine asymptotische Ebene der Fläche $U^\alpha$, worauf wir noch später zurückkommen.

Die letzte Construction führt bequem bei den windschiefen Helikoiden zum Ziele, da man die Krümmungsmittelpunkte in den Punkten der Normalcurve bei diesen Flächen, wie bekannt, auf sehr kurzem Wege erhalten kann.[1] Wir werden aber sehen, dass sich diese Construction für alle Helikoide verwenden lässt.

5. Besonders einfach gestaltet sich die an der Fläche $U^\alpha$ durchgeführte Construction für solche Punkte $A$ auf der Curve $u^\alpha$, in denen die Tangente $t$ eine Gerade grösster Neigung in der Schmiegungsebene in $A$ von $u^\alpha$ in Bezug auf eine Normalebene der Schraubung ist.

Erstens ergibt sich der Punkt $\mathfrak{K}$ aus $K$ oder umgekehrt in aller Kürze.

Zweitens degenerirt der zur Aufsuchung von $C_I$ verwendete Kegelschnitt; wir gelangen zu einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt $C_I$ ist, so dass sich dieser Punkt als der Schnittpunkt von $n_I$ mit $(z_I, \mathfrak{K}_I)$ ergibt.

Auf diesen Fall lässt sich auch die allgemeine Construction überführen.

Nehmen wir auf dem Helikoide eine beliebige Curve $v^\alpha$ an, welche von $t$ im Punkte $A$ berührt wird, so hat die Normalenfläche $V^\alpha$ des Helikoids längs der Curve $v^\alpha$ mit $U^\alpha$ die Er-

[1] Man sehe z. B. Dr. L. Burmester: Kinematik, I. Bd., 1888, Capitel von den cyclischen Curven. Eine Construction der Hauptkrümmungscentra der schiefen geschlossenen Schraubenfläche und der Wendelfläche findet sich bei A. Mannheim, a. a. O., S. 381 f.

zeugende $n$ und in den Punkten $A$, $G$, $H$ derselben die Tangentialebenen gemeinschaftlich; demnach berühren beide Flächen einander längs der Normalen $n$, so dass für unseren Zweck es einerlei ist, welche von den Flächen $U^\alpha$, $V^\alpha$ wir in Betracht ziehen.

Wir wählen nun die Curve $v^\alpha$ so, dass für ihre Schmiegungsebene in $A$ die Tangente $t$ eine Gerade grösster Neigung in Bezug auf eine Normalebene der Schraubung ist.

Bezeichnen wir den Krümmungsmittelpunkt von $v^\alpha$ in $A$ mit $K'$ und den Krümmungsmittelpunkt von $v^\alpha_{\mathrm{I}}$ in $A_{\mathrm{I}}$ mit $\mathfrak{K}'$ Führen wir nun (Fig. 1) durch $B_{\mathrm{I}}$ die Parallele zu $t_{\mathrm{I}}$, so trifft diese nach dem Satze von Meusnier die Gerade $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K})$ in $K'_{\mathrm{I}}$. Aus der Länge $(A, K')$ und dem Neigungswinkel der Tangente $t$ von der Projectionsebene wird der Krümmungsradius $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K}')$ von $v^\alpha_{\mathrm{I}}$ erhalten und hiemit ist die angestrebte Überführung vollzogen.

Vergleichen wir nun das durch die Geraden $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{J})$, $(A_{\mathrm{I}}, \mathfrak{K})$ und $(\mathfrak{J}\,\mathfrak{P})$ gebildete Dreieck mit dem Dreiecke $(z_{\mathrm{I}}, \mathfrak{A}_{\mathrm{I}}, Q)$. Diese Dreiecke sind ähnlich und ähnlich gelegen, $C_{\mathrm{I}}$ ist ihr Ähnlichkeitspunkt; folglich geht auch die Verbindungsgerade der Scheitel ihrer rechten Winkel durch $C_{\mathrm{I}}$. Es wurde nachgewiesen, dass diese Verbindungsgerade $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ durch $\mathfrak{K}'$ geht, woraus folgt, dass $\mathfrak{K}'$ der Scheitel des rechten Winkels im erstgenannten Dreiecke ist.

Aus dieser Betrachtung folgt ferner: Zieht man durch $\mathfrak{K}_1$ die Senkrechte zu $o_1$ bis zum Schnitte $\mathfrak{P}_1$ mit $n_1$ und von hier die Parallele zu $t_1$ bis zum Schnitte $\mathfrak{K}'_1$ auf $(A_1, \mathfrak{K}_1)$, so trifft die Gerade $(z_1, \mathfrak{K}'_1)$ das Bild $n_1$ der Normale in $C_1$. Wir sehen, dass sich hiedurch die Auffindung von $C$ ziemlich verkürzt.

Ebenso ist klar, wenn wir auf $(\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{I}})$ den Punkt $\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}$ so bestimmen, dass $\overline{A_{\mathrm{I}}\, z_{\mathrm{I}}} \times \overline{z_{\mathrm{I}}\, \mathfrak{L}_{\mathrm{I}}} = \gamma^2$, dass $(\mathfrak{L}_{\mathrm{I}}, K'_{\mathrm{I}})$ gleichfalls durch $C_{\mathrm{I}}$ geht, was wieder auf kurzem Wege $C_{\mathrm{I}}$ mit Benützung von $K'_1$, also aus bekanntem $K_{\mathrm{I}}$ finden lässt.

Für den in (Fig. 2) dargestellten Fall stimmt diese Construction mit der früher gegebenen in Durchführung vollständig überein.

Da, wie bemerkt worden, $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ parallel ist zur Spur der durch $n$ gelegten asymptotischen Ebene von $U^\alpha$, so folgt daraus, wenn wir das die Fläche $U^\alpha$ längs $n$ berührende hyperbolische Paraboloid P, welches die projicirende Ebene der Spur $a$ zur Richtungsebene hat, construiren, dass $(B_I, \mathfrak{K}')$ die Projection einer Erzeugenden dieses Paraboloids ist, dass also $(B_I, \mathfrak{K}') \parallel a$ ist. Daraus ersieht man, wie aus einem der Punkte $K_I$, $\mathfrak{K}$, $K_I^7$, $\mathfrak{K}'$ jeder der anderen drei rasch ermittelt wird.

6. Handelt es sich um die Indicatrix des Helikoides im Punkte $A$, so wird man zuerst den Punkt $C$ ermitteln.

Durch $A$ geht die Schraubenlinie $l$ des Helikoids. Denken wir uns längs dieser Schraubenlinie die berührende Developpable umschrieben; die ist bekanntlich ein entwickelbares Helikoid, dessen erzeugende Geraden die Fallgeraden der Tangentialebenen des gegebenen Helikoids in den Punkten von $l$ in Bezug auf eine Normalebene der Schraubung sind.[1] Die Hauptprojectionen dieser Fallgeraden fallen mit den Hauptprojectionen der Normalen zusammen.

Demnach ist nach dem Theorem von Dupin die Tangente $t'$ in $A$ an die Schraubenlinie $l$ und diese Fallgerade $m'$, für die $m'_I \equiv n_I$ ein Paar conjugirter Durchmesser der Indicatrix.

Denken wir uns ferner längs $u^\alpha$ die das gegebene Helikoid berührende developpable Fläche. Wählen wir auf der Schraubungsaxe die Spitze des Richtungskegels dieser Developpablen, den wir durch seine Spur in die um $\gamma$ unterhalb seiner Spitze befindliche Normalebene der Schraubung bestimmen wollen und drehen diese Spur um die Schraubungsaxe im Sinne der Schraubung um 90°, so ist in dieser Lage ihre Hauptprojection identisch mit der Contour der Hauptprojection für die Normalfläche $U^\alpha$. Wenn also die Projection der Normalen $n$ zum Helikoid in einem Punkte $A$ der Curve $u^\alpha$ die Contour in $C_I$ berührt, so ist die durch $z_I$ zu $(C_I, z_I)$ errichtete Senkrechte die Projection derjenigen Erzeugenden des Richtungskegels, welche parallel läuft zu der durch $A$ gehenden Erzeugenden der längs $u^\alpha$ umschriebenen Developpablen.[2]

---

[1] Man sehe: Dr. W. Fiedler, Darstellende Geometrie, 3. Aufl. II. Bd. S. 468.

[2] Man sehe meine Abhandlung »Über developpable Flächen der windschiefen Helikoide«, welche demnächst erscheinen wird. Man vergleiche Th. Schmid: »Über Berührungscurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide« im XCIX. Bd., X. Heft, S. 952 u. f. dieser Sitzungsberichte.

Die Normale $m_I$ aus $A_I$ zu $(C_I, z_I)$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu $(\mathfrak{K}', z_I)$, bestimmt in der Tangentialebene des Helikoids in $A$ die Gerade $m$, welche mit $t$ nach dem Dupin'schen Theorem ein weiteres Paar conjugirter Durchmesser der Indicatrix repräsentirt.

Die zwei Paare conjugirter Tangenten $t'm'$, $tm$ bestimmen die Indicatrix vollständig.

Gleichzeitig ist durch diese zwei Paare die Durchmesserinvolution der Indicatrix bestimmt, wobei sich diese involutorische Beziehung auch auf die Projectionen überträgt.

Es lässt sich demgemäss zu jedem Durchmesserstrahl der conjugirte, ihm in der Involution entsprechende nach bekannten Regeln leicht construiren.

Hieraus ergibt sich eine einfache Construction von Tangenten an Berührungscurven der Helikoide mit umschriebenen developpablen Flächen. Die Construction der Tangenten an die Curven der Selbstschattengrenzen, an die Berührungscurven mit Kegelflächen von gegebenem Mittelpunkte, an die Isophoten und Isophengen, welche Curven oft schon Gegenstand darstellend geometrischer Behandlung geworden sind, ist darin als Specialfall mitenthalten.

Ebenso löst man die umgekehrte Aufgabe, aus den Tangenten einer Curve auf dem Helikoid die entsprechenden Erzeugenden der längs dieser Curve umschriebenen developpablen Fläche und somit des Richtungskegels derselben zu finden.

Die Doppelstrahlen der erwähnten Involution geben die Asymptoten der Indicatrix an.

Durch jede dieser Asymptoten ist eine Schraubungsregelfläche bestimmt, welche das gegebene Helikoid längs der betreffenden Schraubenlinie osculirt, d. h. welche drei einander unendlich benachbarte Schraubenlinien des gegebenen Helikoids enthält.

Hat man die Indicatrix in $A$ durch die Strahlenpaare $t'm'$, $tm$ bestimmt, so kann man die Hauptkrümmungscentra $G$ und $H$ wieder ermitteln. Man construirt das Rechtwinkelpaar $rr'$ der Durchmesserinvolution; die Ebenen $(r, n)$, $(r', n)$ sind die Hauptkrümmungsebenen; ihre Berührungspunkte mit dem durch $n$ erzeugten Helikoide L, oder mit dem vorerwähnten Paraboloide P, in beiden Fällen sehr rasch construirbar, sind die gesuchten Hauptkrümmungscentra.

Bemerkung 1. Denken wir uns die Projection $n_{\mathrm{I}}$ der Normalen in $A$ zu dem Helikoide um $z_{\mathrm{I}}$ im der Schraubung entgegengesetzten Sinne um 90° gedreht und bezeichnen sie in dieser neuen Lage mit $v$. Wählen wir dann auf der Schraubungsaxe den Punkt $V$ oberhalb der Projectionsebene in der Entfernung $\gamma$. Durch $V$ ist in der Ebene $(V, v)$ ein Strahlenbüschel bestimmt.

Wir betrachten nun die dem Helikoide umschriebenen Cylinderflächen, deren Richtungen durch die Strahlen des eben bestimmten Büschels gegeben sind.

Man sieht zunächst, dass die Berührungscurven $e$. dieser Cylinderflächen mit dem Helikoide alle durch den Punkt $A$ gehen. Aus dem in diesem Paragraphe Erläuterten folgt, dass alle Normalen des Helikoids längs irgend einer Berührungscurve $e$ eine zur Schraubungsaxe parallele Gerade $c$ schneiden. Ist nun $E$ der Spurpunkt der durch $V$ gehenden Richtungsgeraden für die umschriebene Cylinderfläche, so braucht man bloss denselben um $z_{\mathrm{I}}$ im Sinne der Schraubung um 90° zu drehen, um in seiner neuen Lage $C_{\mathrm{I}}$ die Projection der Geraden $c$ zu erhalten, oder die Senkrechte von $z_{\mathrm{I}}$ zu $(z_{\mathrm{I}}, E)$ schneidet $n_{\mathrm{I}}$ in dem Punkte $C_{\mathrm{I}}$.

Stimmt die Richtung der umschriebenen Cylinderfläche mit der mit $m$ bezeichneten Geraden überein, so sieht man — (Fig. 1) — da $m_{\mathrm{I}} \perp (z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$, dass $C_{\mathrm{I}}$ die Projection der Geraden $c$ ist. Die Normalfläche $E$ längs $e$ hat mit der Fläche $U^{\alpha}$ in den Punkten $G, H, C$ gemeinschaftliche Berührungsebenen, beide Flächen berühren demnach einander längs $n$, woraus folgt, dass $e$ und $u^{\alpha}$ in $A$ die Tangente $t$ gemeinschaftlich haben Die Normalenfläche $E$ hat die zu $m$ normale Ebene zur Richtungsebene, woraus folgt, dass $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ parallel zur Spur der asymptotischen Ebene der Fläche $U^{\alpha}$ durch $n$ ist, worauf im Früheren bereits Bezug genommen worden ist.

Denselben Schluss liefert folgende Überlegung.

Die Gerade $t$ verbindet die unendlich nahe gelegenen Punkte $A, A'$ des Helikoids, denen die Normalen $n, n'$ zugehören.

Die Gerade $m$ als der Schnitt der Berührungsebenen des Helikoids in $A$ und $A'$ ist senkrecht zu beiden Normalen $n$, $n'$, also senkrecht zu der durch $n$ parallel zu $n'$ gelegten Ebene, welche die asymptotische Ebene durch $n$ für die Fläche $U^{\alpha}$ ist. Da nun $m_I \perp (z_I, C_I)$ ist, so folgt daraus, dass $(z_I, C_I)$ parallel zur Spur der asymptotischen Ebene sein muss.[1]

Bemerkung 2. Wir haben gesehen, wie man die Tangenten an die Berührungscurve irgend eines Helikoids mit einer umschriebenen Developpablen construirt. Trifft man überdies den Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{K}$ der Projection dieser Berührungscurve in $A_I$ construiren, so lässt sich dann auch die Osculationsebene der Berührungscurve selbst und deren Krümmungsmittelpunkt $K$, sowie der Krümmungsmittelpunkt ihrer Projection in eine beliebige andere Ebene je in dem entsprechenden Punkte einfach construiren. Denn für diesen Fall ist der Punkt $C_I$ im Voraus bekannt. $(C_I, z_I)$ schneidet aus $(A_I\ \mathfrak{K})$ den Punkt $\mathfrak{K}'$ heraus, aus dem $K$ und die Spur der Osculationsebene auf die früher angegebene Weise gefunden wird.

7 In dem Vorangehenden ist auch eine einfache Lösung der folgenden Aufgabe enthalten:

Das Helikoid ist durch die Curve $n$ und durch die Schraubung gegeben, man soll das Krümmungscentrum für den Punkt $A$ irgend einer Curve $x$ auf dem Helikoid, deren Osculationsebene in $A$ bekannt ist finden.

Schneidet die Osculationsebene die Berührungsebene des Helikoids für den Punkt $A$ in der Geraden $t^{\xi}$, so ist diese die Tangente an $x$ in $A$. Da man in $A$ leicht die zwei Paare conjugirter Durchmesser $t$, $m$; $t'$ $m'$ der Indicatrix ermitteln kann, so lässt sich ohneweiters der zu $t^{\xi}$ conjugirte Durchmesser $m^{\xi}$ derselben hieraus construiren.

Errichtet man zu $m_I^{\xi}$ die Senkrechte aus $z_I$, so trifft dieselbe $n_I$ im Punkte $C_I^{\xi}$, wodurch man durch $n$ für die Normalenfläche des Helikoids längs $x$ drei Berührungsebenen mit ihren Berührungspunkten kennt, nämlich die Ebene $(t^{\xi}\ n)$, welche in $A$ berührt, die projicirende Ebene von $n$, welche in $C^{\xi}$ berührt und schliesslich die asymptotische Ebene, welche durch $n$

[1] Man vergleiche A. Mannheim, O., S. 300 u. f.

parallel zu $(z_{\mathrm{I}}, C^{\xi}_{\mathrm{I}})$ geht. Man kann demnach den Berührungspunkt einer jeden vierten Ebene durch $n$ ermitteln.

Für die durch $A$ zu $t^{\xi}$ senkrechte Ebene ist der Berührungspunkt $B^{\xi}$ gleichzeitig der Krümmungsmittelpunkt der Schnittcurve des Helikoids mit der Ebene $(t^{\xi}, n)$ im Punkte $A$. Fällt man dann von $B^{\xi}$ die Senkrechte zur Osculationsebene von $x$ in $A$, so trifft sie dieselbe in dem fraglichen Krümmungsmittelpunkt.

Ist also $X$ der Spurpunkt von $t^{\xi}$ und $S$ der Spurpunkt von $n$ wie früher, so führt man durch $A_{\mathrm{I}}$ die Senkrechte zu $t^{\xi}_{\mathrm{I}}$ und durch deren Schnittpunkt mit $(z_{\mathrm{I}}\ C^{\xi}_{\mathrm{I}})$ die Parallele zu $(X, S)$, welche bereits aus $n_{\mathrm{I}}$ den Punkt $B^{\xi}_{\mathrm{I}}$ herausschneidet.

Darin ist auch die Construction der Krümmungsmittelpunkte für die Meridiancurven sowohl wie auch für die Normalcurven der Helikoide mitenthalten; für die letzteren ist insbesondere die Länge $(A_{\mathrm{I}}, C^{\xi}_{\mathrm{I}})$ schon der entsprechende Krümmungsradius.

Dieselbe Construction gestattet auch die Hauptkrümmungscentra $G$ und $H$ auf die möglichst einfachste Weise zu finden. (Fig. 3).

Denken wir uns den Hauptschnitt des Helikoids durch $A$ in der Ebene $(r, n)$. Der Krümmungsmittelpunkt dieses Hauptschnittes sei $G$. Es ist klar, da auf der Normalfläche längs dieses Hauptschnittes die zu $n$ unendlich nahe Normale $n'$ des Helikoids von $n$ im Punkte $G$ geschnitten wird, dass der Punkt $C$ dieses Falles mit $G$ zusammenfällt.

Da $r$, $r'$ als Axen der Indicatrix einander conjugirt sind, so folgt, dass die Senkrechte von $z_{\mathrm{I}}$ zu den Geraden $r'_{\mathrm{I}}$ und $r_{\mathrm{I}}$ die Projection der Normale $n_{\mathrm{I}}$ respective in $G_{\mathrm{I}}$ und $H_{\mathrm{I}}$ schneidet.

Betreffs der Darstellung von $r$ und $r'$ kann noch Folgendes bemerkt werden.

Wir schneiden die Involution $t_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}; t'_{\mathrm{I}}, m'_{\mathrm{I}}$. etwa mit dem Kreise $l_{\mathrm{I}}$; der Pol der hiedurch auf $l_{\mathrm{I}}$ gebildeten Involution heisse $\mathfrak{J}$. Die Involution $t_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}; t'_{\mathrm{I}}\ m'_{\mathrm{I}}$ ist mit der Involution $t, m; t', m'$ perspectivisch. Beide Involutionen bestimmen dieselbe Punktinvolution auf $s$. Sucht man in dieser Punktinvolution dasjenige Paar, welches von $A$ aus unter rechtem Winkel gesehen wird, so sind dessen Verbindungsstrahlen mit

$A_{\mathrm{I}}$ die Geraden $r_{\mathrm{I}}$, $r'_{\mathrm{I}}$; bildet man den Schein dieser Punktinvolution von $A_{\mathrm{I}}$ aus, so gelangt man demnach zu zwei Strahleninvolutionen um den Punkt $A_{\mathrm{I}}$, für die $r_{\mathrm{I}}$, $r'_{\mathrm{I}}$ das gemeinsame Strahlenpaar sind. Dreht man das Strahlenbüschel $A$ um $s$, bis es in die Hauptprojectionsebene, als welche wir gegenwärtig die durch $s$ gehende Normalebene der Schraubung betrachten, hineinfällt, dann kann man ohneweiters beliebige zwei Paare der durch die Rechtwinkelinvolution auf $s$ herausgeschnittenen Punktinvolution darstellen. Überträgt man nun diese Punktinvolution mittelst des Scheines aus $A_{\mathrm{I}}$ wieder auf den Kreis $l_{\mathrm{I}}$, so bekommt man jetzt $\mathfrak{F}'$ als Pol der Involution. Man hat nun auf $l_{\mathrm{I}}$ zwei Punktinvolutionen, deren gemeinsames Punktepaar $R$, $R'$ auf der Verbindungsgeraden von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ liegt, und es ist endlich $(A_{\mathrm{I}}, R) \equiv r_{\mathrm{I}}$, $(A_{\mathrm{I}}\, R') \equiv r'_{\mathrm{I}}$.

Versagt uns die Hauptprojection den Dienst, so wenn $n$ parallel zur Hauptprojectionsebene wird, oder liefert ihre Darstellung ungenaue Resultate, so wird man eine zweite Orthogonalprojection in eine zu parallele Ebene zu Hilfe nehmen.

Man hat stets nur Folgendes im Auge zu behalten.

Ist $t^*$ die Tangente in $A$ an irgend eine durch $A$ gehende Curve $q$ des Helikoides, so ist die zu $t^*$ conjugirte Tangente $m^*$ normal zu der durch $n$ gelegten asymptotischen Ebene der Normalenfläche Q des Helikoides längs der Curve $q$. Weiter, wenn man auf der Axe $z$ den Punkt $Z$ in der Entfernung $\gamma$ über der Hauptprojectionsebene annimmt, die Indicatrix in $A$ zuerst parallel zu sich selbst verschiebt, so dass $A$ nach $Z$ gelangt, und nachher sie im Sinne der Schraubung um 90° dreht, so repräsentirt jedesmal der Spurpunkt von $m^*$ in dieser letzten Lage die Projection $C_{\mathrm{I}}$ des Punktes $C$ auf der Fläche Q, wie aus dem im vorigen Paragraphe Erläuterten folgt. Hienach kann man $m^*$ finden, wenn man $C_{\mathrm{I}}$ kennt und umgekehrt.

In dem speciellen Falle, wo $n$ parallel zur Hauptprojectionsebene ist, wird man vortheilhaft diese in der Entfernung $\gamma$ unterhalb des Punktes $A$, die zweite Projectionsebene parallel zu der Berührungsebene des Helikoides in $A$ wählen. Bei der Bestimmung der früher besprochenen Berührungspunkte wird man die projectivische Beziehung zwischen den Abbildungen der zweiten Projectionen der Tangentialebenen und der Hauptprojectionen ihrer Berührungspunkte benützen.

8. Wir wollen uns noch mit einem speciellen Helikoide S beschäftigen und an ihm die entwickelten Betrachtungen anstellen.

Die erzeugende Curve des Helikoids sei irgend eine Schraubenlinie $w$ mit einer zu $z$ parallelen Schraubungsaxe $\mathfrak{z}$. (Fig. 4.)

Aus dieser Annahme folgt, dass für alle Punkte der Curve $w^\alpha$ die Länge der Tangente $t$ für den Höhenunterschied $\gamma$ (in Richtung von $z$) constant bleibt; es bleibt also auch die früher mit $(z_I, \mathfrak{A}_I)$ bezeichnete Länge constant, und demnach werden alle Punkte die $\mathfrak{A}_I$ analog sind, auf einem Kreise $e_I$ liegen, der in $z_I$ seinen Mittelpunkt hat.

Da $(z_I, \mathfrak{A}_I) \| (\mathfrak{z}_I^\alpha, A_I)$, so geht $n_I$ durch einen Ähnlichkeitspunkt der Kreise $w_I^\alpha$ und $e_I$ und zwar durch den äussern, wenn der Schraubungssinn von $w$ mit dem der Schraubung um $z$ übereinstimmt, im entgegengesetzten Falle durch den innern. Dies gilt für alle Normalen des Helikoids in den Punkten der Curve $n^\alpha$. Die projicirende Gerade $c$ dieses Ähnlichkeitspunktes $C$ gehört also der Normalfläche $W^\alpha$ längs $w^\alpha$ an.

Wenn $\gamma'$ der reducirte Schraubungsgang für $w$ ist, so gilt die Relation $(z_I\, C_I)\ \ (\mathfrak{z}_I^\alpha\, C_I) = \gamma\ \ \gamma'$

Nimmt man demnach auf der Axe $z$ den Punkt $Z$ in der Entfernung $\gamma$ über der Projectionsebene, auf der Axe $\mathfrak{z}^\alpha$ den Punkt $Z^\alpha$ in der Entfernung $\gamma'$ entweder über oder unter der Projectionsebene an, je nachdem der Sinn von $w$ mit dem der Schraubung um $z$ gleich oder ihm entgegengesetzt ist, dann fällt also der Spurpunkt von $(Z, Z^\alpha)$ in den Punkt $C_I$ hinein.

Die Contur der Hauptprojection von $W^\alpha$ ist nach dem Gesagten der Punkt $c_I \equiv C_I$; der Richtungskegel der längs $w^\alpha$ dem Helikoide umschriebenen developpablen Fläche geht also in eine Gerade über; die Developpable selbst ist eine Cylinderfläche. Dreht man den Punkt $C_I$ um $z_I$ im entgegengesetzten Sinne der Schraubung um 90°, so gelangt er nach $E$ und repräsentirt die Spur der Geraden $(Z, E)$, welche die Richtung der Cylinderfläche angibt, oder mit anderen Worten, dreht man $(Z, Z^\alpha)$ um $z$ im entgegengesetzten Sinne der Schraubung um

90°, so gibt diese Gerade in ihrer neuen Lage die Richtung der Cylinderfläche an.

Daraus geht unmittelbar hervor, dass man in jedem Punkte $A$ des Helikoids S zwei conjugirte Durchmesserpaare der Indicatrix sogleich angeben kann. Das eine Paar liefert die Gerade $t$ mit der durch $A$ zu $(Z, E)$ gezogenen Parallelen $m$, das zweite Paar ist die Tangente $t'$ mit der Fallgeraden $m'$ der Tangentialebene $(t, t')$ in Bezug auf unsere Hauptprojectionsebene.

Die Fläche $W^{\alpha}$ ist desshalb gleichzeitig die Normalenfläche der längs $w^{\alpha}$ dem Helikoid umschriebenen, soeben abgeleiteten Cylinderfläche, sie ist darum eine Conoidfläche, deren Richtungsebene zu $m$ normal ist.

Die Normalcurve des Helikoids S ist eine cyklische Curve; denn bei einer Drehung von $\mathfrak{z}_{\mathrm{I}}$ um $z_{\mathrm{I}}$ um eine gewisse Bogenlänge dreht sich der Spurpunkt von $w$ um $\mathfrak{z}_{\mathrm{I}}$ gleichfalls um eine gewisse Bogenlänge und beide Bogenlängen stehen im constanten Verhältniss zu einander.

Aus den Eigenschaften der cyclischen Curven folgt, dass der um $z_{\mathrm{I}}$ als Mittelpunkt mit dem Radius $(z_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{I}})$ beschriebene Kreis $(c_{\mathrm{I}})$ der Basiskreis ist, auf welchen der Kreis vom Mittelpunkte $\mathfrak{z}_{\mathrm{I}}^{\alpha}$ und vom Radius $(\mathfrak{z}_{\mathrm{I}}^{\alpha}, C_{\mathrm{I}})$ rollt, bei welcher Bewegung der mit dem rollenden Kreise starr verbunden gedachte Punkt $A_{\mathrm{I}}$ diejenige cyclische Curve beschreibt, welche die Hauptprojection der Normalcurve für das Helikoid S in der durch $A$ gelegten Normalebene der Schraubung ist.[1]

Wir sehen hier eine vollständige Analogie dieser Schraubungsfläche mit einer Schraubungsregelfläche und es ist unsere Fläche $S$ die zunächst liegende Verallgemeinerung der windschiefen Schraubungsflächen. Die interessanten Constructionen, die so vielfach schon an diesen durchgeführt worden sind, lassen sich Schritt für Schritt für jene in derselben Art durchführen; ich erwähne insbesondere die Construction von Berührungscurven mit developpablen Flächen von gegebenem Richtungskegel und umgekehrt.

---

1 Man sehe Dr. L. Burmester: Kinematik, I. Bd., 1888, das Capitel über die cyclischen Curven; Dr. Chr. Wiener, Darstellende Geometrie, II. Bd., 1887, S. 343 u. f. —

Ist die erzeugende Schraubenlinie $w$ von demselben Sinn wie die Schraubung um $z$ und hat sie überdies mit dieser gleichen Schraubungsgang, so rücken die Geraden $c$ ins Unendliche, die Normalcurve der Fläche wird zum Kreise, dessen Radius gleich $\overline{z_I \mathfrak{z}_I}$ ist und wir erkennen in diesem Falle sofort aus unserer Betrachtung die Erzeugung der Schraubungsfläche, wir wollen sie mit S' bezeichnen, als Rückungsfläche. Diese Fläche S' ist in den Schraubungsregelflächen der normalen analog.

Im allgemeinen Falle, wo das Helikoid durch eine beliebige Curve $u$ gegeben ist, kann man von der Fläche S, respective S' mit Vortheil Gebrauch machen.

Wir bestimmen den Punkt $K'_I$ und etwa den Punkt $\mathfrak{L}$, wie früher angegeben worden ist. Die Gerade $(K'_I, \mathfrak{L})$ trifft $n_I$ in $C_I \equiv c_I$; weiter trifft $(z_I, C_I)$ die Gerade $(A_I K'_I)$ im Punkte $\mathfrak{K}'$, welcher, wie leicht zu sehen, identisch ist mit $\mathfrak{z}^{\alpha}_I$. Wir haben übrigens gesehen wie $\mathfrak{K}'$ in jedem besonderen Falle construirt wird; wir sind also stets imstande die Axe $\mathfrak{z}^{\alpha}$ und ebenso auch die Schraubenlinie $w^{\alpha}$, welche die Länge $(A, K')$ zum Krümmungsradius und $(t, K')$ zur Osculationsebene in $A$ hat, zu construiren. Dass das durch $w^{\alpha}$ in der Schraubung um $z$ bestimmte Helikoid S das gegebene Helikoid H längs der durch $A$ gehenden Schraubenlinie $l$ osculirt, ist nun evident.

Dieses Ergebniss gibt uns sogleich die Construction des Krümmungsmittelpunktes der Normalcurve von H für den Punkt $A$. Man wird den Krümmungsmittelpunkt der betreffenden cyklischen Curve als der Normalcurve von S construiren, was jederzeit rasch bewerkstelligt werden kann.[1] Im allgemeinen Falle errichtet man zu $(A_I, C_I)$ die Senkrechte durch $C_I$, den Schnittpunkt dieser Senkrechten und der Geraden $(A_I, \mathfrak{K}')$ verbindet man mit $z_I$; die Verbindungsgerade bestimmt schon durch ihren Schnittpunkt auf $(A_I, C_I)$ den gesuchten Krümmungsmittelpunkt $N$.

Hiemit hat man auch die das Helikoid H längs $l$ osculirende Fläche S' ermittelt.

---

[1] Man sehe Dr. L. Burmester: Kinematik, I. Bd., 1888, das Capitel über die cyklischen Curven; Dr. Chr. Wiener, Darstellende Geometrie, II. Bd., 1887, S. 343 u. f. — u.

9. Ist $\gamma = o$, so degenerirt die Schraubungsfläche H in eine Rotationsfläche (mit vielfacher Bedeutung, fügen wir hinzu). Unsere Ergebnisse lassen sich ohneweiters auch auf diese Flächen übertragen.

Um die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Rotationsfläche im Punkte $A$ zu ermitteln, kann man unbeschadet der Allgemeinheit eine zweite Ebene, in die wir orthogonal projiciren parallel zu $(A, z)$ wählen.

Die Normalenfläche L längs des durch $A$ gehenden Kreises $l$ ist bekanntlich ein Kegel, dessen Spitze der Punkt $C$ ist, in welchem die Normale $n$ in $A$ die Axe $z$ schneidet. Der Punkt $C$ ist auch schon ein Hauptkrümmungsmittelpunkt.

Der zweite Hauptkrümmungsmittelpunkt ist nach Früherem der Berührungspunkt der Ebene $(t', n)$ mit der Normalenfläche $U^\alpha$ längs der durch $A$ gehenden erzeugenden Curve $u^\alpha$.

Stellt man die Spuren $a, b, c$ der Tangentialebenen dieser Fläche in den Punkten $A$, $B$, $C$ dar und berücksichtigt die projectivische Beziehung zwischen $a_I, b_I, c_I$. und $A_I, B_I, C_I$. so hat man, bezugnehmend auf die Darstellung bei den Helikoiden durch $B_I$ die Parallele zu $a$ zu ziehen, ihren Schnittpunkt auf der Senkrechten $(A_I, \mathfrak{K})$ zu $t_I$ mit $z_I$ zu verbinden, dann gibt diese Verbindungsgerade $i_I$ die Richtung der Spur in der ersten Projectionsebene für die durch $n$ gelegte asymptotische Ebene von $U^\alpha$. Die durch den Schnittpunkt von $t'_I$ mit $i_I$ gezogene Parallele zu $a_I$ schneidet auf $n_I$ den Punkt $M_I$ heraus, welcher die erste Projection des zweiten Krümmungsmittelpunktes $M$ ist.

Dieser Punkt $M$ ist bekanntlich der Krümmungsmittelpunkt der Meridiancurve im Punkte $A$.

Hätte man die Curve $u^\alpha$ durch die Schraubenlinie $w^\alpha$ mit dem Krümmungsmittelpunkt $K'$ und der Osculationsebene $(K', t)$ wie früher ersetzt, so würde wieder die Projection der Schraubungsaxe $\mathfrak{z}^\alpha$ mit $\mathfrak{K}'$ zusammenfallen. Die Richtung für die längs $w^\alpha$ der Rotationsfläche umschriebene Cylinderfläche sei $p$; dreht man $\mathfrak{z}^\alpha_I$ im Sinne der Schraubenlinie $w^\alpha$ um 90° um die Axe $z$, so kann man in dieser Lage von $\mathfrak{z}^\alpha_I$ den Spurpunkt der Richtungsgeraden $p$ annehmen, welche dann $z$ in einem Punkte in der Entfernung $\gamma'$ über der Projectionsebene schneidet, wie aus der allgemeinen Beziehung unmittelbar folgt.

Daraus ergibt sich, dass die Gerade $i_{\text{I}}$ wiederum mit $(z_{\text{I}}, \mathfrak{K}')$ zusammenfällt.

Was nun die Indicatrix der Rotationsfläche betrifft, so liefert für dieselbe $t$ mit der durch $A$ parallel zu $p$ gezogenen Geraden $m$ ein Paar, $t'$ mit der durch $A$ in Bezug auf eine Normalebene der Drehung gezogenen Fallgeraden $m'$ der Tangentialebene $(t, t')$ d. h. mit der Tangente an die Meridiancurve ein zweites Paar conjugirter Durchmesser, genau so wie früher.

Und weiter, wäre $d$ die Berührungscurve der Rotationsfläche mit irgend einer umschriebenen developpablen Fläche, von der etwa der Richtungskegel gegeben wäre, so kann man hiedurch die durch $A$ gehende Erzeugende der Developpablen angeben und man kann hieraus die Tangente der Curve $d$ in $A$ finden und umgekehrt. Würde man überdies imstande sein, den Krümmungsmittelpunkt von $d_{\text{I}}$ für den Punkt $A_{\text{I}}$ zu construiren, so würde man daraus die Osculationsebene und den Krümmungsmittelpunkt von $d$ in $A$ ebenso finden, wie es bei den Helikoiden abgeleitet worden ist. Gleiches gilt auch für die Bestimmung des dem Punkte $A$ entsprechenden Krümmungsmittelpunktes der Schnittcurve irgend einer durch $A$ gelegten Ebene mit der Rotationsfläche.[1]

Den Krümmungsmittelpunkt $M$ der Meridiancurve kann man auch dadurch finden, dass man die mit der gegebenen coaxiale Rotationsfläche zweiten Grades construirt, welche die gegebene längs des Kreises $l$ osculirt; d. h. welche mit ihr drei unendlich benachbarte Kreise gemein hat. Durch diese drei Kreise ist eine einzige solche Fläche zweiten Grades bestimmt. Ihren Schnitt $\mathfrak{u}$ mit der Osculationsebene von $u^a$ in $A$ können wir construiren, da wir von ihm den Punkt $A$ mit dem ihm entsprechenden Krümmungsmittelpunkt $K$ und eine Axe, nämlich die Schnittgerade der Osculationsebene mit der durch $z$ zu ihr normalen Ebene kennen.

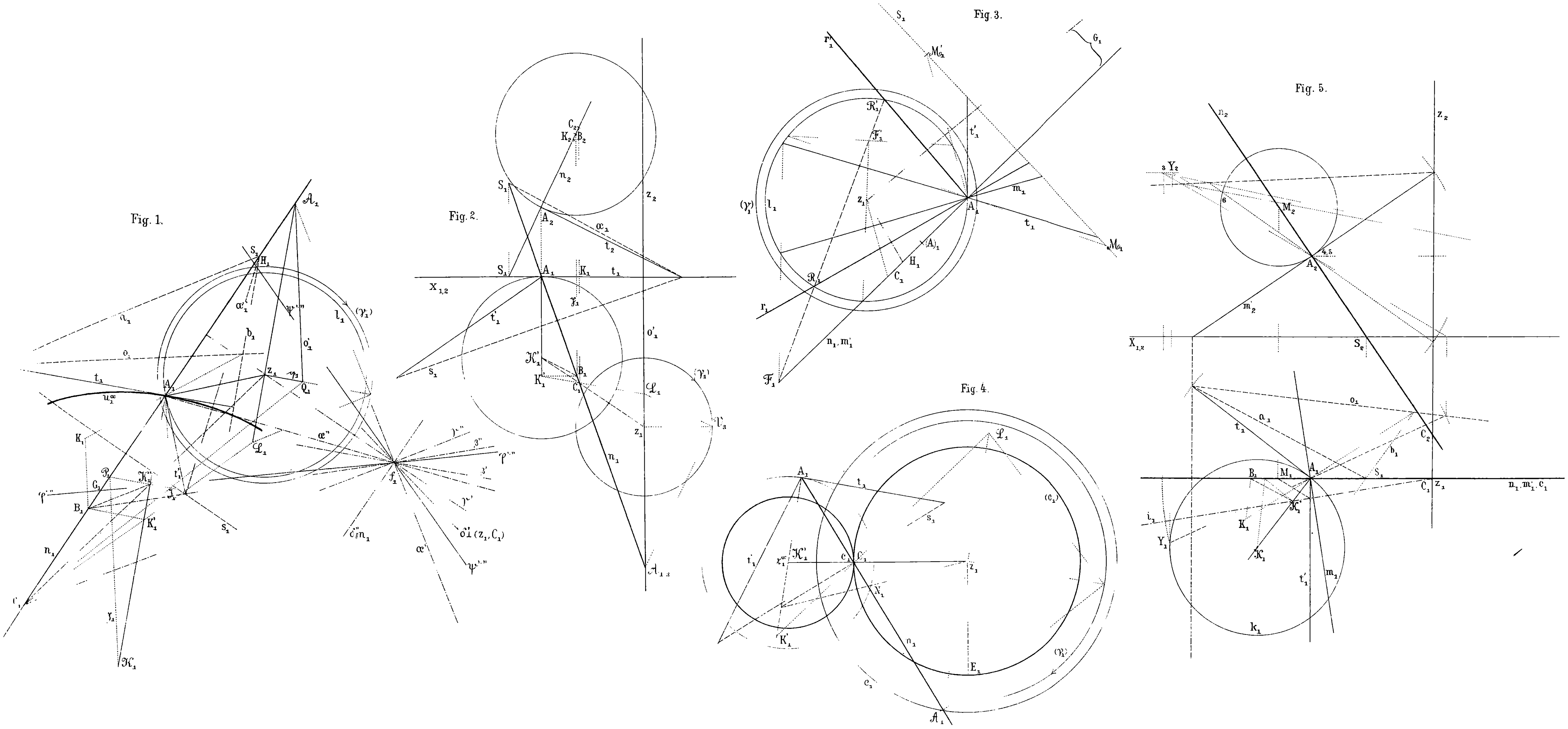
Wir wollen nun den Meridiankegelschnitt $k$ der Fläche zweiten Grades in der Ebene $(A, z)$ bestimmen. Von demselben ist der Punkt $A$ mit der Tangente $m'$ in ihm bekannt; beide bestimmen zwei unendlich nahe Punkte der Meridiancurve, wir

---

[1] Man vergleiche Dr. Chr. Wiener a. a. O. II. Bd. S. 547 u.

J. Sobotka: Krümmung und Indicatricen der Helikoide.






Lith. Anstalt v. J. Barth VI, Wien.

bezeichnen sie mit 4 und 5. Zu diesen liegen symmetrisch in Bezug auf $z$ die Punkte 1 und 2.

Es erübrigt also noch einen Punkt von $k$ zu bestimmen. Dazu ist nur nothwendig, einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{u}$ zu finden und ihn um $z$ zu drehen, bis er in den Meridian hineinfällt.

Kennen wir beispielsweise $\mathfrak{K}$, also den Krümmungskreis $\mathfrak{k}$ von $u_{\mathrm{I}}^{a}$ in $A_{\mathrm{I}}$, so können wir von der centrisch collinearen Lage von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{u}_{\mathrm{I}}$ hiebei Gebrauch machen. Zieht man durch $A_{\mathrm{I}}$ die Gerade, welche mit der Spur $o$ der Osculationsebene einen ebenso grossen Winkel einschliesst wie $t_{\mathrm{I}}$, so ist diese Gerade die Collineationsaxe; sie trifft $\mathfrak{k}$ im Punkte $Y_{\mathrm{I}}$, welcher dem Kegelschnitte angehört. Da $Y$ in der Osculationsebene liegt, so lässt sich $Y_2$ aus $Y_1$ ohneweiters ableiten. Nun drehen wir den Punkt $Y$ bis er in den Meridian kommt und bezeichnen ihn in dieser Lage mit 3. Jetzt ist der Meridiankegelschnitt vollständig bestimmt.

Einen weiteren Punkt von $k$ suchen wir auf der durch $A$ gezogenen Geraden, welche mit $z$ denselben Winkel einschliesst wie $m'$. Wir bezeichnen ihn mit 6. Wir können jetzt das Pascal'sche Sechseck 123456 construiren, welches uns den Punkt 6 liefert.

Der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Punkte 1, 2, 6 gelegt wird, ist der gesuchte Punkt $M$.