Über die aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Juli 1892.)

Ich werde in der vorliegenden Mittheilung, in welcher ich mich auf das Gebiet der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen beschränke, einige bekannte zahlentheoretische Functionen in der Weise verallgemeinern, dass ihr Werth von der für jede von ihnen besonderen Beziehung beeinflusst wird, in welcher ihr Argument zu einer vorgegebenen ganzen complexen Zahl steht, einige auf diese allgemeineren Functionen bezügliche arithmetische Relationen und Sätze aufstellen und sodann einerseits die Werthe von Summen ermitteln, welche dadurch entstehen, dass das Argument einiger von diesen Functionen alle primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ mit einer die reelle Zahl n nicht übersteigenden Norm durchläuft, anderseits Summen von Werthen betrachten, welche bekannte zahlentheoretische Functionen erhalten, wenn für ihr Argument gewisse a u s g e w ä h l t e von den eben genannten complexen Zahlen gesetzt werden.

§. 1. In den folgenden Zeilen wird durch Anfügung der Marke $'$ an ein Summen- oder Productzeichen angedeutet, dass dem Argumente der unter dem Summen- oder Productzeichen stehenden Function nur jene von den ihm in der unmarkirten Summe, beziehungsweise dem unmarkirten Producte zukommenden Werthe ertheilt werden, welche zu einer vorgegebenen Zahl

$$m = \prod_{1} p_{\lambda}^{\alpha_\lambda} \quad (p_\lambda = \text{Primzahl};\ p_\lambda \gtrless p_\varkappa,\ \lambda \gtrless \varkappa)$$

theilerfremd sind, und es werden diejenigen primären Theiler einer ganzen complexen Zahl x, welche σ^{te} Potenzen sind, mit t_σ^σ, ihre complementären Divisoren aber mit d_σ bezeichnet.

Ist

$$x = \prod_{1}^{\nu} q_\lambda^{\alpha_\lambda \sigma + \varepsilon_\lambda} \quad (q_\lambda = \text{Primzahl};\ q_\lambda \gtrless q_\varkappa,\ \lambda \gtrless \varkappa;\ 0 \leqq \varepsilon_\lambda < \sigma)$$

so hat man die Beziehungen

$$\mu_{\sigma, m}(x) = \sum_{d_\sigma}{}' \mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right)$$

$$= (-1)^\gamma \prod_{1}^{\alpha} \{1 + \mu(q_{\lambda_\delta})\} \prod_{1}^{\beta} \mu(q_{\lambda_{\alpha+\varepsilon}}) \quad (\alpha + \beta = \nu)$$

wo das Product bezüglich δ über jene Primtheiler q_μ von x zu erstrecken ist, für welche entweder

$$\alpha_\mu > 0 \quad \text{und} \quad [m, q_\mu] = 1$$

oder

$$(\alpha_\mu - 1)\,\sigma + \varepsilon_\mu \gtrless 0 \quad \text{und} \quad [m, q_\mu] = q_\mu$$

ist, das Product nach ε aber über alle übrigen, und γ die Anzahl derjenigen von den zuletzt genannten Primzahlen ist, für welche die Beziehungen

$$\alpha_\mu = 0 \quad \text{und} \quad [m, q_\mu] = 1$$

bestehen,

$$\mu'_{\sigma, m}(x) = \sum_{t_\sigma}{}' \mu(t_\sigma)$$

$$= \mu(1) \prod_{1}^{\nu} \{1 + \mu(q_\lambda)\}$$

$$\lambda_{\sigma, m}(x) = \sum_{t_\sigma}{}' \mu\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right)$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{\nu}{}' \mu(q_\lambda^{\varepsilon_\lambda}) \prod_{\xi=1}^{\alpha} \{1+\mu(q_{\lambda_\xi})\},$$

wo das Product bezüglich ξ sich auf alle den Bedingungen

$$[m, q_\mu] = q_\mu \quad \text{und} \quad \varepsilon_\mu > 0$$

genügenden Primfactoren von x bezieht,

$$\lambda'_{\sigma, m}(x) = \sum_{d_\sigma}{}' \mu(d_\sigma)$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{\nu}{}' \mu(q_\lambda^{\varepsilon_\lambda}) \prod_{\xi=1}^{\alpha} \{1+\mu(q_{\lambda_\xi})\},$$

wo das auf ξ bezügliche Product über alle den Bedingungen

$$[m, q_\mu] = q_\mu \quad \text{und} \quad \alpha_\mu \sigma + \varepsilon_\mu > 1$$

genügenden Primtheiler von x ausgedehnt werden muss.

Es hat demnach die zahlentheoretische Function

$\mu_{\sigma, m}(x)$ den Werth 0, wenn x durch die σ^{te} Potenz einer in m nicht enthaltenen Primzahl theilbar ist, oder einen Primfactor von m in einer anderen als der σ^{ten} Potenz enthält, den Werth $+1$, wenn x zu m theilerfremd und durch keine σ^{te} Potenz theilbar ist, und den Werth $(-1)^{\tilde{\omega}([m, x])}$ in allen anderen Fällen,

$\mu'_{\sigma, m}(x)$ den Werth 0 oder $+1$, je nachdem x einen in m nicht enthaltenen Primfactor in einer höheren, als der $(\sigma-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält, oder nicht,

$\lambda'_{\sigma, m}(x)$ den Werth 0, falls bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen ein Primtheiler von m mit einem durch σ nicht theilbaren Exponenten auftritt, oder auch nur eine in m nicht enthaltene Primzahl mit einem Exponenten versehen ist, welcher nach dem Modul σ einer von 0 und 1 verschiedenen Zahl congruent ist, und den Werth $(-1)^\tau$ in allen anderen Fällen, wenn τ die Anzahl der Exponenten von der Form $\varkappa\sigma+1$ ist,

$\lambda_{\sigma,m}(x)$ den Werth 0, falls bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen ein Primtheiler von m mit einem die Einheit übersteigenden Exponenten auftritt, oder auch nur eine in m nicht enthaltene Primzahl mit einem Exponenten versehen ist, welcher nach dem Modul σ einer von 0 und 1 verschiedenen Zahl congruent ist, und den Werth $(-1)^\tau$ in allen anderen Fällen, wo τ die Anzahl der Exponenten von der Form $\varkappa\sigma+1$ ist.

Speciell ist

$$\mu_{\sigma,1}(x) = \mu'_{\sigma,1}(x) = \mu_\sigma(x)$$
$$\lambda_{\sigma,1}(x) = \lambda'_{\sigma,1}(x) = \lambda_\sigma(x)$$

und hat

$$\mu'_{1,m}(x) = \lambda'_{1,m}(x) = \sum_{d_1}{}' \mu(d_1)$$

den Werth $+1$, wenn x gleich einer Einheit ist oder nur Primtheiler von m enthält, den Werth 0 in allen anderen Fällen, und

$$\mu_{1,m}(x) = \lambda_{1,m}(x) = \sum_{d_1}{}' \mu\left(\frac{x}{d_1}\right)$$

den Werth $+1$, falls x eine Einheit ist, den Werth $(-1)^{\bar{\omega}([m,x])}$, wenn x durch kein Quadrat theilbar ist und nur Primfactoren von m enthält, und endlich den Werth 0 in allen anderen Fällen.

Den angegebenen Formeln entsprechen offenbar folgende Gleichungen

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x^{\sigma s})} \sum_{y=(\infty)}{}' \frac{1}{N(y^s)} = \sum_{z=(\infty)} \frac{\mu_{s,m}(z)}{N(z^s)}$$

$$\sum_{x=(\infty)}{}' \frac{\mu(x)}{N(x^{\sigma s})} \sum \frac{1}{N(y^s)} = \sum_{z=(\infty)} \frac{\mu'_{\sigma,m}(z)}{N(z^s)}$$

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x^s)} \sum_{=(\infty)}{}' \frac{1}{N(y^{\sigma s})} = \sum_{z=(\infty)} \frac{\lambda'_{\sigma,m}(z)}{N(z^s)} \qquad 1)$$

$$\sum_{x=(\infty)}{}' \frac{\mu(x)}{N(x^s)} \sum \frac{1}{N(y^{\sigma s})} = \sum_{z=(\infty)} \frac{\lambda_{\sigma,m}(z)}{N(z^s)},$$

aus denen man leicht folgende Sätze ableitet:

Die Summe

$$\sum_{d_\sigma} \mu_{\sigma, m}(d_\sigma)$$

hat den Werth $+1$ oder 0, je nachdem x zu m theilerfremd ist oder nicht, und die Summe

$$\sum_{d_1}{}' \mu_{\sigma, m}\left(\frac{x}{d_1}\right) \mu(d_1)$$

den Werth 0, wenn x keine σ^{te} Potenz oder durch eine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist, und ist in allen anderen Fällen gleich $(-1)^{\tilde{\omega}(\sqrt[\sigma]{x})}$

Die Summe

$$\sum_{t_\sigma}{}' \mu'_{\sigma, m}\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right)$$

hat stets den Werth $+1$, während die Summe

$$\sum_{d_1} \mu'_{\sigma, m}\left(\frac{x}{d_1}\right) \mu(d_1)$$

gleich 0 ist, wenn x mit m einen gemeinsamen Theiler hat, oder keine σ^{te} Potenz, oder endlich durch eine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist und in allen anderen Fällen den Werth $(-1)^{\tilde{\omega}(\sqrt[\sigma]{x})}$ besitzt.

Die Summe

$$\sum_{t_\sigma}{}' \lambda'_{\sigma, m}\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right) \mu(t_\sigma)$$

hat den Werth 0 oder $(-1)^{\tilde{\omega}(x)}$, je nachdem x durch ein Quadrat theilbar ist oder nicht, und die Summe

$$\sum_{d_1} \lambda'_{\sigma, m}(d_1)$$

den Werth $+1$ oder 0, je nachdem x die σ^{te} Potenz einer zu m theilerfremden ganzen Zahl ist oder nicht.

Die Summe

$$\sum_{d_\sigma} \lambda_{\sigma, m}(d_\sigma)\, \mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right)$$

ist gleich 0, wenn x durch ein Quadrat theilbar oder zu m nicht theilerfremd ist, und gleich $(-1)^{\bar{\omega}(x)}$ in allen anderen Fällen, während die Summe

$$\sum_{d_1}{}' \lambda_{\sigma, m}\left(\frac{x}{d_1}\right)$$

den Werth $+1$ oder 0 besitzt, je nachdem x eine σte Potenz ist oder nicht.

Nach den eben angegebenen Entwicklungen und Sätzen ist

$$\mathfrak{Q}_{r,\rho, m}(n) = \sum_{x = \sqrt[\rho]{n}}{}' \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) \mu(x)$$

$$= \left(\frac{\pi n}{4}\right)^r \frac{1}{\zeta(r\rho) L_{r\rho} \prod_1^\tau{}_\lambda \left\{1 - \frac{1}{N(p_\lambda^{r\rho})}\right\}} + \varepsilon_n n^{r-\frac{1}{4}} \quad (|\varepsilon_n| < 1)$$

die Anzahl derjenigen Systeme von je r ganzen (gleichen oder verschiedenen) Zahlen des Bereiches (n), deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine anderen ρten Potenzen als solche, welche nur Primtheiler von m und die Einheit enthalten, theilbar ist, und speciell

$$\mathfrak{Z}_{r, m}(n) = \sum_{x = (n)}{}' \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right) \mu(x)$$

die Anzahl derjenigen unter den $\mathfrak{A}^r(n)$ ganzen complexen Zahlen $[z_1, z_2, \ldots, z_r]$ $(z_\lambda = (n), \lambda = 1, 2, \ldots, r)$, welche keine anderen Primtheiler als m besitzen, es bezeichnet

$$\Psi_{r,\rho, m}(n) = \sum_{x = (n)} \overline{P}_{r, \rho\sigma}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \mu_{\sigma, m}(x)$$

$$= \left(\frac{\pi n}{4}\right)^r \zeta(r\rho) L_{r\rho} \prod_1^\tau{}_\lambda \left\{1 - \frac{1}{N(p_\lambda^{r\rho})}\right\} + \varepsilon_n n^{r-\frac{1}{4}}$$

wo $\overline{P}_{r,\mu}(n)$ die Anzahl derjenigen Divisoren aller grössten gemeinsamen Theiler von je r Individuen des Complexes (n) vorstellt, welche ρ^{te} Potenzen sind, die Anzahl derjenigen von den eben genannten Divisoren, welche zu m theilerfremd sind, und es bestehen die Relationen

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\rho}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\mu'_{\sigma,m}(x) = \mathfrak{Q}_{r,\rho\sigma,m}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\rho,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\mu_{\sigma,m}(x) = \mathfrak{Q}_{r,\rho\sigma}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\rho\sigma,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\lambda'_{\sigma,m}(x) = \mathfrak{Q}_{r,\rho}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\rho\sigma}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\lambda_{\sigma,m}(x) = \mathfrak{Q}_{r,\rho,m}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})}{}' \mathfrak{Q}_{r,\rho,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) = \mathfrak{A}^r(n)$$

$$\sum_{x=(n)}{}' \mathfrak{Q}_{r,\rho,m}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda_\rho(x) = \mathfrak{Z}_{r,m}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\rho,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right) = \Psi_{r,1,m}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \Psi_{r,\rho\sigma,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\mu'_{\sigma,m}(x) = \overline{P}_{r,\rho}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \Psi_{r,\rho,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\lambda_{\sigma,m}(x) = \overline{P}_{r,\rho\sigma}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})}{}' \Psi_{r,\rho,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\lambda_\sigma(x) = \Psi_{r,\rho\sigma,m}(n)$$

$$Q_{r,\rho,m}(n)=\sum_{x=(n)}\mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda'_{\rho,m}(x)$$

$$=\left(\frac{\pi n}{4}\right)^r\frac{\zeta(\rho r)L_{\rho r}\prod_1^\lambda\left\{1-\frac{1}{N(p_\lambda^{r\rho})}\right\}}{\zeta(r)L_r}+\varepsilon_n n^{r-\frac{1}{4}}$$

wo $Q_{r,\rho,m}(n)$ die Anzahl derjenigen r-gliedrigen Systeme des Complexes (n) vorstellt, deren grösster gemeinsamer Theiler die ρ^{te} Potenz einer zu m theilerfremden Zahl ist.

Die eben aufgestellten Formeln führen zu folgenden Sätzen:

Der grösste gemeinsame Theiler von r ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ hat im Mittel $\frac{\zeta(r\rho)L_{r\rho}\varphi_{r\rho}(m)}{m^{r\rho}}$ Theiler, welche zur ganzen Zahl m theilerfremde ρ^{te} Potenzen sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r beliebig herausgegriffenen ganzen complexen Zahlen der Form $a+bi$ durch keine anderen ρ^{ten} Potenzen theilbar ist, als solche, welche nur die Einheit und Primfactoren von m enthalten, beträgt im Mittel $\frac{m^{r\rho}}{\zeta(r\rho)L_{r\rho}\varphi_{r\rho}(m)}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r beliebig herausgegriffenen ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ keinen von den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ verschiedenen Primfactor besitzt, ist im Mittel gleich $\frac{m^r}{\zeta(r)L_r\varphi_r(m)}$ $(m=p_1, p_2, \ldots p_\tau)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r beliebig gewählten aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen die σ^{te} Potenz einer durch die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ nicht theilbaren ganzen Zahl ist, beträgt im Mittel $\frac{\zeta(r\sigma)L_{r\sigma}}{\zeta(r)L_r}\prod_1^\lambda\left\{1-\frac{1}{N(p_\lambda^{r\sigma})}\right\}$.

Mit Hilfe der Gleichungen 1) zeigt man ferner, dass $\alpha_{\rho,\sigma,m}(x)=\sum_{d_\sigma}'\lambda_\rho\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right)$ die Differenz aus der Anzahl derjenigen von den Theilern der ganzen complexen Zahl x, welche

$(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen sind, angibt, deren complementärer Divisor entweder zu m theilerfremd und durch keine σ^{te} Potenz theilbar, oder gleich der σ^{ten} Potenz eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primfactoren von m multiplicirt mit niedrigeren Potenzen von in m nicht enthaltenen (anderen) Primzahlen ist, und der Anzahl derjenigen unter ihnen, deren complementärer Divisor das Product aus der σ^{ten} Potenz einer aus einer ungeraden Anzahl von Primtheilern von m zusammengesetzten, durch kein Quadrat theilbaren ganzen Zahl und niedrigeren Potenzen von anderen Primzahlen ist,

$$\beta_{\rho,\sigma,m}(x) = \sum_{d_\sigma}{}' \mu_\rho\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right)$$ die Differenz aus der Anzahl derjenigen von den Theilern der ganzen complexen Zahl x, welche σ^{te} Potenzen sind, vorstellt, deren complementärer Divisor entweder zu m theilerfremd und durch keine $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar, oder gleich der $(\rho\sigma)^{\text{ten}}$ Potenz einer durch kein Quadrat theilbaren, aus einer geraden Anzahl von Primtheilern von m gebildeten ganzen Zahl multiplicirt mit niedrigeren Potenzen von anderen Primzahlen ist, und der Anzahl derjenigen unter ihnen, deren complementärer Divisor das Product aus der $(\rho\sigma)^{\text{ten}}$ Potenz einer aus einer ungeraden Anzahl von nur verschiedenen Primfactoren von m zusammengesetzten ganzen Zahl und niedrigeren Potenzen von anderen Primzahlen ist,

$$\gamma_{\rho,\sigma,m}(x) = \sum_{t_\rho}{}' \mu_{\rho\sigma}\left(\frac{x}{t_\rho^\rho}\right)$$ die Differenz aus der Anzahl derjenigen von den Theilern der ganzen complexen Zahl x, welche ρ^{te} Potenzen sind, darstellt, deren Basis entweder zu m theilerfremd und durch keine σ^{te} Potenz theilbar oder gleich der σ^{ten} Potenz einer durch kein Quadrat theilbaren, aus einer geraden Anzahl von Primtheilern von m zusammengesetzten ganzen complexen Zahl multiplicirt mit niedrigeren Potenzen von in m nicht enthaltenen Primzahlen ist, und der Anzahl derjenigen unter ihnen, deren Basis das Product aus der σ^{ten} Potenz einer aus einer ungeraden Anzahl von nur verschiedenen Primtheilern von m gebildeten ganzen Zahl und niedrigeren Potenzen von anderen Primzahlen ist,

$\delta_{\rho, \sigma, m}(x) = \sum_{t_\sigma}{}' \lambda_\rho\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right)$ die Differenz aus der Anzahl derjenigen von den Theilern der ganzen complexen Zahl x, welche ρ^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, welcher das Product einer aus nur verschiedenen Primtheilern von m gebildeten ganzen Zahl und Potenzen von anderen Primzahlen mit Exponenten von einer der Formen $\varkappa\sigma$, $\varkappa\sigma+1$ ist, bezeichnet, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Form gerade ist, über die Anzahl derjenigen unter ihnen, bei denen dieselbe ungerade ist,

$\varepsilon_{\rho, \sigma, m}(x) = \sum_{t_{\sigma\rho}}{}' \mu_\rho\left(\frac{x}{t_{\sigma\rho}^{\sigma\rho}}\right)$ die Differenz aus der Anzahl derjenigen von den Theilern der ganzen complexen Zahl x, welche ρ^{te} Potenzen eines Productes einer aus nur verschiedenen Primtheilern von m gebildeten ganzen Zahl und Potenzen von anderen Primzahlen mit Exponenten von einer der Formen $\varkappa\sigma$, $\varkappa\sigma+1$ sind, bezeichnet, bei denen die Anzahl der letzten Exponenten gerade ist, über die Anzahl derjenigen unter ihnen, bei denen dieselbe ungerade ist,

$\zeta_{\rho, \sigma, m}(x) = \sum_{t_\sigma}{}' \lambda_\rho\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right)\mu(t_\sigma)$ die Anzahl derjenigen Theiler der ganzen complexen Zahl x vorstellt, welche ρ^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, der durch keine andere σ^{te} Potenz theilbar ist als eine solche, deren Basis nur aus der Einheit und Primfactoren von m zusammengesetzt ist,

$\eta_{\sigma, m}(x) = \sum_{d}{}' \mu_\sigma\left(\frac{x}{d}\right)\mu(d)$ den Überschuss der Anzahl derjenigen unter den Theilern der ganzen complexen Zahl x, welche Producte aus der σ^{ten} Potenz einer aus Primtheilern von m gebildeten ganzen Zahl und von Potenzen von in m nicht enthaltenen Primzahlen mit Exponenten von einer der Formen $\varkappa\sigma$, $\varkappa\sigma+1$ sind, bezeichnet, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Form gerade ist, über die Anzahl derjenigen unter ihnen, bei denen dieselbe ungerade ist.

§. 2. Von den zahlreichen Relationen, welche für die eben erörterten Functionen bestehen, mögen hier die folgenden angeführt werden:

$$\sum_{d_1}{}' \alpha_{\rho,\sigma,m}\left(\frac{x}{d_1}\right)\mu(d_1) = \lambda_\rho(\sqrt[\sigma]{x})$$

$$\sum_{d_{\rho\sigma}} \alpha_{\rho,\sigma,m}(d_{\rho\sigma})\,\mu\left(\sqrt[\rho\sigma]{\frac{x}{d_{\rho\sigma}}}\right) = \mu_{\sigma,m}(x)$$

$$\sum_{d_1}{}' \beta_{\rho,\sigma,m}\left(\frac{x}{d_1}\right)\mu(d_1) = \mu_\rho(\sqrt[\sigma]{x})$$

$$\sum_{d_\sigma} \beta_{\rho,\sigma,m}(d_\sigma)\,\mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right) = \mu_{\rho\sigma,m}(x)$$

$$\sum_{d_1} \gamma_{\rho,\sigma,m}(d_1)\,\mu\left(\frac{x}{d_1}\right) = \mu_{\sigma,m}(\sqrt[\rho]{x})$$

$$\sum_{t_\rho}{}' \gamma_{\rho,\sigma,m}\left(\frac{x}{t_\rho^\rho}\right)\mu(t_\rho) = \mu_{\rho\sigma}(x)$$

$$\sum_{t_\sigma}{}' \delta_{\rho,\sigma,m}\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right)\mu(t_\sigma) = \lambda_\rho(x)$$

$$\sum_{d_\rho} \delta_{\rho,\sigma,m}(d_\rho)\,\mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{x}{d_\rho}}\right) = \lambda'_{\sigma,m}(x)$$

$$\sum_{t_{\rho\sigma}}{}' \varepsilon_{\rho,\sigma,m}\left(\frac{x}{t_{\rho\sigma}^{\rho\sigma}}\right)\mu(t_{\rho\sigma}) = \mu_\rho(x)$$

$$\sum_{d_1} \varepsilon_{\rho,\sigma,m}(d_1)\,\mu\left(\frac{x}{d_1}\right) = \lambda'_{\sigma,m}(\sqrt[\rho]{x})$$

$$\sum_{t_\sigma}{}' \zeta_{\rho,\sigma,m}\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right) = \lambda_\rho(x)$$

$$\sum_{d_\rho} \zeta_{\rho,\sigma,m}(d_\rho)\,\mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{x}{d_\rho}}\right) \mu'_{\sigma,m}(x)$$

$$\sum_{d_1}{}' \eta_{\sigma,m}\left(\frac{x}{d_1}\right) = \mu_\sigma(x)$$

$$\sum_{d_1} \eta_{\sigma,m}(d_1)\,\mu\left(\frac{x}{d_1}\right) = \lambda_{\sigma,m}(x)$$

$$\sum_{d_\sigma} \alpha_{\rho,\sigma,m}(d_\sigma)\,\mu_\rho\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right) = \sum_{d_\sigma} \beta_{\rho,\sigma,m}(d_\sigma)\,\lambda_\rho\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right) = \begin{cases}1\\0,\end{cases}$$

je nachdem x zu m theilerfremd ist oder nicht,

$$\sum_{d_1} \gamma_{\rho,\sigma,m}(d_1)\,\lambda_{\rho\sigma}\left(\frac{x}{d_1}\right) = \sum_{d_1} \delta_{\rho,\sigma,m}(d_1)\,\mu_\sigma\left(\frac{x}{d_1}\right) = \begin{cases}1\\0,\end{cases}$$

je nachdem x die ρ^{te} Potenz einer zu m theilerfremden ganzen Zahl ist oder nicht,

$$\sum_{d_1} \varepsilon_{\rho,\sigma,m}(d_1)\,\mu_\rho\left(\frac{x}{d_1}\right) = \begin{cases}1\\0,\end{cases}$$

je nachdem x die $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz einer zu m theilerfremden ganzen Zahl ist oder nicht,

$$\sum_{d_1} \zeta_{\rho,\sigma,m}(d_1)\,\mu_\rho\left(\frac{x}{d_1}\right) = \begin{cases}(-1)^{\tilde{\omega}(x)}\\0,\end{cases}$$

je nachdem x die σ^{te} Potenz einer zu m theilerfremden, durch kein Quadrat theilbaren ganzen Zahl ist oder nicht,

$$\sum_{d_1} \eta_{\sigma,m}(d_1)\,\lambda_\sigma\left(\frac{x}{d_1}\right) = \begin{cases}(-1)^{\tilde{\omega}(x)}\\0,\end{cases}$$

je nachdem x zu m theilerfremd und durch kein Quadrat theilbar ist oder nicht.

Aus den eben angegebenen Gleichungen ergeben sich folgende Relationen

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,s,m}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\delta_{\rho,\sigma,m}(x) = Q_{\rho,\sigma}(n)$$

$$\sum_{x=(n)} Q_{r,\rho\sigma}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\gamma_{\rho,\sigma,m}(x) = \Psi_{r,\rho,m}(n)$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,\rho}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\delta_{\rho,\sigma,m}(x) = Q_{r,\sigma,m}(n)$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,\rho\sigma,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\lambda_\sigma(x) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\zeta_{\sigma,\tau,m}(x)$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,\rho\sigma,m}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varepsilon_{\rho,\sigma,m}(x) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu_\rho(x)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\varepsilon_{\tau,\sigma,m}(x)=\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})}\Psi_{r,\tau\rho\sigma,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\mu_\tau(x)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\delta_{\tau,\sigma,m}(x)=\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})}\Psi_{r,\tau\rho,m}\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\lambda_\sigma(x)$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Z}_{r,m}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu_\sigma(x)=\sum_{x=(n)}\mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\eta_{\sigma,m}(x)$$

$$\sum_{z_1,z_2,\ldots,z_r=(n)}\gamma_{\rho,\sigma,m}([z_1,z_2,\ldots,z_r])=\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})}\mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\mu_{\sigma,m}(x)$$

$$=\sum_{x=(n)}\mathfrak{Z}_{r,m}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\gamma_{\rho,\sigma,m}(x)$$

$$=\left(\frac{\pi n}{4}\right)^r\frac{\zeta(r\rho)L_{r\rho}\varphi_{r\rho}(m)}{\zeta(r\rho\sigma)L_{r\rho\sigma}m^{r\rho}}+\varepsilon_n n^{r-\frac{1}{4}}$$

$$\sum_{z_1,z_2,\ldots,z_r=(n)}\varepsilon_{\rho,\sigma,m}([z_1,z_2,\ldots,z_r])=\sum_{x=(\sqrt[\rho]{n})}\mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\rho)}\right)\lambda'_{\sigma,m}(x)$$

$$=\sum_{x=(n)}\mathfrak{Z}_r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varepsilon_{\rho,\sigma,m}(x)$$

$$=\left(\frac{\pi n}{4}\right)^r\frac{\zeta(r\rho\sigma)L_{r\rho\sigma}\varphi_{r\rho\sigma}(m)}{\zeta(r\rho)L_{r\rho}m^{r\rho\sigma}}+\varepsilon_n n^{r-\frac{1}{4}}$$

Die letzten zwei Relationen liefern die Theoreme:

Unter denjenigen primären Divisoren des grössten gemeinsamen Theilers von r beliebig herausgegriffenen, aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen, welche ρ^{te} Potenzen sind, gibt es im Mittel um $\dfrac{\zeta(r\rho)L_{r\rho}\varphi_{r\rho}(m)}{\zeta(r\rho\sigma)L_{r\rho\sigma}m^{r\rho}}$ mehr solche, deren Basis entweder zu m theilerfremd und durch keine σ^{te} Potenz theilbar, oder gleich der σ^{ten} Potenz einer durch kein Quadrat theilbaren, aus einer geraden Anzahl von Primtheilern von m zusammengesetzten ganzen complexen Zahl multiplicirt mit niedrigeren Potenzen von in m nicht enthaltenen

Primzahlen ist, als solche, deren Basis das Product aus der σ^{ten} Potenz einer aus einer ungeraden Anzahl von nur verschiedenen Primfactoren von m gebildeten ganzen Zahl und niedrigeren Potenzen von zu derselben theilerfremden Primzahlen ist.

Unter denjenigen primären Divisoren des grössten gemeinsamen Theilers von r beliebig herausgegriffenen, aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen, welche ρ^{te} Potenzen eines Productes einer nur aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ gebildeten ganzen Zahl und Potenzen von anderen Primzahlen mit Exponenten von einer der Formen $\varkappa\sigma$, $\varkappa\sigma+1$ sind, gibt es im Mittel um

$$\frac{\zeta(r\rho\sigma)L_{r\rho\sigma}}{\zeta(r\rho)L_{r\rho}}\prod_{1}^{\lambda}\left\{1-\frac{1}{N(p_\lambda^{r\rho\sigma})}\right\}$$

mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten von der Form $\varkappa\sigma+1$ gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Zum Schlusse dieses Paragraphes will ich noch zwei Ausdrücke für die Anzahl derjenigen Primzahlen des Complexes (n) angeben, welche zu einer gegebenen Zahl m theilerfremd sind.

Die zahlentheoretische Function $\alpha'(x)$ habe den Werth 0, wenn x eine Einheit ist, oder einen Primfactor in einer höheren als der zweiten, oder mehr als einen Primtheiler in einer höheren als der ersten, oder endlich einen Primtheiler von m in einer höheren als der ersten Potenz enthält, es sei ferner

$$\alpha'(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)} f(p_1),$$

wenn x den zu m theilerfremden Primfactor p_1 in der zweiten, alle anderen aber in der ersten Potenz enthält, endlich

$$\alpha'(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} \sum_{\lambda} f(p_\lambda)$$

wo die Summation über alle zu m theilerfremden Primfactoren von x auszudehnen ist, wenn x durch kein Quadrat theilbar ist. Für die so definirte Function hat, wie man leicht findet, die über alle Theiler d_1 der ganzen complexen Zahl x ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_1} \alpha'(d_1)$$

den Werth $f(x)$ oder 0, je nachdem x eine von den Primtheilern von m verschiedene Primzahl ist oder nicht, und demnach ist

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \alpha'(x)$$

gleich der Summe der Werthe, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu m theilerfremden Primzahlen des Complexes (n) durchläuft und

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \alpha'_0(x)$$

die Anzahl dieser Primzahlen, wenn mit $\alpha'_0(x)$ diejenige specielle Function $\alpha'(x)$ bezeichnet wird, für welche die obigen Gleichungen in die folgenden übergehen

$$\alpha'_0(x) = 0$$
$$\alpha'_0(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)}$$
$$\alpha'_0(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)+1}\,\bar{\omega}'(x),$$

wo $\bar{\omega}'(x)$ die Anzahl der zu m theilerfremden Primtheiler von x bezeichnet.

Beachtet man, dass wegen der durch die Gleichung

$$\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$$

ausgedrückten Eigenschaft der zahlentheoretischen Function $\lambda(x)$

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda(x)\,\bar{\omega}'(x)}{N(x^s)} = -\sum_{x=(\infty)} \frac{\lambda(x)}{N(x^s)} \sum_{p}{}' \frac{1}{N(p^s)}$$

ist, wo die Summation bezüglich p über alle zu m theilerfremden Primzahlen im Gebiete der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahlen auszudehnen ist, so erkennt man, dass

$$-\sum_{d_2} \mu\left(\sqrt{\frac{x}{d_2}}\right) \lambda(d_2)\,\tilde{\omega}'(d_2) = \alpha_0'(x)$$

ist, und demnach hat man die Beziehung

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \alpha_0'(x) = -\sum \mathfrak{Q}_2\left(\frac{n}{N(x)}\right) \lambda(x)\,\tilde{\omega}'(x),$$

welche eine Verallgemeinerung einer bekannten Relation des Herrn Bugajef vorstellt.

§. 3. Ist

$$\sum_{d_3} f(d_3)\,\chi\left(\sqrt[3]{\frac{x}{d_3}}\right) = F(x)$$

$$\sum_{t_3} f(t_3)\,\chi\left(\frac{x}{t_3^3}\right) = F_1(x),$$

so besitzt offenbar in der Summe $\sum\limits_{x=(n)} F(x)$ die Function $\chi(y)$ den Coëfficienten

$$F_2\left(\frac{n}{N(y^3)}\right) = \sum_{x=\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right)} f(x),$$

während in der Summe $\sum\limits_{x=(n)} F_1(x)$ die Function $f(y)$ mit dem Factor

$$F_3\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right) = \sum_{x=\left(\frac{n}{N(y^3)}\right)} \chi(x)$$

behaftet ist. Man hat daher die Gleichungen

$$\sum_{x=(n)} F(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})} F_2\left(\frac{n}{N(y^3)}\right) \chi(y)$$

$$\sum_{x=(n)} F_1(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})} F_3\left(\frac{n}{N(y^3)}\right) f(y).$$

Besonders interessante Resultate ergeben sich aus diesen allgemeinen Formeln, wenn eine der Functionen $f(x)$, $\chi(x)$ oder beide Factoren enthalten, welche den Werth $+1$ oder 0 haben, je nachdem x eine eventuell für jeden von ihnen verschiedene Eigenschaft besitzt oder nicht, in welchem Falle $F_2(s)$, beziehungsweise $F_3(s)$ gleich der Summe der Werthe wird, welche der complementäre Factor von $f(x)$, beziehungsweise $\chi(x)$ annimmt, wenn sein Argument alle Individuen des Bereiches (n) durchläuft, denen die erwähnte Eigenschaft zukommt. Von den zahlreichen hieher gehörigen speciellen Fällen mögen in dieser Mittheilung nur zwei besonders behandelt werden.

Es sei zunächst $f(x)$ gleich dem Producte aus $f_1(x)$ und der die Theilerfremdheit des Argumentes zur ganzen Zahl m charakterisirenden Function; alsdann wird $F_2(s)$ gleich der Summe $f_{1,m}(s)$ der Werthe, welche die Function $f_1(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu m theilerfremden Individuen des Complexes (n) durchläuft und speciell für $f_1(x)=1$ gleich der Anzahl

$$\sum_{d} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d)$$

dieser ganzen Zahlen, wo, wie in den folgenden Entwicklungen, die Summation bezüglich d über alle Theiler von m zu erstrecken ist, und es ist

$$F(x) = \sum_{d_\sigma}{}' f_1(d_\sigma)\chi\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right) = X_\sigma^{(m)}(x)$$

$$F_1(x) = \sum_{t_\sigma}{}' f_1(t_\sigma)\chi\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right) = \overline{X}_\sigma^{(m)}(x)$$

$$F_3(s) = \sum_{x=(n)} \chi(x) = X(s),$$

falls $\chi(x)$ nicht für alle zu m nicht theilerfremden Werthe von x verschwindet, während für

$$\chi(x) = \frac{f(x)}{f_1(x)}\chi_1(x)$$

die Beziehungen

$$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{d} f_1(d_\sigma)\chi_1\left(\sqrt[\sigma]{\dfrac{x}{d_\sigma}}\right) = X_\sigma(x) \\ 0 \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} \sum\limits_{t_\sigma} f_1(t_\sigma)\chi_1\left(\dfrac{x}{t_\sigma^\sigma}\right) = \overline{X}_\sigma(x) \\ 0 \end{cases}$$

$$F_3(s) = \sum_{x=(n)} \chi_1(x) = X^{(m)}(x)$$

bestehen, je nachdem x zu m theilerfremd ist oder nicht. Man hat daher die Gleichungen

$$\sum_{x=(n)} X_\sigma^{(m)}(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})} f_{1,m}\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right)\chi(y) \tag{2}$$

$$\sum_{x=(n)} \overline{X}_\sigma^{(m)}(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}' X\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right) f_1(y) \tag{3}$$

$$\sum_{x=(n)}' X_\sigma(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}' {}_{1,m}\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right)\chi_1(y) \tag{4}$$

$$\sum_{x=(n)}' \overline{X}_\sigma(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}' X^{(m)}\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right) f_1(y), \tag{5}$$

deren erste und dritte für $f_1(x) = 1$ folgende Form erhalten

$$\sum_{x=(n)} X_\sigma^{(m)}(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n}),\, d} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y^\sigma d)}\right)\mu(d)\chi(y)$$

$$\sum_{x=(n)}' X_\sigma(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}' \left(\sum_{d} \mathfrak{A}\left(\frac{n}{N(y^\sigma d)}\right)\mu(d)\right)\chi_1(y).$$

Berücksichtigt man, dass

$$\mathfrak{A}(s) = \frac{\pi s}{4} + \varepsilon_s \sqrt{s} \qquad (|\varepsilon_s| < 1)$$

ist, so kann man die letzten zwei Gleichungen auch in folgender Weise schreiben

$$\sum_{x=(n)} X_\sigma^{(m)}(x) = \frac{\pi n \varphi(m)}{4m} \sum_{y=(\infty)} \frac{\chi(y)}{N(y^\sigma)} + \Delta_1 \tag{6}$$

$$\sum_{x=(n)}{}' X_\sigma(x) = \frac{\pi n \varphi(m)}{4m} \sum_{y=(\infty)}{}' \frac{\chi_1(y)}{N(y^\sigma)} + \Delta_2, \tag{7}$$

wo

$$\Delta_1 = -\frac{\pi n \varphi(m)}{4m} \sum_{y=(\infty)-(\sqrt[\sigma]{n})} \frac{\chi(y)}{N(y^\sigma)} +$$

$$+ \sqrt{n} \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n}),\, d} \frac{\varepsilon_{d,y}\, \mu(d)\, \chi(y)}{\sqrt{y^\sigma d}} \qquad (|\varepsilon_{d,y}| < 1)$$

$$\Delta_2 = -\frac{\pi n \varphi(m)}{m} \sum_{y=(\infty)-(\sqrt[\sigma]{n})}{}' \frac{\chi_1(y)}{N(y^\sigma)} +$$

$$+ \sqrt{n} \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}{}' \left(\sum_{d} \frac{\varepsilon_{d,y}\, \mu(d)\, \chi_1(y)}{\sqrt{y^\sigma d}} \right)$$

ist.

Es sei ferner $f(x)$ gleich dem Producte aus $f_1(x)$ und derjenigen Function, welche die Theilerfremdheit des Argumentes zu m und überdies dessen Nichttheilbarkeit durch eine ρ^{te} Potenz charakterisirt; alsdann wird $F_2(s)$ gleich der Summe $f_{2,m}(s)$ der Werthe, welche die Function $f_1(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle zu m theilerfremden, durch keine ρ^{te} Potenz theilbaren Individuen des Complexes (s) durchläuft und speciell für $f_1(x) = 1$ gleich der Anzahl

$$\mathfrak{Q}_\rho^{(m)}(s) = \frac{\pi s \varphi_\rho(m)}{4\zeta(\rho) L_\rho m^\rho} + (\alpha_s + \beta_s \log s) s^{\frac{1}{\rho}}$$

der eben genannten ganzen complexen Zahlen, und es ist

$$F(x) = \sum_{d_\sigma}' \mu_\rho(d_\sigma) f_1(d_\sigma) \chi\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right) = X_\sigma'^{(m)}(x)$$

$$F_1(x) = \sum_{t_\sigma}' \mu_\rho(t_\sigma) f_1(t_\sigma) \chi\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right) = \bar{X}_\sigma'^{(m)}(x)$$

falls $\chi(x)$ den Factor $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ nicht besitzt; ist dies aber der Fall und der zu dieser Function complementäre Factor von $\chi(x)$ gleich $\chi_1(x)$, so hat man die Beziehungen

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{d_\sigma} \mu_\rho(d_\sigma) f_1(d_\sigma) \chi\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{d_\sigma}}\right) = X_\sigma'(x) \\ 0 \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} \sum_{t_\sigma} \mu_\rho(t_\sigma) f_1(t_\sigma) \chi\left(\frac{x}{t_\sigma^\sigma}\right) = \bar{X}_\sigma'(x) \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem x zu m theilerfremd ist oder nicht. Es bestehen daher die Gleichungen

$$\sum_{x=(n)} X_\sigma'^{(m)}(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})} f_{2,m}\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right) \chi(y) \tag{8}$$

$$\sum_{x=(n)} \bar{X}_\sigma'^{(m)}(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}' X\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right) \mu_\rho(y) f(y) \tag{9}$$

$$\sum_{x=(n)}' X_\sigma'(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}' f_{2,m}\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right) \chi_1(y) \tag{10}$$

$$\sum_{x=(n)}' \bar{X}_\sigma'(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}' X^{(m)}\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right) \mu_\rho(y) f_1(y), \tag{11}$$

deren erste und dritte für $f_1(x) = 1$ folgende Form erhalten

$$\sum_{x=(n)} X'^{(m)}_\sigma(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})} \mathfrak{Q}^{(m)}_\sigma\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right)\chi(y) \tag{12}$$

$$= \frac{\pi n \varphi_\rho(m)}{4\zeta(\rho) L_\rho m^\rho} \sum_{y=(\infty)} \frac{\chi(y)}{N(y^\sigma)} + \Delta_3$$

$$\sum_{x=(n)}{}' X'_\sigma(x) = \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}{}' \mathfrak{Q}^{(m)}_\rho\left(\frac{n}{N(y^\sigma)}\right)\chi_1(y) \tag{13}$$

$$= \frac{\pi n \varphi_\rho(m)}{4\zeta(\rho) L_\rho m^\rho} \sum_{y=(\infty)}{}' \frac{\chi_1(y)}{N(y^\sigma)} + \Delta_4,$$

wo

$$\Delta_3 = -\frac{\pi n \varphi_\rho(m)}{4\zeta(\rho) L_\rho m^\rho} \sum_{y=(\infty)-(\sqrt[\sigma]{n})} \frac{\chi(y)}{N(y^\sigma)} +$$

$$+ \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})} (\alpha_y + \beta_y(\log n - \sigma \log N(y))\sqrt[\rho]{\frac{n}{N(y^\sigma)}}\,\chi(y)$$

$$\Delta_4 = -\frac{\pi n \varphi_\rho(m)}{4\zeta(\rho) L_\rho m^\rho} \sum_{y=(\infty)-(\sqrt[\sigma]{n})}{}' \frac{\chi_1(y)}{N(y^\sigma)} +$$

$$+ \sum_{y=(\sqrt[\sigma]{n})}{}' (\alpha_y + \beta_y(\log n - \sigma \log N(y))\sqrt[\rho]{\frac{n}{N(y^\sigma)}}\,\chi_1(y)$$

ist.

Es sollen nun durch Specialisirung der Functionen $f_1(x)$ und $\chi(x)$, beziehungsweise $\chi_1(x)$ bemerkenswerthe zahlentheoretische Relationen und Theoreme ermittelt werden.

Setzt man in den Gleichungen 6), 7), 12) und 13) speciell

$$\chi(x), \text{ beziehungsweise } \chi_1(x) = \mu(x),$$

so wird

$$X^{(m)}_\sigma(x) = \mu_{\sigma,m}(x), \quad X_\sigma(x) = \mu_\sigma(x), \quad X'^{(m)}_\sigma(x) = \eta_{\sigma,m}(x),$$
$$X'_\sigma(x) = \eta_{\sigma,1}(x),$$

und man hat daher die Formeln

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum'_{x=(n)} \mu_\sigma(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\varphi(m)\, m^{\sigma-1}}{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)} \tag{14}$$

$$\sum_{x=(n)} \mu_{\sigma,m}(x) = \frac{\pi n \varphi(m)}{4 m \zeta(\sigma) L_\sigma} + (\alpha_n + \beta_n \log n)\sqrt{n}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{x=(n)} \eta_{\sigma,m}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\varphi_\sigma(m)}{\zeta^2(\sigma) L_\sigma^2 m^\sigma}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum'_{x=(n)} \eta_{\sigma,1}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{1}{\zeta^2(\sigma) L_\sigma^2},$$

aus denen sich folgende Theoreme ergeben:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig herausgegriffene zur ganzen complexen Zahl m theilerfremde ganze Zahl von der Form $a+bi$ durch keine σ^{te} Potenz theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{m^\sigma}{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)}$

Unter denjenigen primären Theilern einer aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahl, welche Producte aus der σ^{ten} Potenz einer aus Primfactoren einer ganzen Zahl m gebildeten ganzen Zahl und in m nicht enthaltenen Primzahlen mit Exponenten von einer der beiden Formen $\varkappa\sigma$, $\varkappa\sigma+1$ sind, gibt es im Mittel $\frac{\varphi_\sigma(m)}{\zeta^2(\sigma) L_\sigma^2 m^\sigma}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Form gerade ist, als solche, bei denen sie ungerade ist.

Unter denjenigen primären Theilern einer zu m theilerfremden ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten von einer der beiden Formen $\varkappa\sigma$, $\varkappa\sigma+1$ auftreten, gibt es im Mittel um $\frac{m}{\varphi(m)\zeta^2(\sigma) L_\sigma^2}$ mehr solche, bei denen die

Anzahl der Exponenten der zweiten Art gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Den speciellen Fall $\sigma = 2$ der Formel 14) hat für das reelle Gebiet Herr A. Berger in seiner bemerkenswerthen Arbeit »Om rötternas antal till kongruenser af andra graden«[1] aufgestellt.

Wird in 6) und 7)

$$\chi(x), \text{ beziehungsweise } \chi_1(x) = \lambda_\rho(x)$$

gesetzt, so ist

$$X_\sigma^{(m)}(x) = \alpha_{\rho,\sigma,m}(x), \; X_\sigma(x) = \alpha_{\rho,\sigma,1}(x),$$

und daher hat man die zwei Formeln

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \alpha_{\rho,\sigma,m}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma} \varphi(m)}{\zeta(\sigma) L_\sigma m}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)}' \alpha_{\rho,\sigma,1}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}(m) \varphi(m)}{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)\, m^{(\rho-1)\sigma+1}},$$

welche zu folgenden Theoremen führen:

Unter denjenigen primären Theilern einer aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahl, welche $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen sind, gibt es im Mittel um $\frac{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma} \varphi(m)}{\zeta(\sigma) L_\sigma m}$ mehr solche, deren complementärer Divisor entweder zu m theilerfremd und durch keine σ^{te} Potenz theilbar oder gleich der σ^{ten} Potenz eines Productes einer geraden Anzahl von verschiedenen Primfactoren von m multiplicirt mit niedrigeren Potenzen von in m nicht enthaltenen Primzahlen ist, als solche, deren complementärer Divisor das Product aus der σ^{ten} Potenz einer aus einer ungeraden Anzahl von Primtheilern von m zusammengesetzten, durch kein Quadrat theilbaren ganzen Zahl und niedrigeren Potenzen von anderen Primzahlen ist.

---

[1] Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. 44. Årgången. År 1887. Stockholm, p. 127—151.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Darstellung einer beliebig herausgegriffenen, zu m theilerfremden ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$ durch ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $\rho\sigma$ einer ganzen Zahl unterhalb σ congruent sind, beträgt im Mittel $\dfrac{\zeta(\rho\sigma)L_{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}(m)}{\zeta(\sigma)L_\sigma\varphi_\sigma(m)m^{(\rho-1)\sigma}}$

Nimmt man ferner in 6) und 7)

$$\chi(x), \text{ beziehungsweise } \chi_1(x)=\mu_\rho(x),$$

in 3) aber $f_1(x)=1$ und $\chi(x)=\mu_{\rho\sigma}(x)$; beziehungsweise $\mu_\rho(x)$ und gleichzeitig $\rho\sigma$ für σ, so wird

$$X_\sigma^{(m)}(x)=\beta_{\rho,\sigma,m}(x),\ X_\sigma(x)=\beta_{\rho,\sigma,1}(x);$$
$$\overline{X}_\sigma^{(m)}(x)=\gamma_{\sigma,\rho,m}(x),\ X(s)=\mathfrak{Q}_{\rho\sigma}(x),$$

beziehungsweise

$$\overline{X}_\sigma^{(m)}(x)=\varepsilon_{\rho,\sigma,m}(x),\ X(s)=\mathfrak{Q}_\sigma(s),$$

und demnach ergeben sich die Gleichungen

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\beta_{\rho,\sigma,m}(x)}{\mathfrak{A}(n)}=\frac{\zeta(\sigma)L_\sigma\varphi(m)}{\zeta(\rho\sigma)L_{\rho\sigma}m}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}'\beta_{\rho,\sigma,1}(x)}{\mathfrak{A}(n)}=\frac{\zeta(\sigma)L_\sigma\varphi_\sigma(m)\varphi(m)m^{(\rho-1)\sigma-1}}{\zeta(\rho\sigma)L_{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}(m)}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\gamma_{\sigma,\rho,m}(x)}{\mathfrak{A}(n)}=\frac{\zeta(\sigma)L_\sigma\varphi_\sigma(m)}{\zeta(\rho\sigma)L_{\rho\sigma}m^\sigma}$$

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{x=(n)}\varepsilon_{\rho,\sigma,m}(x)}{\mathfrak{A}(n)}=\frac{\zeta(\rho\sigma)L_{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}(m)}{\zeta(\sigma)L_\sigma m^{\rho\sigma}},$$

welche folgende Sätze liefern:

Unter denjenigen primären Theilern einer aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahl, welche

σ^{te} Potenzen sind, gibt es im Mittel um $\frac{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi(m)}{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma} m}$ mehr solche, deren complementärer Divisor entweder zu m theilerfremd und durch keine $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar oder gleich der $(\rho\sigma)^{\text{ten}}$ Potenz einer durch kein Quadrat theilbaren, aus einer geraden Anzahl von Primtheilern von m gebildeten ganzen Zahl multiplicirt mit niedrigeren Potenzen von zu m theilerfremden Primzahlen ist, als solche, deren complementärer Divisor das Product aus der $(\rho\sigma)^{\text{ten}}$ Potenz einer aus einer ungeraden Anzahl von Primfactoren von m zusammengesetzten, durch kein Quadrat theilbaren ganzen Zahl und niedrigeren Potenzen von anderen Primzahlen ist.

Unter denjenigen primären Theilern einer zu m theilerfremden ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche σ^{te} Potenzen sind, gibt es im Mittel $\frac{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m) m^{(\rho-1)\sigma}}{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}(m)}$ solche, deren complementärer Divisor durch keine $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist.

Es werde ferner in 6), 7), 12), 13)

$$\chi(x), \text{ beziehungsweise } \chi_1(x) = \frac{1}{N(x^{\varkappa\sigma})},$$

in 3), 9), 11) aber gleich 1 und überdies $f_1(x) = 1$ genommen, alsdann wird

$X_\sigma^{(m)}(x)$ gleich der Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen derjenigen unter den primären Theilern der ganzen complexen Zahl x mit zu m theilerfremden complementären Divisor, welche σ^{te} Potenzen sind,

$\overline{X}_\sigma^{(m)}(x)$ gleich der Anzahl derjenigen unter den primären Theilern der ganzen complexen Zahl x, deren complementärer Divisor eine zu m theilerfremde σ^{te} Potenz ist,

$X_\sigma(x)$ gleich der Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der reciproken Normen derjenigen primären Theiler der ganzen complexen Zahl x, welche σ^{te} Potenzen sind,

$X_\sigma'^{(m)}(x)$ gleich der Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen derjenigen primären Theiler der ganzen complexen Zahl x, welche σ^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, welcher zu m theilerfremd und durch keine ρ^{te} Potenz theilbar ist,

$\overline{X}_\sigma'^{(m)}(x)$ gleich der Anzahl derjenigen primären Theiler der ganzen complexen Zahl x, welche einen zu m theilerfremden complementären Divisor besitzen, der eine σ^{te} Potenz und durch keine $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist,

$X_\sigma'(x)$ gleich der Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen derjenigen primären Theiler der ganzen complexen Zahl x, welche σ^{te} Potenzen sind und einen durch keine ρ^{te} Potenz theilbaren complementären Divisor besitzen,

$\overline{X}_\sigma'(x)$ gleich der Anzahl derjenigen primären Theiler der ganzen complexen Zahl x, deren complementärer Divisor eine σ^{te} Potenz und durch keine $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist, und man erhält die Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} X_\sigma^{(m)}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\zeta((\varkappa+1)\sigma) L_{(\varkappa+1)\sigma} \varphi(m)}{m}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \overline{X}_\sigma^{(m)}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)}{m^\sigma}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)}' X_\sigma(n)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\varphi_{(\varkappa+1)\sigma}(m)\varphi(m)\zeta((\varkappa+1)\sigma) L_{(\varkappa+1)\sigma}}{m^{(\varkappa+1)\sigma+1}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} X_\sigma'^{(m)}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\zeta((\varkappa+1)\sigma) L_{(\varkappa+1)\sigma} \varphi_\rho(m)}{\zeta(\rho) L_\rho m^\rho}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)}' X_\sigma'(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\varphi_{(\varkappa+1)\sigma}(m)\varphi_\rho(m)\zeta((\varkappa+1)\sigma) L_{(\varkappa+1)\sigma}}{\zeta(\rho) L_\rho m^{(\varkappa+1)\sigma+\rho}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \overline{X}_\sigma'^{(m)}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m) m^{(\rho-1)\sigma}}{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}(m)}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)}' \overline{X}_\sigma'(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi(m)\varphi_\sigma(m) m^{(\rho-1)\sigma+1}}{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}(m)},$$

aus denen man sofort folgende Theoreme ableitet:

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen derjenigen primären Theiler einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche σ^{te} Potenzen sind und einen zu m theilerfremden complementären Divisor besitzen, ist im Mittel gleich $\dfrac{\zeta((\varkappa+1)\sigma)L_{(\varkappa+1)\sigma}\varphi(m)}{m}$.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ hat im Mittel $\dfrac{\zeta(\sigma)L_\sigma\varphi(m)}{m}$ primäre Theiler, welche σ^{te} Potenzen sind und einen zu m theilerfremden complementären Divisor besitzen.

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen derjenigen primären Theiler einer zu m theilerfremden ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche σ^{te} Potenzen sind, beträgt im Mittel $\dfrac{\zeta((\varkappa+1)\sigma)L_{(\varkappa+1)\sigma}\varphi_{(\varkappa+1)\sigma}(m)}{m^{(\varkappa+1)\sigma}}$

Jede zu m theilerfremde ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ hat im Mittel $\dfrac{\zeta(\sigma)L_\sigma\varphi_\sigma(m)}{m^\sigma}$ primäre Theiler, welche σ^{te} Potenzen sind.

Jede aus den vierten Einheitswurzeln gebildete ganze complexe Zahl hat im Mittel $\dfrac{\zeta(\sigma)L_\sigma\varphi_\sigma(m)}{m^\sigma}$ primäre Theiler mit einem zu m theilerfremden complementären Divisor, der eine σ^{te} Potenz ist.

Jede zu m theilerfremde ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ hat im Mittel $\dfrac{\zeta(\sigma)L_\sigma\varphi_\rho(m)\varphi_\sigma(m)}{m^{\sigma+\rho-1}\zeta(\rho)L_\rho\varphi(m)}$ primäre Theiler, welche σ^{te} Potenzen sind und einen durch keine ρ^{te} Potenz theilbaren complementären Divisor besitzen.

Die Summe der Normen der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Theiler einer ganzen complexen Zahl von der Form $a+bi$, welche σ^{te} Potenzen sind und einen zu m theilerfremden complementären Divisor besitzen, der durch keine ρ^{te} Potenz theilbar ist, beträgt im Mittel $\dfrac{\zeta((\varkappa+1)\sigma)L_{(\varkappa+1)\sigma}\varphi_\rho(m)}{\zeta(\rho)L_\rho m^\rho}$.

Jede ganze complexe Zahl von der Form $a+bi$ hat im Mittel $\frac{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\rho(m)}{\zeta(\rho) L_\rho m^\rho}$ primäre Theiler, welche σ^{te} Potenzen sind und einen durch keine ρ^{te} Potenz theilbaren, zu m theilerfremden complementären Divisor besitzen.

Die Summe der Normen der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Theiler einer zu m theilerfremden, aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten ganzen complexen Zahl, welche σ^{te} Potenzen sind und einen durch keine ρ^{te} Potenz theilbaren complementären Divisor besitzen, ist im Mittel gleich

$$\frac{\varphi_\rho(m)\,\varphi_{(\varkappa+1)\sigma}(m)\,\zeta((\varkappa+1)\sigma)\,L_{(\varkappa+1)\sigma}}{\zeta(\rho)\,L_\rho\,\varphi(m)\,m^{(\varkappa+1)\sigma+\rho-1}}$$

Jede aus den vierten Einheitswurzeln gebildete ganze complexe Zahl besitzt im Mittel $\frac{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)\, m^{(\rho-1)\sigma}}{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}(m)}$ primäre Theiler, welche einen zu m theilerfremden complementären Divisor besitzen, der eine σ^{te} Potenz und durch keine $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist.

Jede aus den vierten Einheitswurzeln gebildete, zu m theilerfremde ganze complexe Zahl besitzt im Mittel $\frac{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)\, m^{(\rho-1)\sigma}}{\zeta(\rho\sigma) L_{\rho\sigma} \varphi_{\rho\sigma}(m)}$ primäre Theiler mit einem complementären Divisor, der eine σ^{te} Potenz und durch keine $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist.

Wird endlich in 3) und 5)

$$f_1(x) = \mu(x) \text{ und } \chi(x), \text{ beziehungsweise } \chi_1(x) = 1$$

gesetzt, so ist

$$\overline{X}_\sigma^{(m)}(x) = \mu'_{\sigma, m}(x),\ \overline{X}_\sigma(x) = \mu'_{\sigma,1}(x),\ X(s) = \mathfrak{A}(s),$$

und daher hat man die Relationen

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)} \mu'_{\sigma, m}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{m^\sigma}{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=(n)}' \mu'_{\sigma,1}(x)}{\mathfrak{A}(n)} = \frac{\varphi(m)\, m^{\sigma-1}}{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)},$$

welche folgende zwei Theoreme liefern:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus den vierten Einheitswurzeln gebildete ganze complexe Zahl mindestens einen in m nicht enthaltenen Primfactor in einer höheren als der $(\sigma-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthält, ist im Mittel gleich $\frac{m^\sigma}{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zu m theilerfremde aus den vierten Einheitswurzeln gebildete ganze complexe Zahl durch eine σ^{te} Potenz theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{m^\sigma}{\zeta(\sigma) L_\sigma \varphi_\sigma(m)}$.

Ich will bei dieser Gelegenheit nur noch bemerken, dass sich mit Hilfe einiger Formeln, welche ich im ersten Paragraphe dieser Mittheilung aufgestellt habe, die Tchebychef-de Polygnac'schen Untersuchungen über die Vertheilung der reellen Primzahlen in wesentlicher Verallgemeinerung auf das Gebiet der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen übertragen lassen. Auf diesen Gegenstand werde ich später eingehend zurückkommen.