Über den grössten gemeinsamen Theiler

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juni 1892.)

Ich werde im ersten Paragraph der vorliegenden Mittheilung mehrere auf eine reelle Zahl bezügliche Formeln, welche ich vor Kurzem[1] aufgestellt habe, auf den grössten gemeinsamen Theiler von r ganzen Zahlen eines beliebigen Euklid'schen Zahlencomplexes ausdehnen und aus denselben asymptotische Ausdrücke für gewisse zahlentheoretische Functionen und Sätze über arithmetische Wahrscheinlichkeiten im Gebiete der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen ableiten, sodann im zweiten Paragraph mit Hilfe der gefundenen Resultate Verallgemeinerungen und Analoga der in der Theorie der Vertheilung der Primzahlen eine hervorragende Rolle spielenden Tchebychef-de Polygnac'schen Identität ermitteln, und endlich im dritten eine Reihe von Ausdrücken für die Summe der Werthe, welche eine willkürliche Function annimmt, wenn für ihr Argument der Reihe nach die primzahligen grössten gemeinsamen Theiler aller Systeme von r ganzen Zahlen eines beliebigen Euklid'schen Zahlengebietes gesetzt werden, und speciell für die Anzahl dieser Systeme angeben. Schliesslich werde ich im vierten

---

[1] »Arithmetische Relationen.« Diese Sitzungsberichte, Bd. 100, Abth. II. a, S. 1054—1071. Ich benütze diese Gelegenheit, um folgende in dieser Notiz vorkommende Druckfehler zu verbessern: S. 2, Z. 7 v. u. steht $\mathfrak{Q}_\lambda$ statt $\mathfrak{Q}_\sigma$; S. 4, Z. 9 v. o. $B(x) = 1$ statt $B(x) = x$; S. 14, Z. 1, 2, 5 v. u. $\psi_\chi(x)$, $f_\beta(x)$, $\lambda_\chi(x)$ statt $\psi_\chi(x^\rho)$, $f_\beta(x^\rho)$, $\lambda_\chi(x^\rho)$.

Paragraph die sich mir darbietende Gelegenheit benützen, um die Erweiterung eines Kronecker'schen Determinantensatzes auf Determinanten beliebigen Ranges und die Verallgemeinerung eines Euler'schen Theorems aus der Theorie der Zerlegung der ganzen Zahlen in einfacher Weise zu erhärten.

§. 1. Es möge (n) die Gesammtheit aller ganzen nicht associirten complexen Zahlen eines Gebietes, in welchem das Euklid'sche Verfahren des Aufsuchens des grössten gemeinsamen Theilers gilt, bezeichnen, deren Norm die reelle Zahl n nicht übersteigt, $\mathfrak{A}(n)$ die Anzahl der Individuen des Zahlenbereiches (n),

$$\sum_{x=(n)} \chi(x), \text{ beziehungsweise } \prod_{x=(n)} \chi(x)$$

die Summe, beziehungsweise das Product der Werthe vorstellen, welche die willkürliche Function $\chi(x)$ annimmt, wenn ihr Argument die eben erwähnten $\mathfrak{A}(n)$ complexen Zahlen durchläuft, und es sei die über alle der Gleichung

$$N(x^\lambda y^\mu) = N(z)$$

genügenden Werthepaare x, y dieses Bereiches ausgedehnte Summe

$$\sum_{x, y} g(x^\lambda) h(y^\mu) = k(z).$$

Setzt man nun

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right) g(x^\lambda) = G_\lambda(n),$$

so besteht die Beziehung

$$\sum_{z=(n)}' \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(z)}\right) k(z) = \sum_{x=(\sqrt[\mu]{n})} G_\lambda\left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right) h(x^\mu), \tag{I}$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Zahlen des Complexes (n) zu nehmen sind, welche Producte aus einer λ^{ten} und einer μ^{ten} Potenz sind.

Bezeichnet $g_\lambda(y)$ die Summe derjenigen Werthe, welche die Function $g(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler der ganzen Zahl y durchläuft, welche λ^{te} Potenzen sind, $\bar{k}(y)$ aber die Summe jener Werthe, welche die Function $k(x)$ erhält, wenn für ihr Argument alle Theiler von y gesetzt werden, welche Producte aus einer λ^{ten} und einer μ^{ten} Potenz sind, so ist offenbar

$$G_\lambda(n) = \sum_{\ldots, x_r = (n)} g_\lambda([x_1, x_2, \ldots, x_r])$$

$$\sum_{z=(n)}{}' \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(z)}\right) k(z) = \sum_{\ldots, x_r = (n)} \bar{k}([x_1, x_2, \ldots, x_r])$$

und daher

$$\sum_{\ldots, x_r = (n)} \bar{k}([x_1, x_2, \ldots, x_r]) =$$

$$= \sum_{x = (\sqrt[\mu]{n});\; x_1, x_2, \ldots, x_r = \left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right)} h(x^\mu) g_\lambda([x_1, x_2, \ldots, x_r])$$

Für reelle Zahlen verwandeln sich die angegebenen Formeln in die folgenden:

$$G_\lambda(n) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right]^r g(x^\lambda) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{\ldots, x_r = n} g_\lambda([x_1, x_2, \ldots, x_r])$$

$$\sum_{z=1}^{z=n}{}' \left[\frac{n}{z}\right]^r k(z) = \sum_{\ldots, x_r = 1}^{\ldots, x_r = n} \bar{k}([x_1, x_2, \ldots, x_r])$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \bar{k}([x_1, x_2, \ldots, x_r]) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\mu]{n}]} G_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu).$$

Setzt man speciell

$$g(x) = \mu(\sqrt[\lambda]{x}),$$

so erhält $g_\lambda(x)$ den Werth 0 oder 1, je nachdem x durch eine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht, und es stellt demnach $G_\lambda(n)$ die Anzahl $\mathfrak{Q}_{r,\lambda}(n)$ jener Systeme von r ganzen Zahlen des Gebietes (n) vor, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist. Man hat daher die Beziehung

$$\sum_{x=[\sqrt[\mu]{n}]} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right) h(x^\mu) = \sum_{\ldots, x_r = n} h_{\lambda,\mu}([x_1, x_2, \ldots, x_r]), \tag{1}$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\mu]{n}]} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} h_{\lambda,\mu}([x_1, x_2, \ldots, x_r]),$$

wo $h_{\lambda,\mu}(y)$ die Summe jener Werthe vorstellt, welche die Function $h(y)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Theiler der ganzen Zahl y durchläuft, welche μ^{te} Potenzen sind und einen durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen.

Nimmt man speciell $\lambda = 1$, so wird die Function

$$\mathfrak{Q}_{r,1}(n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right) \mu(x) \text{ bez. } \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]^r \mu(x) \tag{2}$$

gleich der Anzahl $\mathfrak{Z}_r(n)$ der theilerfremden Systeme von r ganzen Zahlen des Complexes (n) und es ist die Function $h_{1,\mu}(x)$ gleich $h(x)$ oder 0, je nachdem x eine μ^{te} Potenz ist oder nicht. Man hat daher auch die interessante specielle Relation

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Z}_r\left(\frac{n}{N(x)}\right) h(x) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} h([x_1, x_2, \ldots, x_r]), \tag{3}$$

beziehungsweise für reelle Zahlen

$$\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{Z}_r\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) h(x) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{\ldots = n} h([x_1, x_2, \ldots, x_r]).$$

Setzt man ferner

$$\lambda = 1,\ g(x) = \lambda_\sigma(x),$$

so wird $g_\lambda(x)$ gleich 1 oder 0, je nachdem x eine σ^{te} Potenz ist oder nicht, und demnach ist in diesem Falle $G_\lambda(n)$ die Anzahl $Q_{r,\sigma}(n)$ jener Systeme von r ganzen Zahlen des Gebietes (n), deren grösster gemeinsamer Theiler eine σ^{te} Potenz ist. Durch diese Specialisirung ergibt sich daher die Relation

$$\sum_{x=(\sqrt[\mu]{n})} Q_{r,\sigma}\left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right) h(x^\mu) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \overline{h}_{\sigma,\mu}([x_1, x_2, \ldots, x_r]), \tag{5}$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\mu]{n}]} Q_{r,\sigma}\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \overline{h}_{\sigma,\mu}([x_1, x_2, \ldots, x_r]),$$

wo $\overline{h}_{\sigma,\mu}(y)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Theiler der ganzen Zahl y durchläuft, welche Producte aus einer μ^{ten} und einer σ^{ten} Potenz sind.

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen hier folgende angegeben werden

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right) = \mathfrak{A}^r(n) \tag{6}$$

und speciell

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Z}_r\left(\frac{n}{N(x)}\right) = \mathfrak{A}^r(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\sigma\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \tau_{\lambda,0,\sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \rho_{\varkappa,\lambda}(x) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \psi_\varkappa([x_1, x_2, \ldots, x_r])$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\sigma\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right) \lambda_\sigma(x) = \mathfrak{Q}_{r,\lambda}(n) \tag{7}$$

und speciell

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,\sigma}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda_\sigma(x) = \mathfrak{Z}_r(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)\mu_\sigma(x) = \mathfrak{Q}_{r,\sigma\lambda}(n) \tag{8}$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)\tau_{\rho,\lambda\varkappa,\sigma}(x) = \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_r=(n)} \tau_{\rho\lambda,\varkappa,\sigma}([x_1,x_2,\ldots,x_r])$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\sigma\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(x^{\sigma\lambda})}\right)N(x^{\sigma\lambda\varkappa}) = \sum_{{}_{2},\ldots,x_r=(n)} \sigma_{\varkappa,\lambda,\sigma}([x_1,x_2,\ldots,x_r])$$

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu(x) = \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_r=(\sqrt[\lambda]{n})} \mu([x_1,x_2,\ldots,x_r])$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\mu]{n})} Q_{r,\mu}\left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right)\lambda_\sigma(x) = Q_{r,\sigma\mu}(n) \tag{9}$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} Q_{r,\varkappa\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)\mu_\varkappa(x) = Q_{r,\lambda}(n) \tag{10}$$

und speciell

$$\sum_{x=(n)} Q_{r,\varkappa}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\mu_\varkappa(x) = \mathfrak{A}^r(n) \tag{11}$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} Q_{r,\varkappa\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)\mu(x) = \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_r=(\sqrt[\lambda]{n})} \lambda_\varkappa([x_1,x_2,\ldots,x_r]^\lambda)$$

und speciell

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} Q_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)\mu(x) = \mathfrak{Z}_r(n) \tag{12}$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} Q_{r,2\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)\omega_\varkappa(x) = \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_r=(\sqrt[\lambda]{n})} \psi_\varkappa([x_1,x_2,\ldots,x_r]^\lambda)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} Q_{r,\lambda\mu\sigma}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)\frac{\tau_{\mu,\varkappa,\sigma}(x)}{N(x^\varkappa)} = \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_r=(\sqrt[\lambda]{n})} \rho_{\varkappa,\mu}([x_1,x_2,\ldots,x_r]^\lambda)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} Q_{r,2\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)\frac{f_{\beta-2}(x)\,\psi\left(x^2\pi^{\beta-3}(x)\right)}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(x)}} =$$

$$= \sum_{x_1,x_2,\ldots,x_r=(\sqrt[\lambda]{n})} f_\beta([x_1,x_2,\ldots,x_r]^\lambda).$$

Für die aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen ist, wie ich gezeigt habe,[1]

$$\mathfrak{A}(m) = \frac{\pi m}{4} + \varepsilon_m\sqrt{m} \qquad (|\varepsilon_m|<1),$$

und demnach folgt in diesem Falle aus 2) die Beziehung

$$\mathfrak{Z}_r(n) = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^r \sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x^r)} + \Delta,$$

wo

$$\Delta = -\left(\frac{\pi n}{4}\right)^r \sum_{x=(\infty)-(n)} \frac{\mu(x)}{N(x^r)} +$$

$$+ \sum_{x=(n)} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r-1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^\varkappa \binom{r}{\varkappa} \varepsilon_x^{r-\varkappa}\mu(x)\left(\frac{n}{N(x)}\right)^{\frac{r+\varkappa}{2}}$$

ist. Da nun

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\mu(x)}{N(x^r)} = \frac{1}{\zeta(r)L_r}$$

$$L_r = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\dfrac{\lambda\pi}{2}}{\lambda^r}$$

---

[1] »Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen«. Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturw. Classe, 50. Bd.

ist und, wie man leicht findet, $\frac{|\Delta|}{n^{r-\frac{1}{2}}}$ für alle Werthe von n eine angebbare Zahl nicht überschreiten kann, so hat man die Beziehung

$$\mathfrak{Z}_r(n) = \frac{(\pi n)^r}{4^r \zeta(r) L_r} + A_n n^{r-\frac{1}{2}},$$

wo A_n für alle Werthe von n endlich ist. Für die reellen Zahlen findet man ebenso

$$\mathfrak{Z}_r(n) = \frac{n^r}{\zeta(r)} + A'_n n^{r-\frac{1}{2}}$$

Nach diesen Formeln kann man für diese zwei Gebiete der Gleichung 3) folgende Form geben

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} h([x_1, x_2, \ldots, x_r]) = \frac{(\pi n)^r}{4^r \zeta(r) L_r} \sum_{x=(\infty)} \frac{h(x)}{N(x^r)} + \Delta_1$$

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} h([x_1, x_2, \ldots, x_r]) = \frac{n^r}{\zeta(r)} \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{h(x)}{x^r} + \Delta_2,$$

wo

$$\Delta_1 = -\frac{(\pi n)^r}{4^r \zeta(r) L_r} \sum_{x=(\infty)-(n)} \frac{h(x)}{N(x^r)} + n^{r-\frac{1}{2}} \sum_{x=(n)} A_x \frac{h(x)}{N(x^{r-\frac{1}{2}})}$$

$$\Delta_2 = \frac{n^r}{\zeta(r)} \sum_{x=n+1}^{x=\infty} \frac{h(x)}{N(x^r)} + \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]^{r-\frac{1}{2}} A'_x h(x)$$

ist, in welchen sie, falls

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\Delta_1|}{n^r} = 0, \quad \lim_{n=\infty} \frac{|\Delta_2|}{n^r} = 0$$

ist, zur Herleitung interessanter asymptotischer Gesetze der Zahlentheorie und arithmetischer Wahrscheinlichkeiten dient. Die erste von diesen Gleichungen habe ich früher auf einem anderen Wege hergeleitet. Mit Hilfe der eben aufgestellten zwei Gleichungen leitet man leicht folgende Relationen her:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} [x_1, x_2, \ldots, x_r]^{\varkappa}}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{\zeta(r-\varkappa) L_{r-\varkappa}}{\zeta(r) L_r} \quad (r-\varkappa > 1)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_{2r} = (n)} [x_1, x_2, \ldots, x_{2r}]^{2\varkappa}}{\mathfrak{A}^{2r}(n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(2r+1) B_{r-\varkappa} L_{2r-2\varkappa}}{(2\pi)^{2\varkappa}\Gamma(2r-2\varkappa+1) B_r L_{2r}} \quad (r-\varkappa > 0)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} f_\beta([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = (\zeta(r) L_r)^{\beta-1}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_{2r} = (n)} f_\beta([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}])}{\mathfrak{A}^{2r}(n)} = \left(\frac{(2\pi)^{2r} B_r L_{2r}}{2\Gamma(2r+1)}\right)^{\beta-1}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \lambda([x_1, x_2, \ldots, x_r]) f_\beta([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \left(\frac{(2\pi)^{2r} B_r L_{2r}}{2\Gamma(2r+1)}\right)^{\beta} \frac{1}{(\zeta(r) L_r)^{\beta+1}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_{2r} = (n)} \lambda([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}]) f_\beta([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}])}{\mathfrak{A}^{2r}(n)} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2r(\beta-1)}\Gamma(2r+1)}{2 B_r L_{2r}} \left\{\frac{\Gamma(2r+1) B_{2r} L_{4r}}{\Gamma(4r+1) B_r L_{2r}}\right\}^{\beta}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} f_{\beta-1}([x_1, x_2, \ldots, x_r])\, \psi([x_1, x_1, \ldots, x_r]^2 \pi^{\beta-2}([x_1, x_2, \ldots, x_r]))\, (\beta-1)^{-\bar{\omega}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \frac{2\,\Gamma(2r+1)(\zeta(r)\,L_r)^\beta}{(2\pi)^{2r} B_r L_{2r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_{2r} = (n)} f_{\beta-1}([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}])\, \psi([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}]^2 \pi^{\beta-2}([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}]))\, (\beta-1)^{-\bar{\omega}([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}])}}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \frac{2^{\beta-1}\Gamma(4r+1)}{(2\pi)^{2r(2-\beta)} B_{2r} L_{4r}} \left\{ \frac{B_r L_{2r}}{\Gamma(2r+1)} \right\}^\beta$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \tau_{\rho,\varkappa,\sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{\zeta(\rho(r-\varkappa))\, L_{\rho(r-\varkappa)}}{\zeta(\sigma\rho(r-\varkappa))\, L_{\sigma\rho(r-\varkappa)}} \qquad (\rho(r-\varkappa) > 1)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \tau_{2\rho,\varkappa,\sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{\Gamma(2\sigma\rho(r-\varkappa)+1)\, B_{\rho(r-\varkappa)}\, L_{2\rho(r-\varkappa)}}{(2\pi)^{2\rho(r-\varkappa)(\sigma-1)}\, \Gamma(2\rho(r-\varkappa)+1)\, B_{\sigma\rho(-\varkappa)}\, L_{2\sigma\rho(r-\varkappa)}} \qquad (\rho(r-\varkappa) > 0)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \tau_{\rho,\varkappa,2\sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{2\,\Gamma(2\sigma\rho(r-\varkappa)+1)\, \zeta(\rho(r-\varkappa))\, L_{\rho(r-\varkappa)}}{(2\pi)^{2\sigma\rho(r-\varkappa)}\, B_{\sigma\rho(r-\varkappa)}\, L_{2\sigma\rho(r-\varkappa)}} \qquad (\rho(r-\varkappa) > 1)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \tau_{\rho, r-2\lambda, \sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \frac{\Gamma(2\lambda\rho\sigma+1) B_{\lambda\rho} L_{2\lambda\rho}}{(2\pi)^{2\lambda\rho(\sigma-1)} \Gamma(2\lambda\rho+1) B_{\lambda\rho\sigma} L_{2\lambda\rho\sigma}} \qquad (\lambda > 0)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \psi([x_1, x_2, \ldots, x_r]^2)}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{2\Gamma(2r+1)(\zeta(r) L_r)^2}{(2\pi)^{2r} B_r L_{2r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_{2r} = (n)} \psi([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}]^2)}{\mathfrak{A}^{2r}(n)} = \frac{\Gamma(4r+1)(B_r L_{2r})^2}{2 B_{2r} \{\Gamma(2r+1)\}^2 L_{4r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \psi^2([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{2\Gamma(2r+1)(\zeta(r) L_r)^3}{(2\pi)^{2r} B_r L_{2r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_{2r} = (n)} \psi^2([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}])}{\mathfrak{A}^{2r}(n)} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2r} \Gamma(4r+1)(B_r L_{2r})^3}{4 B_{2r} \{\Gamma(2r+1)\}^3 L_{4r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \omega([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{2\Gamma(2r+1)\zeta(r) L_r}{(2\pi)^{2r} B_r L_{2r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_{2r} = (n)} \omega([x_1, x_2, \ldots, x_{2r}])}{\mathfrak{A}^{2r}(n)} = \frac{\Gamma(4r+1) B_r L_{2r}}{(2\pi)^{2r} \Gamma(2r+1) B_{2r} L_{4r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} P_{\varkappa, \tau}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \zeta(\tau(r-\varkappa)) L_{\tau(r-\varkappa)}$$

$$(\tau(r-\varkappa) > 1)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} P_{\varkappa, 2\tau}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2\tau(r-\varkappa)} B_{\tau(\varkappa-\varkappa)} L_{2\tau(r-\varkappa)}}{2\Gamma(2\tau(r-\varkappa)+1)} \qquad (\tau(r-\varkappa) > 0)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} P_{r-2\lambda, \tau}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2\lambda\tau} B_{\lambda\tau} L_{2\lambda\tau}}{2\Gamma(2\lambda\tau+1)} \qquad (\lambda > 0)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \alpha_{\rho, \sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{\zeta(\rho\sigma r) L_{\rho\sigma r}}{\zeta(r\sigma) L_{r\sigma}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \alpha_{\rho, 2\sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2r\sigma(\rho-1)} \Gamma(2\sigma r+1) B_{\rho\sigma r} L_{2\rho\sigma r}}{2\Gamma(2\rho\sigma r+1) B_{\sigma r} L_{2\sigma r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \alpha_{2\rho+1, 2\sigma+1}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \frac{\pi^{2\rho r(2\sigma+1)} \Gamma\big(r(2\sigma+1)\big) \tau_{(2\rho+1)(2\sigma+1)r-1} \zeta\big((2\rho+1)(2\sigma+1)r\big)}{2^{2\rho(2\sigma+1)r} \Gamma\big((2\rho+1)(2\sigma+1)r\big) \tau_{2\sigma r} \zeta\big((2\sigma+1)r\big)}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \chi_{\sigma, \rho}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{1}{\zeta(\sigma r) \zeta(\rho\sigma r) L_{\sigma r} L_{\rho\sigma r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \chi_{2\sigma, \rho}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} =$$

$$= \frac{4\Gamma(2\sigma r+1) \Gamma(2\rho\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r(\rho+1)} B_{\sigma r} B_{\rho\sigma r} L_{2\sigma r} L_{2\rho\sigma r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} \chi_{2\sigma+1, 2\rho+1}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} \doteq$$

$$= \frac{4^{(\rho+1)(2\sigma r+1)+1}}{\pi^{2(\rho+1)(2\sigma r+1)} \tau_{2\sigma r} \tau_{r(2\rho+1)(2\sigma+1)-1} \zeta((2\sigma+1)r) \zeta((2\rho+1)(2\sigma+1)r)}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \left(\frac{m^2}{[x_1, x_2, \ldots, x_r]}\right) \mu_\sigma([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \prod_1^\lambda \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{\sigma r}}} \frac{1}{\zeta(\sigma r)} \qquad (m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \quad p_\tau^{\alpha_\tau})$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \left(\frac{m^2}{[x_1, x_2, \ldots, x_r]}\right) \mu_{2\sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \prod_1^\lambda \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{2\sigma r}}} \frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r} B_{\sigma r}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} P'_{-\varkappa, \sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \zeta(\sigma(r+\varkappa)) \prod_1^\lambda \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{\sigma(\varkappa+r)}}\right)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\displaystyle\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} P'_{-\varkappa, 2\sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2\sigma(r+\varkappa)} B_{\sigma(r+\varkappa)}}{2\Gamma(2\sigma(r+\varkappa)+1)} \prod_1^\lambda \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{2\sigma(\varkappa+r)}}\right)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} P'_{r-2\lambda, \sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} = \frac{(2\pi)^{2\lambda\sigma} B_{\lambda\sigma}}{2\Gamma(2\lambda\sigma+1)} \prod_1^{\mu} \left(1 - \frac{1}{p_\mu^{2\lambda\sigma}}\right) \qquad (\lambda > 0)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \tau'_{\sigma, -\varkappa, \alpha}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} = \frac{\zeta(\sigma(r+\varkappa))}{\zeta(\alpha\sigma(r+\varkappa))} \prod_1^{\lambda} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda^{\sigma(r+\varkappa)}}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{\alpha\sigma(r+\varkappa)}}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \tau'_{2\sigma, -\varkappa, \alpha}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} = \frac{\Gamma(2\alpha\sigma(r+\varkappa)+1) B_{\sigma(r+\varkappa)}}{(2\pi)^{2\sigma(r+\varkappa)(\alpha-1)} B_{\alpha\sigma(r+\varkappa)} \Gamma(2\sigma(r+\varkappa)+1)} \prod_1^{\lambda} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda^{2\sigma(r+\varkappa)}}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{2\alpha\sigma(r+\varkappa)}}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \tau'_{\sigma, -\varkappa, 2\alpha}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} = \frac{2\Gamma(2\alpha\sigma(r+\varkappa)+1)\zeta(\sigma(r+\varkappa))}{(2\pi)^{2\alpha\sigma(r+\varkappa)} B_{\alpha\sigma(r+\varkappa)}} \prod_1^{\lambda} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda^{\sigma(r+\varkappa)}}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{2\alpha\sigma(r+\varkappa)}}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \tau'_{\sigma, 2\lambda-r, \alpha}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} = \frac{\Gamma(2\lambda\alpha\sigma+1) B_{\lambda\sigma}}{(2\pi)^{2\lambda\sigma(\alpha-1)} \Gamma(2\lambda\sigma+1) B_{\alpha\lambda\sigma}} \prod_1^{\mu} \frac{1 - \frac{1}{p_\mu^{2\lambda\sigma}}}{1 - \frac{1}{p_\mu^{2\lambda\alpha\sigma}}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \alpha_{\rho, \sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} = \frac{\zeta(r\rho\sigma)}{\zeta(r\sigma)} \prod_1^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{r\rho\sigma}}\right)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \alpha'_{\rho, 2\sigma}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2r\sigma(\rho-1)}\Gamma(2r\sigma+1)B_{r\rho\sigma}}{2\Gamma(2r\rho s+1)B_{r\sigma}} \prod_1^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{2r\rho\sigma}}\right)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \chi'_{\sigma, \rho}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \frac{1}{\zeta(\sigma r)\zeta(\rho\sigma r) \prod\limits_1^{\tau} {}^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^\rho}\right)}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_2, \ldots, x_r = n} \chi'_{2\sigma, \rho}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \frac{4\Gamma(2\sigma r+1)\Gamma(2\rho\sigma r+1)}{(2\pi)^{2r\sigma\rho(+1)}B_{\sigma r}B_{\rho\sigma r} \prod\limits_1^{\tau} {}^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^\rho}\right)}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{= n} \chi'_{\sigma, 2\rho}([x_1, x_3, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \frac{\Gamma(2\rho\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\rho\sigma r}B_{\rho\sigma r}\zeta(\sigma r) \prod\limits_1^{\tau} {}^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{2\rho}}\right)}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} B([x_1, x_2, \ldots, x_r], \sigma, \rho)}{n^r} = \frac{\zeta(r\sigma\rho)}{\zeta(r\sigma)} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda^{r\rho\sigma}}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{r\sigma}}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} B([x_1, x_2, \ldots, x_r], 2\sigma, \rho)}{n^r} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{r\sigma(\rho-1)}\,\Gamma(2r\sigma+1)\,B_{r\sigma\rho}}{\Gamma(2r\sigma\rho+1)\,B_{r\sigma}} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1 - \frac{1}{p_\lambda^{2r\sigma\rho}}}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{2r\sigma}}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \left(\frac{m^2}{[x_1, x_2, \ldots, x_r]}\right) C_{\sigma,\rho}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \frac{\zeta(r\sigma\rho)}{\zeta(r\rho)} \prod_{1}^{\tau} {}^{\lambda} \frac{\left(1 - \frac{1}{p_\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{r\sigma\rho}}\right)}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{r\rho}}}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_r = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_r = n} \left(\frac{m^2}{[x_1, x_2, \ldots, x_r]}\right) C_{\sigma,2\rho}([x_1, x_2, \ldots, x_r])}{n^r} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{2r\rho(\sigma-1)}\,\Gamma(2r\rho+1)\,B_{r\sigma\rho}}{\Gamma(2r\sigma\rho+1)\,B_{r\rho}} \prod_{1}^{\lambda} \frac{\left(1 - \frac{1}{p_\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{2r\sigma\rho}}\right)}{1 - \frac{1}{p_\lambda^{2r\rho}}}$$

wo $C_{\sigma,\rho}(x)$ den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen ein Exponent auftritt, welcher nach dem Modul $\rho\sigma$ grösser als $\rho - 1$ ist, oder nicht.

In den bisher aufgestellten Formeln sind folgende Theoreme enthalten:

Dividirt man die Zahl n durch die Normen aller dem Complexe (n) angehörigen λ^{ten} Potenzen von Zahlen, die nur aus verschiedenen complexen Primfactoren zusammengesetzt sind, und versieht die r^{te} Potenz der Anzahl der Individuen des irgend einem der erhaltenen Quotienten entsprechenden Theilbereiches von (n) mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die λ^{te} Wurzel jener Zahl, deren Norm als Divisor auftritt, aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, so ist das Aggregat der so entstehenden Zahlen gleich der Anzahl der Systeme von r Zahlen des Complexes (n), deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist

Dividirt man die Zahl n durch die Normen aller dem Complexe (n) angehörigen λ^{ten} Potenzen und bestimmt für jeden Theilbereich von (n), der irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich der r^{ten} Potenz der Anzahl der Individuen des Gesammtbereiches.

Dividirt man die Zahl n durch die Normen aller dem Complexe (n) angehörigen ganzen Zahlen und bestimmt für jeden Theilbereich von (n), der irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl der theilerfremden Systeme von r ganzen Zahlen, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich der r^{ten} Potenz der Anzahl der Individuen des Gesammtcomplexes.

Dividirt man die Zahl n durch die λ^{ten} Potenzen der Normen jener Zahlen des Complexes (n), welche nur aus $(\varkappa\sigma)^{\text{ten}}$ und $(\varkappa\sigma+1)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzt sind, und bestimmt für jeden Theilbereich des Complexes (n), welcher irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl derjenigen Systeme von r Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine $(\sigma\lambda)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar ist, so ist die Summe derjenigen von ihnen, welche einer aus einer geraden Anzahl von $(\varkappa\sigma+1)^{\text{ten}}$ und einer beliebigen Anzahl von $(\varkappa\sigma)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzten Basiszahl der Norm des Divisors entsprechen, um die Anzahl derjenigen Systeme von r Zahlen des Gesammtcomplexes, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, grösser als die Summe der übrigen Anzahlen.

Dividirt man die Zahl n durch die Normen jener Zahlen des Complexes (n), welcher nur aus $(\varkappa\sigma)^{\text{ten}}$ und $(\varkappa\sigma+1)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzt sind, und bestimmt für jeden Theilbereich des Complexes (n), welcher irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl derjenigen Systeme von r Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, so ist die Summe derjenigen von ihnen, für welche die Zahl, deren Norm als Divisor auftritt, aus einer geraden Anzahl von $(\varkappa\sigma+1)^{\text{ten}}$ und einer beliebigen Anzahl von $(\varkappa\sigma)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzt ist, um die Anzahl der theilerfremden Systeme von r ganzen Zahlen des Gesammtcomplexes grösser, als die Summe der übrigen Anzahlen.

Dividirt man die Zahl n durch die λ^{ten} Potenzen der Normen jener Zahlen des Complexes (n), welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und bestimmt für jeden Theilbereich dieses Complexes, welcher irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl derjenigen Systeme von r Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich der Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen des Gesammtbereiches, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine $(\sigma\lambda)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Dividirt man die Zahl n durch die Normen jener Zahlen des Complexes (n), welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und bestimmt für jeden Theilbereich dieses Complexes, welcher irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl der theilerfremden Systeme von r ganzen Zahlen, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich der Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen des Gesammtbereiches, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Dividirt man die Zahl n durch die Normen jener Zahlen des Complexes (n), welche nur aus $(\varkappa\sigma)^{\text{ten}}$ und $(\varkappa\sigma+1)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzt sind, und versieht die r^{te} Potenz der Anzahl der Individuen des irgend einem der erhaltenen Quotienten entsprechenden Theilbereiches von (n) mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die Zahl, deren Norm als Divisor auftritt, aus einer geraden Anzahl von $(\varkappa\sigma+1)^{\text{ten}}$ und einer beliebigen Anzahl von $(\varkappa\sigma)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzt ist oder nicht, so ist das Aggregat der so entstehenden Zahlen gleich der Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen des Gesammtcomplexes, deren grösster gemeinsamer Theiler eine σ^{te} Potenz ist.

Dividirt man die Zahl n durch die λ^{ten} Potenzen der Normen aller dem Complexe (n) angehörigen Zahlen, welche nur aus verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt sind, und versieht die Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen des irgend einem der so erhaltenen Quotienten entsprechenden Theilbereiches von (n) mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die λ^{te} Wurzel jener Zahl, deren Norm als Divisor auftritt, aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, so ist das Aggregat der so entstehenden Zahlen gleich der Anzahl der theilerfremden Systeme von r ganzen Zahlen des Gesammtcomplexes.

Dividirt man die Zahl n durch die λ^{ten} Potenzen der Normen aller dem Complexe (n) angehörigen Zahlen, welche durch keine $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und bestimmt für jeden Theilbereich dieses Complexes, der irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler eine $(\varkappa\lambda)^{\text{te}}$ Potenz ist, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich der Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen des Gesammtcomplexes, deren grösster gemeinsamer Theiler eine λ^{te} Potenz ist.

Dividirt man die Zahl n durch die Normen aller dem Complexe (n) angehörigen Zahlen, welche durch keine $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und bestimmt für jeden Theilbereich dieses Complexes, der irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler eine $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz ist, so ist die Summe dieser Anzahlen gleich der r^{ten} Potenz der Anzahl der Individuen des Gesammtcomplexes.

Dividirt man die Zahl n durch die μ^{ten} Potenzen der Normen jener Zahlen des Complexes (n), welche nur aus $(\varkappa\sigma)^{\text{ten}}$ und $(\varkappa\sigma+1)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzt sind, und bestimmt für jeden Theilbereich dieses Complexes, welcher irgend einem der so entstehenden Quotienten entspricht, die Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler eine μ^{te} Potenz ist, so übertrifft die Summe derjenigen Anzahlen, für welche die μ^{te} Wurzel der Zahl, deren Norm als Divisor auftritt, aus einer geraden Anzahl von $(\varkappa\sigma+1)^{\text{ten}}$ und einer beliebigen Anzahl von $(\varkappa\sigma)^{\text{ten}}$ Potenzen von Primzahlen zusammengesetzt ist, die Summe der übrigen um die Anzahl derjenigen Systeme von r Zahlen des Gesammtcomplexes, welche $(\sigma\mu)$ Potenzen sind.

Für reelle Zahlen ist in den vorstehenden Sätzen das Wort »Norm« wegzulassen.

Die $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz des grössten gemeinsamen Theilers von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ ist im Mittel gleich $\dfrac{\zeta(r-\varkappa)L_{r-\varkappa}}{\zeta(r)L_r}$

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ hat im Mittel den Werth $\dfrac{\zeta(r-1)L_{r-1}}{\zeta(r)L_r}$

Die $(2\varkappa)^{\text{te}}$ Potenz des grössten gemeinsamen Theilers von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ ist im Mittel gleich $\dfrac{\Gamma(2r+1)B_{r-\varkappa}L_{2r-2\varkappa}}{(2\pi)^{2\varkappa}\Gamma(2r-2\varkappa+1)B_rL_{2r}}$.

Das Quadrat des grössten gemeinsamen Theilers von zehn primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ hat im Mittel den Werth $\dfrac{99L_{16}}{10\pi^2L_{20}}$

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ lässt sich im Mittel auf $\{\zeta(r)L_r\}^{\beta-1}$ verschiedene Arten in β Factoren zerlegen.

Der grösste gemeinsame Theiler von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ kann im Mittel auf

$\left\{\frac{(2\pi)^{2r}B_r L_{2r}}{2\Gamma(2r+1)}\right\}^{\beta-1}$ verschiedene Arten in β Factoren zerlegt werden.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von vier primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ kann im Mittel auf $\frac{\pi^8 L_4^2}{8100}$ verschiedene Arten in drei Factoren zerlegt werden.

Der grösste gemeinsame Theiler von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ kann im Mittel $L_r^{\beta-1}$-mal so oft in β Factoren zerlegt werden, als der grösste gemeinsame Theiler von r reellen ganzen Zahlen.

Die Summe der Normen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Theiler des grössten gemeinschaftlichen Divisors von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$, welche ρ^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $\rho(r-\varkappa)>1$ im Mittel $\frac{\zeta(\rho(r-\varkappa))L_{\rho(r-\varkappa)}}{\zeta(\sigma\rho(r-\varkappa))L_{\sigma\rho(r-\varkappa)}}$.

Die Summe der Normen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Theiler des grössten gemeinschaftlichen Divisors von r primären ganzen, aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen, welche $(2\rho)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $\rho(r-\varkappa)\geqq 1$ im Mittel $\frac{\Gamma(2\sigma\rho(r-\varkappa)+1)B_{\rho(r-\varkappa)}L_{2\rho(r-\varkappa)}}{(2\pi)^{2\rho(r-\varkappa)(\sigma-1)}\Gamma(2\rho(r-\varkappa)+1)B_{\sigma\rho(r-1)}L_{2\sigma\rho(r-\varkappa)}}$.

Die Summe der Normen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Theiler des grössten gemeinsamen Divisors von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen, welche ρ^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $\rho(r-\varkappa)>1$ im Mittel $\frac{2\Gamma(2\sigma\rho(r-\varkappa)+1)\zeta(\rho(r-\varkappa))L_{\rho(r-\varkappa)}}{(2\pi)^{2\sigma\rho(r-\varkappa)}B_{\sigma\rho(r-\varkappa)}L_{2\sigma\rho(r-\varkappa)}}$.

Die Summe der $(r-2\lambda)^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen derjenigen primären Theiler des grössten gemeinsamen Divisors von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen, welche ρ^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $\lambda\rho>0$ im Mittel $\frac{\Gamma(2\lambda\sigma\rho+1)B_{\lambda\rho}L_{2\lambda\rho}}{(2\pi)^{2\lambda\rho(\sigma-1)}\Gamma(2\lambda\rho+1)B_{\lambda\sigma\rho}L_{2\lambda\sigma\rho}}$

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären complexen Zahlen hat im Mittel $\frac{\zeta(r\rho)L_{r\rho}}{\zeta(\sigma r\rho)L_{\sigma r\rho}}$ primäre Theiler, welche ρ^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären complexen Zahlen hat im Mittel $\frac{\Gamma(2\sigma r\rho+1)B_{r\rho}L_{2r\rho}}{(2\pi)^{2r\rho(\sigma-1)}\Gamma(2r\rho+1)B_{\sigma r\rho}L_{2\sigma r\rho}}$ primäre Theiler, welche $(2\rho)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären complexen Zahlen besitzt im Mittel ebenso viele primäre Theiler, welche $(2\rho)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, als der grösste gemeinsame Theiler von $2r$ solchen Zahlen primäre Theiler hat, welche ρ^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen hat im Mittel $\frac{\zeta(r)L_r}{\zeta(\sigma r)L_{\sigma r}}$ primäre Theiler, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Der grösste gemeinschaftliche Theiler von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen lässt sich im Mittel auf $\frac{2\Gamma(2r+1)\zeta(r)L_r}{(2\pi)^{2r}B_r L_{2r}}$ verschiedene Arten in zwei theilerfremde primäre Factoren zerlegen.

Der grösste gemeinsame Divisor von $2r$ aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen lässt sich im Mittel auf $\frac{\Gamma(4r+1)B_r L_{2r}}{(2\pi)^{2r}\Gamma(2r+1)B_{2r}L_{4r}}$ verschiedene Arten in zwei theilerfremde primäre Factoren zerlegen.

Der grösste gemeinsame Theiler von vier aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen kann im Mittel auf $\frac{105 L_4}{\pi^4 L_8}$ Arten in zwei theilerfremde Factoren zerlegt werden.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen hat im Mittel $\frac{L_{r\rho}}{L_{\sigma r\rho}}$-mal so viele primäre Theiler, welche ρ^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, als der grösste gemeinsame Theiler von r reellen ganzen Zahlen.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen lässt sich im Mittel $\frac{L_r}{L_{2r}}$-mal so oft in zwei theilerfremde primäre Factoren zerlegen, als der grösste gemeinsame Theiler von r reellen ganzen Zahlen.

Die Summe der Normen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Theiler des grössten gemeinschaftlichen Divisors von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, ist für $\tau(r-\varkappa)>1$ im Mittel gleich $\zeta(\tau(r-\varkappa))L_{\tau(r-\varkappa)}$.

Die Summe der Normen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Theiler des grössten gemeinsamen Divisors von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen, welche $(2\tau)^{\text{te}}$ Potenzen sind, beträgt für $\tau(r-\varkappa)>0$ im Mittel $\frac{(2\pi)^{2\tau(r-\varkappa)}B_{\tau(r-\varkappa)}L_{2\tau(r-\varkappa)}}{2\Gamma(2\tau(r-\varkappa)+1)}$.

Die Summe der Normen der $(r-2\lambda)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen primären Theiler des grössten gemeinschaftlichen Divisors von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen, welche τ^{te} Potenzen sind, beträgt für $\lambda>0$ im Mittel $\frac{(2\pi)^{2\lambda\tau}B_{\lambda\tau}L_{2\lambda\tau}}{2\Gamma(2\lambda\tau+1)}$

Die Summe der Normen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der primären Theiler des grössten gemeinschaftlichen Divisors von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen ist für $r-\varkappa>1$ im Mittel gleich $\zeta(r-\varkappa)L_{r-\varkappa}$.

Die Summe der $(r-2\lambda)^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen der primären Theiler des grössten gemeinsamen Divisors von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen ist für $\lambda>0$ im Mittel gleich $\frac{(2\pi)^{2\lambda}B_{\lambda}L_{2\lambda}}{2\Gamma(2\lambda+1)}$

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ besitzt im Mittel $\zeta(\tau r)L_{\tau r}$ primäre Theiler, welche τ^{te} Potenzen sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von $2r$ aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen besitzt im Mittel $\dfrac{(2\pi)^{2\tau r}B_{\tau r}L_{2\tau r}}{2\Gamma(2\tau r+1)}$ primäre Theiler, welche τ^{te} Potenzen sind.

Der grösste gemeinsame Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen hat im Mittel ebenso viele primäre Theiler, welche $(2\tau)^{\text{te}}$ Potenzen sind, als der grösste gemeinschaftliche Divisor von $2r$ solchen primäre Theiler besitzt, welche τ^{te} Potenzen sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen hat im Mittel $\zeta(r)L_r$ primäre Theiler.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen hat im Mittel L_r-mal so viele primäre Theiler, als der grösste gemeinsame Theiler von r reellen ganzen Zahlen.

Diejenigen von den $\mathfrak{A}^r(n)$ grössten gemeinsamen Theilern von je r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen mit n nicht übersteigender Norm, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, besitzen im Mittel $\dfrac{\mathfrak{A}^r(n)}{2}\left\{\zeta(r)L_r+\dfrac{(2\pi)^{4r}B_r^2L_{2r}^2}{4\{\Gamma(2r+1)\}^2(\zeta(r)L_r)^3}\right\}$ primäre Divisoren, während die Anzahl der primären Theiler der übrigen im Mittel gleich $\dfrac{\mathfrak{A}^r(n)}{2}\left\{\zeta(r)L_r-\dfrac{(2\pi)^{\ \ r}B_r^2L_{2r}^2}{4\{\Gamma(2r+1)\}^2(\zeta(r)L_r)^2}\right\}$ ist.

Diejenigen von den $\mathfrak{A}^{2r}(n)$ grössten gemeinschaftlichen Divisoren von je $2r$ aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen mit n nicht übersteigender Norm, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, besitzen im Mittel $\dfrac{(2\pi\mathfrak{A}(n))^{2r}}{2}\left\{\dfrac{B_rL_{2r}}{2\Gamma(2r+1)}+\dfrac{2\Gamma(2r+1}{B_rL_{2r}}\left\{\dfrac{\Gamma(2r+1)B_{2r}L_{4r}}{\Gamma(4r+1)B_rL_{2r}}\right\}^2\right\}$ primäre Theiler, während die Anzahl der primären Theiler der übrigen im Mittel $\frac{(2\pi\mathfrak{A}(n))^{2r}}{2}\left\{\frac{B_r L_{2r}}{2\Gamma(2r+1)}-\frac{2\Gamma(2r+1)}{B_r L_{2r}}\cdot\left\{\frac{\Gamma(2r+1)B_{2r}L_{4r}}{\Gamma(4r+1)B_r L_{2r}}\right\}^2\right\}$ beträgt.

Diejenigen von den $\mathfrak{A}^r(n)$ grössten gemeinschaftlichen Divisoren von je r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen mit n nicht übersteigender Norm, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, lassen sich im Mittel auf $\frac{\mathfrak{A}^r(n)}{2}\left\{(\zeta(r)L_r)^2+\frac{(2\pi)^{6r}(B_r L_{2r})^3}{8\{\Gamma(2r+1)\}^3(\zeta(r)L_r)^4}\right\}$ verschiedene Arten in drei primäre Factoren zerlegen, während die Anzahl dieser Zerlegungen für die übrigen im Mittel gleich $\frac{\mathfrak{A}^r(n)}{2}\left\{(\zeta(r)L_r)^2-\frac{(2\pi)^{6r}(B_r L_{2r})^3}{8\{\Gamma(2r+1)\}^3(\zeta(r)L_r)^4}\right\}$ ist.

Diejenigen von den $\mathfrak{A}^{2r}(n)$ grössten gemeinsamen Divisoren von je $2r$ aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen mit n nicht übersteigender Norm, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, lassen sich im Mittel auf $\frac{(2\pi)^{4r}\mathfrak{A}^{2r}_{(n)}}{2}\left\{\frac{(B_r L_{2r})^2}{4(\Gamma(2r+1))^2}+\frac{2\Gamma(2r+1)}{B_r L_{2r}}\left\{\frac{\Gamma(2r+1)B_{2r}L_{4r}}{\Gamma(4r+1)B_r L_{2r}}\right\}^3\right\}$ verschiedene Arten in drei primäre Factoren zerlegen, während die mittlere Anzahl dieser Zerlegungen für die übrigen den Werth $\frac{(2\pi)^{4r}\mathfrak{A}^{2r}(n)}{2}\left\{\frac{(B_r L_{2r})^2}{2(\Gamma(2r+1))^2}-\frac{2\Gamma(2r+1)}{B_r L_{2r}}\left\{\frac{\Gamma(2r+1)B_{2r}L_{4r}}{\Gamma(4r+1)B_r L_{2r}}\right\}^3\right\}$ hat.

Das Quadrat des grössten gemeinschaftlichen Theilers von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen besitzt im Mittel $\frac{2\Gamma(2r+1)(\zeta(r)L_r)^2}{(2\pi)^{2r}B_r L_{2r}}$ primäre Theiler.

Das Quadrat des grössten gemeinschaftlichen Divisors von $2r$ aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen besitzt im Mittel $\frac{\Gamma(4r+1)(B_r L_{2r})^2}{2(\Gamma(2r+2))^2 B_{2r}L_{4r}}$ primäre Theiler.

Der grösste gemeinsame Theiler von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ hat im Mittel $\frac{\zeta(\rho\sigma r)L_{\rho\sigma r}}{\zeta(r\sigma)L_{\sigma r}}$ primäre Divisoren, welche $(\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenzen sind, und deren complementärer Divisor durch keine σ^{te} Potenz theilbar ist, und $\zeta(\rho\sigma r)L_{\rho\sigma r}\left\{1-\frac{1}{\zeta(\sigma r)L_{\sigma r}}\right\}$ solche Theiler, welche $(\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenzen sind, und deren complementärer Divisor mindestens durch eine σ^{te} Potenz theilbar ist.

Der grösste gemeinsame Theiler von r primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ hat im Mittel $\frac{(2\pi)^{2\rho\sigma r}B_{\rho\sigma r}L_{2\rho\sigma r}}{2\Gamma(2\rho\sigma r+1)\zeta(r\sigma)L_{r\sigma}}$ primäre Theiler, welche $(2\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenzen sind, und deren complementärer Divisor durch keine σ^{te} Potenz theilbar ist, und $\frac{(2\pi)^{2\rho\sigma r}B_{\rho\sigma r}L_{2\rho\sigma r}}{2\Gamma(2\rho\sigma r+1)}\left\{1-\frac{1}{\zeta(\sigma r)L_{\sigma r}}\right\}$ solche, welche $(2\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenzen sind, und deren complementärer Divisor mindestens durch eine σ^{te} Potenz theilbar ist.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen besitzt im Mittel $\frac{(2\pi)^{2\sigma r(\rho-1)}\Gamma(2\sigma r+1)B_{r\rho\sigma}L_{2r\sigma\rho}}{2\Gamma(2\rho\sigma r+1)B_{r\sigma}L_{2r\sigma}}$ primäre Divisoren, welche $(2\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen sind, und deren complementärer Divisor durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist, und $\frac{(2\pi)^{2\rho\sigma r}B_{\rho\sigma r}L_{2\rho\sigma r}}{2\Gamma(2\rho\sigma r+1)}\left\{1-\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}L_{2\sigma r}}\right\}$ solche, welche $(2\sigma\rho)^{\text{te}}$ Potenzen sind und deren complementärer Divisor mindestens durch eine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r beliebigen reellen ganzen Zahlen zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremd und durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel

$$\frac{1}{\zeta(\sigma r)}\prod_{1}^{\lambda}\frac{1-\frac{1}{p_\lambda}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{\sigma r}}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r reellen ganzen Zahlen weder durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$, noch durch eine $(2r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel

$$\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)}{(2\pi)^{2\sigma r} B_{\sigma r}} \prod_1^\lambda \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2\sigma r}}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r beliebig herausgegriffenen reellen ganzen Zahlen ungerade und durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\dfrac{2^{\sigma r-1}}{(2^{\sigma r}-1)\,\zeta(\sigma r)}$

Es ist ebenso wahrscheinlich, dass eine beliebige ganze reelle Zahl weder durch eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$, noch durch eine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar ist, als dass der grösste gemeinschaftliche Divisor von r beliebig herausgegriffenen reellen ganzen Zahlen zu den genannten Primzahlen theilerfremd und durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren des grössten gemeinsamen Theilers von r reellen ganzen Zahlen welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde $(\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen sind, ist im Mittel gleich

$$\zeta(\sigma(r-\varkappa)) \prod_1^\lambda \left(1-\frac{1}{p_\lambda^{\sigma(r-\varkappa)}}\right) \qquad (\sigma(r-\zeta)>1).$$

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren des grössten gemeinsamen Theilers von r reellen ganzen Zahlen, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen sind, ist für $\sigma(r-\varkappa) \geqq 1$ im Mittel gleich

$$\frac{(2\pi)^{2\sigma(r-\varkappa)} B_{\sigma(r-\varkappa)}}{2\Gamma(2\sigma(r-\varkappa)+1)} \prod_1^\lambda \left(1-\frac{1}{p_\lambda^{2\sigma(r-\varkappa)}}\right)$$

Die Summe der $(r-2\lambda)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren des grössten gemeinschaftlichen Theilers von r reellen ganzen Zahlen, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2 \ldots, p_\tau$ theilerfremde σ^{te} Potenzen sind, ist für $\lambda > 0$ im Mittel gleich

$$\frac{(2\pi)^{2\lambda\sigma} B_{\lambda\sigma}}{2\Gamma(2\lambda\sigma+1)} \prod_{1}^{\mu} \left(1 - \frac{1}{p_\mu^{2\lambda\sigma}}\right)$$

Der grösste gemeinsame Divisor von r beliebig herausgegriffenen reellen ganzen Zahlen besitzt im Mittel

$$\zeta(\sigma r) \prod_{1}^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{\sigma r}}\right)$$

Theiler, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde σ^{te} Potenzen sind.

Der grösste gemeinsame Divisor von r reellen ganzen Zahlen besitzt im Mittel ebenso viele Divisoren, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde σ^{te} Potenzen sind, als eine reelle Zahl zu den genannten Primzahlen theilerfremde Divisoren hat, welche $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen sind.

Der grösste gemeinsame Theiler von r reellen ganzen Zahlen hat im Mittel

$$\zeta(r) \prod_{1}^{\lambda} \left(1 - \frac{1}{p_\lambda^{r}}\right)$$

Divisoren, welche zu dem Producte $p_1\, p_2\, p_3 \quad p_\tau$ theilerfremd sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von zwei reellen ganzen Zahlen hat im Mittel $\frac{\pi^4}{96}$ ungerade und $\frac{\pi^2}{1440}$ gerade quadratische Theiler.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von vier reellen ganzen Zahlen hat im Mittel $\frac{17\,\pi^8}{161280}$ ungerade und $\frac{\pi^8}{2419200}$ gerade quadratische Theiler.

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren des grössten gemeinsamen Theilers von r reellen ganzen Zahlen, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde σ^{te} Potenzen und durch keine $(\alpha\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $\sigma(r-\varkappa) > 1$ im Mittel

$$\frac{\zeta(\sigma(r-\varkappa))}{\zeta(\alpha\sigma(r-\varkappa))} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{\sigma(r-\varkappa)}}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{\alpha\sigma(r-\varkappa)}}}$$

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren des grössten gemeinsamen Theilers von r reellen ganzen Zahlen, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\alpha\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $\sigma(r-\varkappa) \geqq 1$ im Mittel

$$\frac{\Gamma(2\alpha\sigma(r-\varkappa)+1)\, B_{\sigma(r-\varkappa)}}{(2\pi)^{2\sigma(r-\varkappa)(\alpha-1)}\,\Gamma(2\sigma(r-\varkappa)+1)\, B_{\alpha\sigma(r-\varkappa)}} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2\sigma(r-\varkappa)}}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2\alpha\sigma(x-\varkappa)}}}.$$

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren des grössten gemeinsamen Theilers von r reellen ganzen Zahlen, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde σ^{te} Potenzen und durch keine $(2\alpha\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $\sigma(r-\varkappa) > 1$ im Mittel

$$\frac{2\,\Gamma(2\alpha\sigma(r-\varkappa)+1)\,\zeta(\sigma(r-\varkappa))}{(2\pi)^{2\alpha\sigma(r-\varkappa)}\, B_{\alpha\sigma(r-\varkappa)}} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{\sigma(r-\varkappa)}}}{1-\dfrac{1}{p_\lambda^{2\alpha\sigma(r-\varkappa)}}}$$

Die Summe der $(r-2\lambda)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Divisoren des grössten gemeinschaftlichen Theilers von r reellen ganzen Zahlen, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde σ^{te} Potenzen und durch keine $(\alpha\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, beträgt für $\lambda > 0$ im Mittel

$$\frac{\Gamma(2\alpha\lambda\sigma+1)\, B_{\lambda\sigma}}{(2\pi)^{2\lambda\sigma(\alpha-1)}\,\Gamma(2\lambda\sigma+1)\, B_{\alpha\lambda\sigma}} \prod_{1}^{\mu} \frac{1-\dfrac{1}{p_\mu^{2\lambda\sigma}}}{1-\dfrac{1}{p_\mu^{2\alpha\lambda\sigma}}}.$$

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r reellen ganzen Zahlen hat im Mittel

$$\frac{\zeta(\sigma r)}{\zeta(\alpha\sigma r)} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{\sigma r}}}{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{\alpha\sigma r}}}$$

zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde Theiler, welche σ^{te} Potenzen und durch keine $(\alpha\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r reellen ganzen Zahlen hat im Mittel

$$\frac{2\Gamma(2\alpha\sigma r+1)\zeta(\sigma r)}{(2\pi)^{2\alpha\sigma r}B_{\alpha\sigma r}} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1-\frac{1}{p_{r}^{\sigma r}}}{1-\frac{1}{p_{\lambda}^{2\alpha\sigma r}}}$$

zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde Theiler, welche σ^{te} Potenzen und durch keine $(2\alpha\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r reellen ganzen Zahlen hat im Mittel ebenso viele zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde Theiler, welche σ^{te} Potenzen und durch keine $(\alpha\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, als eine reelle ganze Zahl derartige Divisoren besitzt, welche $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(\alpha\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz theilbar sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von zwei reellen ganzen Zahlen hat im Mittel $\frac{1816214400}{188643\pi^8}$ ungerade und $\frac{241215975}{377286\pi^8}$ gerade quadratische Theiler, welche durch keine sechste Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Der grösste gemeinsame Divisor von r reellen ganzen Zahlen hat im Mittel

$$\frac{\zeta(r\rho\sigma)}{\zeta(r\sigma)} \prod_{1}^{\lambda} \left(1-\frac{1}{p_{\lambda}^{r\rho\sigma}}\right)$$

Theiler, welche zu dem Producte $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, der durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Der grösste gemeinsame Divisor von r reellen ganzen Zahlen hat im Mittel

$$\frac{(2\pi)^{2r\sigma(\rho-1)}\Gamma(2r\sigma+1)B_{r\rho\sigma}}{2\Gamma(2r\rho\sigma+1)B_{r\sigma}}\prod_{1}^{\tau}{}_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_{\lambda}^{2r\rho\sigma}}\right)$$

Theiler, welche zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremde $(2\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, der durch keine $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r reellen ganzen Zahlen besitzt im Mittel um

$$\frac{1}{\zeta(\sigma r)\zeta(\rho\sigma r)\prod_{1}^{\tau}{}_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_{\lambda}^{\rho}}\right)}$$

solche Theiler mit durch keine $(\rho\sigma)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisor, welche σ^{te} Potenzen eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander und von den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ verschiedenen Primfactoren sind, mehr, als solche, welche σ^{te} Potenzen eines Productes einer ungeraden Anzahl von derartigen Primfactoren sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von r reellen ganzen Zahlen besitzt im Mittel um

$$\frac{4\Gamma(2\sigma r+1)\Gamma(2\rho\sigma r+1)}{(2\pi)^{2r\sigma(\rho+1)}B_{\sigma r}B_{\rho\sigma r}\prod_{1}^{\tau}{}_{\lambda}\left(1-\frac{1}{p_{\lambda}^{\rho}}\right)}$$

solche Theiler mit durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisor, welche $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander und von den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ verschiedenen Primfactoren sind, mehr, als solche, welche $(2\sigma)^{\text{te}}$ Potenzen eines Productes einer ungeraden Anzahl von derartigen Primfactoren sind.

Der grösste gemeinschaftliche Divisor von zwei reellen ganzen Zahlen besitzt im Mittel um $\frac{20160}{\pi^{12}}$ solche ungerade Theiler mit durch keine vierte Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisor, welche Quadrate eines Productes einer geraden Anzahl von unter einander verschiedenen Primzahlen sind, mehr, als solche, welche Quadrate eines Productes einer ungeraden Anzahl verschiedener Primfactoren sind.

Unter denjenigen Theilern des grössten gemeinsamen Divisors von r reellen ganzen Zahlen, welche σte Potenzen von solchen zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremden ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $\varkappa\rho$ und $(\varkappa\rho+1)$ auftreten, gibt es im Mittel um

$$\frac{\zeta(r\sigma\rho)}{\zeta(r\sigma)} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{r\sigma\rho}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{r\sigma}}}$$

mehr solche, bei denen die Anzahl der letzteren Exponenten gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Unter denjenigen Theilern des grössten gemeinsamen Divisors von r reellen ganzen Zahlen, welche (2σ)te Potenzen von solchen zu den Primzahlen $p_1, p_3, \ldots, p_\tau$ theilerfremden ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $\varkappa\rho$ oder $\varkappa\rho+1$ auftreten, gibt es im Mittel um

$$\frac{(2\pi)^{2r\sigma(\rho-1)}\Gamma(2r\sigma+1)B_{r\sigma\rho}}{\Gamma(2r\sigma+1)B_{r\sigma}} \prod_{1}^{\lambda} \frac{1-\frac{1}{p_\lambda^{2r\rho\sigma}}}{1-\frac{1}{p_\lambda^{2r\sigma}}}$$

mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten von der Form $\varkappa\rho+1$ gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Unter denjenigen Theilern des grössten gemeinschaftlichen Divisors von zwei reellen ganzen Zahlen, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von einer der Formen $5\varkappa$, $5\varkappa+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{341\pi^8}{3991680}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Art gerade, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Unter denjenigen Theilern des grössten gemeinsamen Divisors von zwei reellen ganzen Zahlen, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von einer der zwei Formen $6\varkappa$, $6\varkappa+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{188643\,\pi^{10}}{21794572800}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der letzteren Exponenten gerade, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r reellen ganzen Zahlen zu den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilerfremd ist, und dass bei seiner Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $\sigma\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb ρ congruent sind, beträgt im Mittel

$$\frac{\zeta(r\sigma\rho)}{\zeta\, r\rho)} \prod_{1}^{\lambda} \frac{\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{r\rho\sigma}}\right)}{1-\frac{1}{p_\lambda^{r\sigma}}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r reellen ganzen Zahlen durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_\tau$ theilbar ist, und dass bei seiner Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $2\sigma\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb 2ρ congruent sind, beträgt im Mittel

$$\frac{(2\pi)^{r\rho(\sigma-1)}\Gamma(2r\rho+1)B_{r\rho\sigma}}{\Gamma(2r\sigma\rho+1)B_{r\rho}} \prod_{1}^{\lambda} \frac{\left(1-\frac{1}{p_\lambda}\right)\left(1-\frac{1}{p_\lambda^{2r\sigma\rho}}\right)}{1-\frac{1}{p_\lambda^{2r\rho}}}$$

Zum Schluss dieses Paragraphes will ich noch den folgenden, leicht zu beweisenden Satz angeben:

Bezeichnet $\mathfrak{Q}_\lambda^{(\varkappa)}(n)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen derjenigen Individuen eines Euklid'schen Zahlencomplexes (n), welche durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, so bestehen die Relationen

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} S_{\varkappa}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right) N(x^{\varkappa\lambda})\,\mu(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda}^{(\varkappa)}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{\lambda}^{(\varkappa)}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right) N(x^{\varkappa\lambda}) = S_{\varkappa}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{\sigma\lambda}^{(\varkappa)}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right) N(x^{\varkappa\lambda})\,\lambda_{\sigma}(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda}^{(\varkappa)}(n)$$

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \mathfrak{Q}_{\lambda}^{(\varkappa)}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right) N(x^{\varkappa\lambda})\,\mu_{\sigma}(x) = \mathfrak{Q}_{\sigma\lambda}^{(\varkappa)}(n)$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet:

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} \mathfrak{Q}_{\lambda}^{(\varkappa)}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) x^{\varkappa\lambda} = S_{\varkappa}(n)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} S_{\varkappa}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) x^{\varkappa\lambda}\,\mu(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda}^{(\varkappa)}(n)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} \mathfrak{Q}_{\sigma\lambda}^{\varkappa}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) x^{\varkappa\lambda}\,\lambda_{\sigma}(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda}^{(\varkappa)}(n)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} \mathfrak{Q}_{\lambda}^{(\varkappa)}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) x^{\varkappa\lambda}\,\mu_{\sigma}(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda\sigma}^{(\varkappa)}(n).$$

§. 2. Im vierten Bande der dritten Serie der »Nouvelles Annales de mathématiques« von Gerono und Brisse hat Herr Ernesto Cesarò [1] folgende Erweiterung der berühmten Identität von Tchebychef und de Polygnac bewiesen:

[1] »Généralisation de l'identité de MM. Tchébychef et de Polygnac.« L. c. p. 418—422.

Ist $p(x)$ das Product aller x nicht überschreitenden Primzahlen und

$$P_\sigma(x) = \prod_{\lambda=1}^{\left[\frac{\log x}{\sigma \log 2}\right]} p\left(x^{\frac{1}{\lambda\sigma}}\right),$$

so besteht die Beziehung

$$\prod_{\lambda=1}^{n} P_\sigma\left(\left[\frac{n}{\lambda}\right]\right) = \prod_{\lambda=1}^{[\sqrt[\sigma]{n}]} \lambda^{\mathfrak{L}_\sigma\left(\left[\frac{n}{\lambda^\sigma}\right]\right)}$$

Da es nur eine einzige durch keine erste Potenz (ausser 1) theilbare ganze Zahl, nämlich die Zahl 1 gibt, so geht diese Formel für $\sigma = 1$ in die eben erwähnte Tchebychef-de Polygnac'sche Gleichung

$$\prod_{\lambda=1}^{n} P_1\left(\left[\frac{n}{\lambda}\right]\right) = n!$$

über. Die im vorigen Paragraphe entwickelten Relationen ermöglichen einerseits die Ableitung einer viel weiter gehenden Verallgemeinerung dieser berühmten Identität, deren Bedeutung für die Theorie des grössten gemeinsamen Theilers ich bei einer anderen Gelegenheit auseinanderzusetzen gedenke, anderseits die Aufstellung von mehreren anderen neuen Formeln derselben Kategorie.

Die complexe Primzahl p_μ kommt offenbar nur in jedem der Factoren

$$(p_\mu^\tau(\rho p_\mu + \varkappa))^{f\left(\frac{n}{N(p_\mu^\tau(\rho p_\mu+\varkappa))^{\sigma\lambda}}\right) g(p_\mu^\tau(\rho p_\mu+\varkappa))} \qquad (Np > N\varkappa > 0)$$

des Productes

$$\prod_{(n)}^{\nu} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)}$$

genau τ-mal vor. Genügt nun die Function $g(x)$ für alle Werthepaare x, y der Gleichung

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

und ist

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} f\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right) g(x) = h(n),$$

so hat man die Gleichung

$$\prod_{(n)}^{\nu} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{1}^{\theta(\sqrt[\sigma\lambda]{n})}{}_{\rho}\, p_{\rho}^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\sigma\lambda \log N(p_\rho)}\right]} g^{\tau}(p_\rho) h\left(\frac{n}{N(p_\rho^{\sigma\tau\lambda})}\right)}$$

wo $\theta(n)$ die Anzahl aller Primzahlen p_ρ des Complexes (n) vorstellt, beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{1}^{n}{}_{\nu}\, \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{1}^{\theta(\sqrt[\sigma\lambda]{n})}{}_{\rho}\, p_{\rho}^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\sigma\lambda \log p_\rho}\right]} g^{\tau}(p_\rho) h\left(\left[\frac{n}{p^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)}$$

Von besonderem Interesse sind diejenigen speciellen Fälle dieser allgemeinen Formel, in denen die Function $g(x)$ wenigstens für alle primzahligen Argumente denselben Werth besitzt und $h(n)$ entweder die r^{te} Potenz der Anzahl der Individuen des Complexes (n), oder die Anzahl derjenigen Systeme von r Zahlen dieses Gebietes ist, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar oder endlich eine $\lambda_1{}^{\text{te}}$ Potenz ist. Dieselbe erhält, diesen drei Annahmen entsprechend, der Reihe nach folgende Formen:

$$\prod_{(n)}^{\nu} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})}{}_{\rho}\, p_{\rho}^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma \log N(p_\rho)}\right]} (p_\rho)\mathfrak{A}^{r}\left(\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)}$$

$$\prod_{\nu}^{(n)} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log N(p_\rho)}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\,\mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)} \tag{13}$$

$$\prod_{\nu}^{(n)} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log N(p_\rho)}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\,Q_{r,\lambda_1}\left(\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)} \tag{14}$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\nu=1}^{n} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log p_\rho}\right]} (p_\rho)\left[\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]^{r}}$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log p_\rho}\right]} (p_\rho)\,\mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\left[\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)} \tag{15}$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu) = \prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log p_\rho}\right]} (p_\rho)\,Q_{r,\lambda_1}\left(\left[\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)} \tag{16}$$

Dem auf der rechten Seite der ersten von diesen Gleichungen stehenden Producte kann man nach 6) und 8) eine der beiden folgenden Formen geben:

$$\prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log N(p_\rho)}\right]} (p_\rho)\left(\sum\limits_{x=\left(\sqrt[\lambda]{\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}}\right)} \mathfrak{Q}_{r_1\lambda}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda}p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)\right)}$$

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log N(p_\rho)}\right]} (p_\rho)\left(\sum\limits_{x=\left(\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)} Q_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(xp_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)\mu_\lambda(x)\right)}$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log p_\rho}\right]} g^\tau(p_\rho)\left(\sum\limits_{x=1}^{\left[\sqrt[\lambda]{\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}}\right]} \mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^\lambda p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)\right)}$$

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log p_\rho}\right]} (p_\rho)\left(\sum\limits_{x=1}^{\left[\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]} Q_{r,\lambda}\left(\left[\frac{n}{xp_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)\mu_\lambda(x)\right)}$$

der auf der rechten Seite der zweiten von ihnen stehende Ausdruck lässt sich nach 7) und 8) in einen der folgenden zwei umformen:

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma\log N(p_\rho)}\right]} (p_\rho)\left(\sum\limits_{x=\left(\sqrt[\lambda]{\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}}\right)} \mathfrak{Q}_{r,\alpha\lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)\lambda_\alpha(x)\right)}$$

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta\sqrt[\lambda\sigma]{n}} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\rho\log N(p_\rho)}\right]} (p_\rho)\left(\sum\limits_{x=\left(\sqrt[\mu]{\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}}\right)} \mathfrak{Q}_{r,\mu}\left(\frac{n}{N(x^\mu p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)\mu_\alpha(x)\right)}$$

$$(\alpha\mu = \lambda;\ \alpha > 1)$$

und für $\lambda = 1$ nach 12) überdies noch in

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\sigma \log N(p_\rho)}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\left(\sum\limits_{x=\left(\sqrt[\mu]{\frac{n}{N(p_\rho^{\sigma\tau})}}\right)} Q_{r,\mu}\left(\frac{n}{N(x^{\mu} p_\rho^{\sigma\tau})}\right)\mu(x)\right)}$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma \log p_\rho}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\left(\sum\limits_{x=1}^{\left[\sqrt[\lambda]{\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}}\right]} \mathfrak{Q}_{r,\alpha\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda} p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)\lambda_\alpha(x)\right)}$$

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma \log p_\rho}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\left(\sum\limits_{x=1}^{\left[\sqrt[\mu]{\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}}\right]} \mathfrak{Q}_{r,\mu}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu} p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)\mu_\alpha(x)\right)}$$

$$(\alpha\mu = \lambda;\ \alpha > 1)$$

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\sigma \log p_\rho}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\left(\sum\limits_{x=1}^{\left[\sqrt[\mu]{\frac{n}{p_\rho^{\sigma\tau}}}\right]} Q_{r,\mu}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu} p_\rho^{\sigma\tau}}\right]\right)\mu(x)\right)}$$

das auf der rechten Seite der dritten Gleichung stehende Product kann endlich nach 9) und 10) in einer der folgenden zwei Gestalten geschrieben werden:

$$\prod_{\rho=1}^{\vartheta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma \log N(p_\rho)}\right]} (p_\rho)\left(\sum\limits_{x=\left(\sqrt[\lambda_1]{\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}}\right)} Q_{r,\varkappa\lambda_1}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda_1} p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)\mu_\varkappa(x)\right)}$$

$$\prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma \log N(p_\rho)}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\left(\sum\limits_{x=\left(\sqrt[\mu]{\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}}\right)} Q_{r,\mu}\left(\frac{n}{N(x^{\mu}p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)\lambda_\alpha(x)\right)}$$

$$(\alpha\mu = \lambda_1\,;\ \alpha > 1)$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma \log p_\rho}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\left(\sum\limits_{x=1}^{\left[\sqrt[\lambda_1]{\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}}\right]} Q_{r,\varkappa\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda_1}p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)\mu_\varkappa(x)\right)}$$

$$\prod_{\rho=1}^{\theta(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} p_\rho^{\sum\limits_{\tau=1}^{\left[\frac{\log n}{\lambda\sigma \log p_\rho}\right]} g^{\tau}(p_\rho)\left(\sum\limits_{x=1}^{\left[\sqrt[\mu]{\frac{n}{p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}}\right]} Q_{r,\mu}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu}p_\rho^{\lambda\sigma\tau}}\right]\right)\lambda_\alpha(x)\right)}$$

$$(\alpha\mu = \lambda_1\,;\ \alpha > 1).$$

Soll die ganze complexe Zahl $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ durch keine andere λ^{te} Potenz als $p_\rho^{\lambda\sigma\tau}$ theilbar sein, so muss $x_\mu = y_\mu p_\rho^{\lambda\sigma\tau}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, r)$ und $[y_1, y_2, \ldots, y_r]$ durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sein, und demnach ist die Anzahl derjenigen unter den $\mathfrak{A}^r(n)$ ganzen complexen Zahlen $[x_1, x_2 \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (n))$, welchen die eben erwähnte Eigenschaft zukommt, gleich $\mathfrak{Q}_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)$ Ebenso erkennt man, dass die Anzahl derjenigen unter den Systemen von r ganzen Zahlen des Complexes (n), deren grösster gemeinsamer Theiler die $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenz der Primzahl p_ρ multiplicirt mit einer λ_1^{ten} Potenz ist, gleich $Q_{r,\lambda_1}\left(\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)$ ist. Bezeichnet man nun mit $p_{\lambda,\sigma\tau}(m)$ das Product der $(\lambda\sigma\tau)^{\text{ten}}$ Wurzeln aus den grössten in denjenigen von den ganzen complexen Zahlen $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (m);\ \mu = 1, 2, \ldots, r)$ enthaltenen λ^{ten} Potenzen, für welche diese die $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl ist, mit $\bar{p}_{\lambda_1,\sigma\tau,\lambda}(m)$, beziehungsweise (für $\lambda = \lambda_1$) $\bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}(m)$ aber das Product der $(\lambda\sigma\tau)^{\text{ten}}$ Wurzeln aus denjenigen

Theilern jeder der Zahlen $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (m);\ \mu = 1, 2, \ldots, r)$, welche $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenzen von Primzahlen sind und einen complementären Divisor besitzen, der eine λ_1^{te} Potenz ist, so hat offenbar die höchste Potenz von p_ρ, welche in dem Producte

$$\prod_{x = (\sqrt[\lambda]{n})} p_{\lambda, \sigma\tau}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)$$

enthalten ist, den Exponenten

$$\sum_{x = \left(\sqrt[\lambda]{\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}}\right)} \mathfrak{Q}_{r, \lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right),$$

während der betreffende Exponent für das Product

$$\prod_{x = (\sqrt[\lambda]{n})} \bar{p}_{\lambda_1, \sigma\tau, \lambda}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right)$$

den Werth

$$\sum_{x = \left(\sqrt[\lambda]{\frac{n}{N(p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}}\right)} Q_{r, \lambda_1}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda_1} p_\rho^{\lambda\sigma\tau})}\right)$$

hat.

Setzt man nun

$$\prod_{\tau=1}^{\left[\frac{\log m}{\lambda\sigma}\right]} p_{\lambda, \sigma\tau}^{g^\tau(p_\rho)}(n) = P_{\lambda, \sigma, m}(n)$$

$$\prod_{\tau=1}^{\left[\frac{\log m}{\lambda\sigma}\right]} \bar{p}_{\lambda_1, \sigma\tau, \lambda}^{g^\tau(p_\rho)} = \bar{P}_{\lambda_1, \lambda, \sigma, m}(n);\ \text{bez. (für } \lambda = \lambda_1)\ \bar{P}_{\lambda, \sigma, m}(n),$$

wo

$$p_{\lambda, \sigma\tau}(0) = \bar{p}_{\lambda_1, \sigma\tau, \lambda}(0) = 1$$

sein soll, so kann man nach diesen Bemerkungen die auf den rechten Seiten der Gleichungen 13) und 14) stehenden und die eben angegebenen 14 Producte der Reihe nach in folgender Weise schreiben:

$$P_{\lambda,\sigma,n}(n) \qquad \bar{P}_{\lambda,\sigma,n}(n)$$

$$\prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} P_{\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right); \quad \prod_{x=(n)} \bar{P}^{\mu_{\chi}(x)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

beziehungsweise

$$\prod_{[x]=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} P_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) \qquad \prod_{[x]=1}^{n} \bar{P}^{\mu_{\chi}(x)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)$$

$$\prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} P^{\lambda_{\alpha}(x)}_{\alpha\lambda,\rho,n}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right) \text{ (für } \sigma=\alpha\rho;\ \alpha>1); \quad \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} P^{\mu_{\alpha}(x)}\left(\frac{n}{N(x^{\mu})}\right) \text{ (für } \alpha\mu=\lambda;\ \alpha>1); \quad \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} \bar{P}^{\mu(x)}_{\mu,\rho,n}\left(\frac{n}{N(x^{\mu})}\right)$$

(für $\sigma = \rho\mu$),

beziehungsweise

$$\prod_{[x]=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} P^{\lambda_{\alpha}(x)}_{\alpha\lambda,\rho,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) \qquad \prod_{[x]=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} P^{\mu_{\alpha}(x)}_{\mu,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu}}\right]\right) \qquad \prod_{[x]=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} \bar{P}^{\mu(x)}_{\mu,\rho,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu}}\right]\right)$$

$$\prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \bar{P}^{\mu_{\chi}(x)}_{\chi\lambda_1,\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right) \ (\chi>1) \qquad \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} \bar{P}^{\lambda_{\alpha}(x)}_{\mu,\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x^{\mu})}\right) \text{ (für } \alpha\mu=\lambda_1;\ \alpha>1)$$

beziehungsweise

$$\prod_{[x]=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \bar{P}^{\mu_{\chi}(x)}_{\chi\lambda_1,\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) \qquad \prod_{[x]=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} \bar{P}^{\lambda_{\alpha}(x)}_{\mu,\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu}}\right]\right)$$

Aus den obigen Entwicklungen ergeben sich sofort folgende Theoreme:

Hat die Function $g(x)$, welche für alle ganzzahligen Werthepaare x, y der Gleichung

$$g(xy) = g(x)\,g(y)$$

genügt, wenigstens für alle primzahligen Argumente denselben Werth, und ist die Function $f(x)$ so beschaffen, dass die Summe

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} f\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right) g(x),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} f\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(x)$$

gleich der r^{ten} Potenz der Anzahl der Individuen des Complexes (n) (beziehungsweise n^r) ist, so bestehen die Relationen

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} {}^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} P_{\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{x=(n)} \bar{P}^{\mu,\chi(x)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} P_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) \qquad 16)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{x=1}^{n} \bar{P}^{\mu,\chi(x)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right),$$

wenn

$$P_{\lambda,\sigma,m}(n) = \prod_{1}^{\left[\frac{\log m}{\lambda\sigma}\right]} p_{\lambda,\sigma\tau}^{g^{\tau}(p_{\rho})}(n)$$

$$\bar{P}_{\lambda,\sigma,m}(n) = \prod_{1}^{\left[\frac{\log m}{\lambda\sigma}\right]} \bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}^{g^{\tau}(p_{\rho})}(n)$$

ist, wo mit $p_{\lambda,\sigma\tau}(m)$ das Product der $(\lambda\sigma\tau)^{\text{ten}}$ Wurzeln aus den grössten in denjenigen von den ganzen complexen Zahlen $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (n); \mu = 1, 2, \ldots, r)$ enthaltenen λ^{ten} Potenzen bezeichnet wird, für welche dieselbe die $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl ist, mit $\bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}(m)$ aber das Product der $(\lambda\sigma\tau)^{\text{ten}}$ Wurzeln aus denjenigen Theilern jeder der Zahlen $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (m); \mu = 1, 2, \ldots, r)$, welche $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenzen von Primzahlen sind und einen complementären Divisor besitzen, der eine λ^{te} Potenz ist, und

$$p_{\lambda,\sigma\tau}(0) = \bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}(0) = 1$$

genommen wird.

Hat die Function $g(x)$, welche für alle ganzzahligen Werthepaare x, y der Gleichung

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

genügt, wenigstens für alle primzahligen Werthe des Argumentes denselben Werth, und ist die Function $f(x)$ so beschaffen, dass die Summe

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} f\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right) g(x),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} f\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(x)$$

gleich der Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen complexen Zahlen des Bereiches (n) ist, deren grösster gemeinsamer

Theiler durch keine λte Potenz (ausser 1) theilbar ist, so bestehen die Relationen

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = P_{\lambda,\sigma\, n}(n)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} P_{\alpha\lambda,\sigma,n}^{\lambda_\alpha(x)}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right) \quad (\sigma \text{ gleich einem Vielfachen } \alpha;\ \alpha>1)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} P_{\mu,\sigma,n}^{\mu_\alpha(x)}\left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right) \quad (\alpha\mu=\lambda;\ \alpha>1)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} \bar{P}_{\mu,\sigma,n}^{\mu(x)}\left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right) \quad (\sigma \text{ gleich einem Vielfachen von } \mu),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} P_{\alpha\lambda,\sigma,n}^{\lambda_\alpha(x)}\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \quad (\alpha>1 \text{ und zugleich ein Theiler von } \sigma)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = P_{\lambda,\sigma,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} P_{\mu,\sigma,n}^{\mu_\alpha(x)}\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) \quad (\alpha\mu=\lambda;\ \alpha>1)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} \bar{P}_{\mu,\sigma,n}^{\mu(x)}\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right),$$

wenn

$$P_{\lambda,\sigma,m}(n) = \prod_{1}^{\left[\frac{\log m}{\lambda\sigma}\right]} p_{\lambda,\sigma\tau}^{g^{\tau}(p_\rho)}(n)$$

$$\bar{P}_{\lambda,\sigma,m}(n) = \prod_{1}^{\left[\frac{\log m}{\lambda\sigma}\right]} \bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}^{g^{\tau}(p_\rho)}(n)$$

ist, wo mit $p_{\lambda,\sigma\tau}(m)$ das Product der $(\lambda\sigma\tau)^{\text{ten}}$ Wurzeln aus den grössten in denjenigen von den ganzen complexen Zahlen $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (n); \mu = 1, 2, \ldots, r)$ enthaltenen λ^{ten} Potenzen bezeichnet wird, für welche dieselbe die $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl ist, mit $\bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}(m)$ aber das Product der $(\lambda\sigma\tau)^{\text{ten}}$ Wurzeln aus denjenigen Theilern jeder der Zahlen $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (m);$ $\mu = 1, 2, \ldots, r)$, welche $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenzen von Primzahlen sind und einen complementären Divisor besitzen, der eine λ^{te} Potenz ist, und

$$p_{\lambda,\sigma\tau}(0) = \bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}(0) = 1$$

genommen wird.

Hat die Function $g(x)$, welche für alle ganzzahligen Werthepaare x, y der Gleichung

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

genügt, wenigstens für alle primzahligen Werthe des Argumentes denselben Werth, und ist die Function $f(x)$ so beschaffen, dass die Summe

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} f\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right) g(x),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} f\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(x)$$

gleich der Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen complexen Zahlen des Bereiches (n) ist, deren grösster gemeinsamer

Theiler durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, so bestehen die Relationen

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right)g(\nu)} = P_{\lambda,\sigma,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right)g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} P_{\alpha\lambda,\sigma,n}^{\lambda_\alpha(x)}\left(\frac{n}{N(x^\lambda)}\right) \quad (\sigma \text{ gleich einem Vielfachen } \alpha;\ \alpha > 1)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right)g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} P_{\mu,\sigma,n}^{\mu_\alpha(x)}\left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right) \quad (\alpha\mu = \lambda;\ \alpha > 1)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right)g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} \bar{P}_{\mu,\sigma,n}^{\mu(x)}\left(\frac{n}{N(x^\mu)}\right) \quad (\sigma \text{ gleich einem Vielfachen von } \mu),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right)g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} P_{\alpha\lambda,\sigma,n}^{\lambda_\alpha(x)}\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \quad (\alpha > 1 \text{ und zugleich ein Theiler von } \sigma)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right)g(\nu)} = P_{\lambda,\sigma,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right)g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} P_{\mu,\sigma,n}^{\mu_\alpha(x)}\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) \quad (\alpha\mu = \lambda;\ \alpha > 1)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right)g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} \bar{P}_{\mu,\sigma,n}^{\mu(x)}\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right),$$

wenn

$$P_{\lambda,\sigma,m}(m) = \prod_{1}^{\left[\frac{\log m}{\lambda\sigma}\right]}{}_{\tau}\; p_{\lambda,\sigma\tau}^{g^{\tau}(p_\rho)}(n)$$

$$\bar{P}_{\lambda,\sigma,m} = \prod_{1}^{\left[\frac{\log m}{\lambda\sigma}\right]}{}_{\tau}\; \bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}^{g^{\tau}(p_\sigma)}(n)$$

ist, wo $p_{\lambda,\sigma\tau}(m)$ das Product der $(\lambda\sigma\tau)^{\text{ten}}$ Wurzeln aus den grössten in denjenigen von den ganzen complexen Zahlen $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (m); \mu = 1, 2, \ldots, r)$ enthaltenen λ^{ten} Potenzen vorstellt, für welche diese die $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenz einer Primzahl ist, $\bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}(m)$ aber das Product der $(\lambda\sigma\tau)^{\text{ten}}$ Wurzeln aus denjenigen Theilern jeder der Zahlen $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_\mu = (m); \mu = 1, 2, \ldots, r)$, welche $(\lambda\sigma\tau)^{\text{te}}$ Potenzen von Primzahlen sind und einen complementären Divisor besitzen, der eine λ^{te} Potenz ist, und

$$p_{\lambda,\sigma\tau}(0) = \bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}(0) = 1$$

genommen wird.

Hat die Function $g(x)$, welche für alle ganzzahligen Werthepaare x, y der Gleichung

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

genügt, wenigstens für alle primzahligen Argumente denselben Werth, und ist die Function $f(x)$ so beschaffen, dass die Summe

$$\sum_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} f\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right) g(x),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda\sigma]{x}]} f\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(x)$$

gleich der Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen complexen Zahlen des Gebietes (n) ist, deren grösster gemeinsamer Theiler eine λ_1^{te} Potenz ist, so bestehen die Relationen

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \bar{P}_{\lambda_1,\lambda,\sigma,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \bar{P}^{\mu_\varkappa(x)}_{\varkappa\lambda_1,\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right) \quad (\varkappa > 1)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{f\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right) g(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} \bar{P}^{\lambda_\alpha(x)}_{\mu,\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x^{\mu})}\right) \quad (\alpha > 1;\ \alpha\mu = \lambda_1),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \bar{P}_{\lambda_1,\lambda,\sigma,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \bar{P}^{\mu_\varkappa(x)}_{\varkappa\lambda_1,\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) \quad (\varkappa > 1)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) g(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} \bar{P}^{\lambda_\alpha(x)}_{\mu,\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu}}\right]\right) \quad (\alpha > 1;\ \alpha\mu = \lambda_1).$$

Von den in diesen Theoremen enthaltenen speciellen Formeln mögen die folgenden erwähnt werden:

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{\mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right)} = \prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} P^{(1)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} \nu^{\mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda\sigma})}\right)} = \prod_{x=(n)} \bar{P}^{(1)\mu_\varkappa(x)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x)}\right)$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\nu=1}^{\left[\sqrt[\lambda\sigma]{n}\right]} \nu^{\mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right)} = \prod_{x=1}^{\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} P^{(1)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) \tag{17}$$

$$\prod_{\nu=1}^{\left[\sqrt[\lambda\sigma]{n}\right]} \nu^{\mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right)} = \prod_{x=1}^{n} \bar{P}^{(1)\mu_{\chi}(x)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right),$$

wo

$$P^{(1)}_{\lambda,\sigma,m}(n) = \prod_{\tau=1}^{\left[\frac{\log m}{\sigma\lambda}\right]} p_{\lambda,\sigma\tau}(n)$$

$$\bar{P}^{(1)}_{\lambda,\sigma,m}(n) = \prod_{\tau=1}^{\left[\frac{\log m}{\sigma\lambda}\right]} \bar{p}_{\lambda,\sigma\tau}(n)$$

ist,

$$\prod_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} x^{\mathfrak{Q}_{r,2\lambda\sigma}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right)\lambda(x)} = P^{(2)}_{\lambda,\sigma,n}(n)$$

$$\prod_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} x^{\mathfrak{Q}_{r,2\lambda\sigma}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right)\lambda(x)} = \prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} P^{(2)\lambda_{\alpha}(x)}_{\alpha\lambda,\frac{\sigma}{\alpha},n}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right)$$

(α ein die Einheit übersteigender Theiler von σ)

$$\prod_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} x^{\mathfrak{Q}_{r,2\lambda\sigma}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right)\lambda(x)} = \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} P^{(2)\mu_{\alpha}(x)}_{\mu,\sigma,n}\left(\frac{n}{N(x^{\mu})}\right)$$

($\alpha\mu = \lambda;\ \alpha > 1$)

$$\prod_{x=(\sqrt[\lambda\sigma]{n})} x^{\mathfrak{Q}_{r,2\lambda\sigma}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda\sigma})}\right)\lambda(x)} = \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} \bar{P}^{(2)\mu(x)}_{\mu,\frac{\sigma}{\mu},n}\left(\frac{n}{N(x^{\mu})}\right)$$

(σ gleich einem Vielfachen von μ),

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{1}^{\left(\sqrt[\lambda\sigma]{n}\right]} x^{\mathfrak{Q}_{r,2\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda\sigma}}\right]\right)\lambda(x)} = P^{(2)}_{\lambda,\sigma,n}(n)$$

$$\prod_{1}^{\left[\sqrt[\lambda\sigma]{n}\right]} x^{\mathfrak{Q}_{r,2\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda\sigma}}\right]\right)\lambda(x)} = \prod_{1}^{\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} P^{(2)^{\lambda\alpha(x)}}_{\alpha\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right)$$

(α ein die Einheit übersteigender Theiler von σ)

$$\prod_{1}^{\left[\sqrt[\lambda\sigma]{n}\right]} x^{\mathfrak{Q}_{r,2\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda\sigma}}\right]\right)\lambda(x)} = \prod_{1}^{\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} P^{(2)^{\mu\alpha(x)}}_{\mu,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu}}\right]\right) \qquad (\alpha\mu = \lambda;\ \alpha > 1)$$

$$\prod_{1}^{\left[\sqrt[\lambda\sigma]{n}\right]} x^{\mathfrak{Q}_{r,2\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda\sigma}}\right]\right)\lambda(x)} = \prod_{1}^{\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \bar{P}^{(2)^{\mu(x)}}_{\mu,\frac{\sigma}{\mu},n}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu}}\right]\right)$$

(μ ein Theiler von σ),

wo

$$P^{(2)}_{\lambda,\sigma,m}(n) = \prod_{1}^{\left[\frac{\log m}{2\lambda\sigma}\right]} \frac{p_{\lambda,2\tau\sigma}(n)}{p_{\lambda,(2\tau-1)\sigma}(n)}$$

$$\bar{P}^{(2)}_{\lambda,\sigma,m}(n) = \prod_{1}^{\left[\frac{\log m}{2\lambda\sigma}\right]} \frac{\bar{p}_{\lambda,2\tau\sigma}(n)}{\bar{p}_{\lambda,(2\tau-1)\sigma}(n)}$$

ist,

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda]{n})} \nu^{Q_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda})}\right)\lambda(\nu)} = \bar{P}^{(3)}_{2\lambda,\lambda,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda]{n})} \nu^{Q_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda})}\right)\lambda(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \bar{P}^{(3)^{\mu\varkappa(x)}}_{2\varkappa\lambda,\lambda,n}\left(\frac{n}{N(x^{\lambda})}\right) \qquad (\varkappa > 1)$$

$$\prod_{\nu=(\sqrt[\lambda]{n})} \nu^{Q_{r,\lambda}\left(\frac{n}{N(\nu^{\lambda})}\right)\lambda(\nu)} = \prod_{x=(\sqrt[\mu]{n})} \bar{P}^{(3)^{\lambda\alpha(x)}}_{\mu,\lambda,n}\left(\frac{n}{N(x^{\mu})}\right)$$

$(\alpha\mu = 2\lambda;\ \alpha > 1)$,

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \nu^{Q_{r,\lambda}\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda}}\right]\right)\lambda(\nu)} = \bar{P}^{(3)}_{2\lambda,\lambda,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \nu^{Q_{r,\lambda}\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda}}\right]\right)\lambda(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \bar{P}^{(3)^{\mu_{\varkappa}(x)}}_{2\varkappa\lambda,\lambda,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) \quad (\varkappa > 1)$$

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \nu^{Q_{r,\lambda}\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda}}\right]\right)\lambda(\nu)} = \prod_{x=1}^{[\sqrt[\mu]{n}]} \bar{P}^{(3)^{\lambda_{\alpha}(x)}}_{\mu,\lambda,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\mu}}\right]\right) \quad (\alpha\mu = 2\lambda),$$

wo

$$\bar{P}^{(3)}_{\lambda_1,\lambda,m}(n) = \prod_{\tau=1}^{\left[\frac{\log m}{2\lambda}\right]} \frac{\bar{p}_{\lambda_1,2\tau,\lambda}(n)}{p_{\lambda_1,2\tau-1,\lambda}(n)}$$

ist, und speciell

$$\prod_{\nu=(n)} \nu^{\mathfrak{A}^{r}\left(\frac{n}{N(\nu)}\right)\lambda(\nu)} = \bar{P}^{(3)}_{2,1,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=(n)} \nu^{\mathfrak{A}^{r}\left(\frac{n}{N(\nu)}\right)\lambda(\nu)} = \prod_{x=(n)} \bar{P}^{(3)^{\mu_{\varkappa}(x)}}_{2\varkappa,1,n}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \quad (\varkappa > 1)$$

$$\prod_{\nu=(n)} \nu^{\mathfrak{A}^{r}\left(\frac{n}{N(\nu)}\right)\lambda(\nu)} = \prod_{x=(n)} \bar{P}^{(3)^{\lambda(x)}}_{1,1,n}\left(\frac{n}{N(x)}\right),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\nu=1}^{n} \nu^{\left[\frac{n}{\nu}\right]^{r}\lambda(\nu)} = \bar{P}^{(3)}_{2,1,n}(n)$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} \nu^{\left[\frac{n}{\nu}\right]^{r}\lambda(\nu)} = \prod_{x=1}^{n} \bar{P}^{(3)^{\mu_{\varkappa}(x)}}_{2\varkappa,1,n}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \quad (\varkappa > 1)$$

$$\prod_{\nu=1}^{n} \nu^{\left[\frac{n}{\nu}\right]^{r}\lambda(\nu)} = \prod_{x=1}^{n} \bar{P}^{(3)^{\lambda(x)}}_{1,1,n}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)$$

Beachtet man, dass die Function $P_{\lambda,\sigma,m}(r)$ mit wachsendem Argumente wächst, sowie dass, wie man sofort sieht,

$$\sum_{x=1}^{x=(\sqrt[\lambda]{n})} \left\{\log P_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) + \log P_{\lambda_1,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{(30x)^{\lambda}}\right]\right) - \log P_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{(2x)^{\lambda}}\right]\right) - \log P_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{(3x)^{\lambda}}\right]\right) - \right.$$

$$\left. - \log P_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{(5x)^{\lambda}}\right]\right)\right\} = \sum_{n=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} \varepsilon_x \log P_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right)$$

ist, wo ε_x den Werth $+1$, 0 oder -1 besitzt, je nachdem x zur Zahl 30 theilerfremd ist, oder mit derselben nur einen Primfactor gemein hat oder endlich durch mindestens zwei von den drei Primzahlen 2, 3, 5 theilbar ist, so erkennt man leicht, dass sich aus 16) und 17) die zwei wichtigen Ungleichungen ergeben

$$P_{\lambda,\sigma,n}(n) > \prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{\left\{f\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) + f\left(\left[\frac{n}{(30\nu^{\sigma})^{\lambda}}\right]\right) - f\left(\left[\frac{n}{(2\nu^{\sigma})^{\lambda}}\right]\right) - f\left(\left[\frac{n}{(3\nu^{\sigma})^{\lambda}}\right]\right) \quad f\left(\left[\frac{n}{(5\nu^{\sigma})^{\lambda}}\right]\right)\right\} g(\nu)} > \frac{P_{\lambda,\sigma,n}(n)}{P_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{6^{\lambda}}\right]\right)}$$

$$P^{(1)}_{\lambda,\sigma,n}(n) \quad \prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda\sigma]{n}]} \nu^{\mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{\nu^{\lambda\sigma}}\right]\right) + \mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{(30\nu^{\sigma})^{\lambda}}\right]\right) - \mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{(2\nu^{\sigma})^{\lambda}}\right]\right) - \mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{(3\nu^{\sigma})^{\lambda}}\right]\right) - \mathfrak{Q}_{r,\lambda\sigma}\left(\left[\frac{n}{(5\nu^{\sigma})^{\lambda}}\right]\right)} > \frac{P^{(1)}_{\lambda,\sigma,n}(n)}{P^{(1)}_{\lambda,\sigma,n}\left(\left[\frac{n}{6^{\lambda}}\right]\right)}$$

deren erste zu folgendem Theoreme führt:

Hat die Function $g(x)$, welche für alle ganzzahligen Werthepaare x, y der Gleichung

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

genügt, wenigstens für alle primzahligen Argumente denselben Werth, und sind die Functionen $f(x)$ und $h(x)$ so beschaffen, dass

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} f\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) g(x) = n^r$$

und

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} h\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) g(x)$$

gleich der Anzahl derjenigen Systeme von r ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ ist, deren grösster gemeinsamer Theiler durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, so ist

$$\prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \nu^{h\left(\left[\frac{n}{\nu^\lambda}\right]\right) g(\nu)} \quad \prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \nu^{\left\{f\left(\left[\frac{n}{\nu^\lambda}\right]\right) + f\left(\left[\frac{n}{(30\nu)^\lambda}\right]\right) - f\left(\left[\frac{n}{(2\nu)^\lambda}\right]\right) \quad f\left(\left[\frac{n}{(3\nu)^\lambda}\right]\right) \quad \left(\left[\frac{n}{(5\nu)^\lambda}\right]\right)\right\} g(\nu)} >$$

$$> \prod_{\nu=1}^{[\sqrt[\lambda]{n}]} \nu^{\left\{h\left(\left[\frac{n}{\nu^\lambda}\right]\right) - h\left(\left[\frac{n}{(6\nu)^\lambda}\right]\right)\right\} g(\nu)}$$

Zum Schlusse dieses Paragraphes will ich noch darauf hinweisen, dass aus den obigen Entwicklungen auch die Relation

$$\prod_{x_1, x_2, \ldots, x_r = (n)} [x_1, x_2, \ldots, x_r] = \prod_{\lambda=1}^{0(n)} p_\lambda^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\log N(p_\lambda)}\right]} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(p_\lambda^\tau)}\right)}$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\prod_{\lambda=1}^{r} \prod_{x_\lambda=1}^{n} [x_1, x_2, \ldots, x_r] = \prod_{\lambda=1}^{0(n)} p_\lambda^{\sum\limits_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\log p_\lambda}\right]} \left[\frac{n}{p_\lambda^\tau}\right]^r}$$

folgt, welche eine Verallgemeinerung des aus den Elementen der Zahlentheorie bekannten Satzes, dass die höchste Potenz einer Primzahl p_λ, welche in $n!$ enthalten ist, den Exponenten

$$\sum_{\tau=1}^{\tau=\left[\frac{\log n}{\log p_\lambda}\right]} \left[\frac{n}{p_\lambda^\tau}\right]$$

besitzt, vorstellt, welches Theorem die eigentliche Quelle der Tchebychef-de Polygnac'schen Identität ist.

§. 3. Hat die zahlentheoretische Function $\alpha(x)$ den Werth 0, wenn x eine Einheit (E) ist, oder eine Primzahl in einer höheren Potenz als der zweiten, oder mehr als eine Primzahl in einer höheren als der ersten Potenz enthält, den Werth

$$(-1)^{\tilde{\omega}(x)} f(p_1),$$

wo $\tilde{\omega}(x)$ die Anzahl der verschiedenen Primtheiler von x vorstellt, wenn x den Primfactor p_1 in der zweiten, alle übrigen aber nur in der ersten Potenz enthält, und ist sie endlich gleich

$$(-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} \sum_\lambda f(p_\lambda),$$

wo die Summation über alle Primfactoren p_λ der ganzen Zahl x zu erstrecken ist, falls x durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, so ist bekanntlich die über alle Theiler d der ganzen Zahl n ausgedehnte Summe

$$\sum_d \alpha(d) \tag{18}$$

gleich $f(n)$ oder 0, je nachdem n eine Primzahl ist oder nicht. Auf Grund dieser Eigenschaft lässt sich sofort die Gleichung

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\alpha(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]^r \alpha(x) = \sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) \tag{19}$$

aufstellen, wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Systeme von r ganzen Zahlen $z_1, z, \ldots, z_r$ des Complexes (n) zu nehmen sind, deren grösster gemeinsamer Theiler eine Primzahl ist. Setzt man speciell $f(x) = 1$, so ergibt sich aus dieser Formel für die Anzahl $\theta_r(n)$ derjenigen Systeme von r Individuen des Gebietes (n), deren grösster gemeinsamer Theiler eine Primzahl ist, der Ausdruck

$$\sum_{x=(n)} \mathfrak{A}_r\left|\frac{n}{N(x)}\right]\alpha_0(x), \tag{20}$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]^r \alpha_0(x),$$

wo mit $\alpha_0(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\alpha(x)$ bezeichnet wird, für welche die eben angeführten Relationen in die folgenden übergehen:

$$\alpha_0(E) = \alpha_0(x) = 0$$
$$\alpha_0(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)}$$
$$\alpha_0(x) = (-1)^{\bar{\omega}(x)+1}\bar{\omega}(x).$$

Für die reellen und die aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen kann man diese Formeln in die folgenden verwandeln:

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1\ z_2, \ldots, z_r]) = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^r \sum_{x=(\infty)} \left(\frac{\alpha(x)}{N(x^r)}\right) + \Delta$$

$$\sum_{z_2, \ldots, z_r = 1}^{\ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2 \ldots, z_r]) = n^r \sum_{x=(\infty)} \frac{\alpha(x)}{x^r} + \Delta_1,$$

o

$$\Delta = -\left(\frac{\pi n}{4}\right)^r \sum_{x=(\infty)-(n)} \left(\frac{\alpha(x)}{N(x^r)}\right) +$$

$$+ \sum_{x=(n)} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r-1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\varkappa} \binom{r}{\varkappa} \varepsilon_x^{r-\varkappa} \alpha(x) \left(\frac{n}{N(x)}\right)^{\frac{r+\varkappa}{2}} \qquad (|\varepsilon_x| < 1)$$

$$\Delta_1 = -n^r \sum_{x=n+1}^{x=\infty} \frac{\alpha(x)}{x^r} + \sum_{x=1}^{x=n} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r-1} \binom{r}{\varkappa} (-\varepsilon'_x)^{r-\varkappa} \alpha(x) \left(\frac{n}{x}\right)^{\frac{r+\varkappa}{2}}$$

$$(0 \leqq \varepsilon'_x < 1)$$

ist. Da nun, falls (was hierbei selbstverständlich vorausgesetzt wurde)

$$\sum_{x=(\infty)} \left(\frac{\alpha(x)}{N(x^r)}\right), \text{ beziehungsweise } \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\alpha(x)}{x^r},$$

convergirt, nach 18) die Beziehung

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\alpha(x)}{N(x^r)} \sum_{y=(\infty)} \frac{1}{N(y^r)} = \sum_{\lambda} \frac{f(p_\lambda)}{N(p_\lambda^r)}$$

besteht, wo die Summation bezüglich λ über alle dem betreffenden Euklid'schen Zahlengebiete angehörigen Primzahlen auszudehnen ist, welche Relation wegen

$$\sum_{y=(\infty)} \frac{\mu(y)}{N(y^r)} = \frac{1}{\sum\limits_{z=(\infty)} \frac{1}{N(z^r)}}$$

auch in die folgende verwandelt werden kann,

$$\sum_{x=(\infty)} \frac{\alpha(x)}{N(x^r)} = \sum_{y=(\infty)} \frac{\mu(y)}{N(y^r)} \sum_{\lambda} \frac{f(p_\lambda)}{N(p_\lambda^r)}, \tag{21}$$

so hat man für alle die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\Delta|}{n^r} = 0, \text{ beziehungsweise } \lim_{n=\infty} \frac{|\Delta_1|}{n^r} = 0$$

erfüllenden Function $f(x)$ in den eben genannten speciellen Gebieten die asymptotischen Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum'_{z_1, z_2, \ldots, z_r=(n)} f([z_1, z_2, \ldots, z_r])}{\mathfrak{A}^r(n)} = \frac{\sum_\lambda \frac{f(p_\lambda)}{N(p_\lambda^r)}}{\zeta(r) L_r}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum'^{\,z_1, z_2, \ldots, z_r=1}_{z_1, z_2, \ldots, z_r=n} f([z_1, z_2, \ldots, z_r])}{n^r} = \frac{\sum_\lambda \frac{f(p_\lambda)}{p_\lambda^r}}{\zeta(r)}$$

Von den in denselben enthaltenen Theoremen mögen die folgenden besonders angeführt werden:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von r beliebig herausgegriffenen primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ eine Primzahl ist, beträgt im Mittel $\dfrac{\sum_\lambda \frac{1}{N(p_\lambda^r)}}{\zeta(r) L_r}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von $2r$ beliebig gewählten, aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen eine Primzahl ist, beträgt im Mittel $\dfrac{2\Gamma(2r+1)}{(2\pi)^{2r} B_r L_{2r}} \sum_\lambda \dfrac{1}{N(p_\lambda^{2r})}$

Die Wahrscheinlichkeit dass der grösste gemeinsame Theiler von r beliebig herausgegriffenen reellen ganzen positiven Zahlen eine Primzahl ist, beträgt im Mittel $\dfrac{\sum_\lambda \frac{1}{p_\lambda^r}}{\zeta(r)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler von $2r$ beliebig gewählten reellen ganzen positiven Zahlen eine Primzahl ist, beträgt im Mittel $\frac{2\Gamma(2r+1)}{(2\pi)^{2r}B_r}\sum_{\lambda}\frac{1}{p_{\lambda}^{2r}}$.

Sind die im Anfange des Paragraphes 1) erwähnten Functionen $g(x)$ und $h(x)$ so beschaffen, dass entweder

$$\sum_{d_\nu} g\left(\frac{x}{d_\nu}\right) h(d_\nu) = \alpha(x) \tag{22}$$

oder

$$\sum_{d_\nu} g(d_\nu) h\left(\frac{x}{d_\nu}\right) = \alpha(x)$$

ist, wo die Summation bezüglich d_ν über alle Theiler der ganzen Zahl x auszudehnen ist, deren complementärer Divisor eine νte Potenz ist, so bestehen nach I) und 19) die Beziehungen

$$\sum_{z_2,\ldots,z_r=(n)}' f([z_1, z_2, \quad z_r]) = \sum_{x=(n)} G_\nu\left(\frac{n}{N(x)}\right) h(x),$$

beziehungsweise

$$\sum_{z_1,z_2,\ldots,z_r=(n)}' f([z_1, z_2, . \; ., z_r]) = \sum_{x=(\sqrt[\nu]{n})} G_1\left(\frac{n}{N(x^\nu)}\right) h(x^\nu),$$

welche für das reelle Gebiet in die folgenden übergehen

$$\sum_{z_1,z_2,\ldots,z_r=1}^{z_1,z_2,\ldots,z_r=n}{}' f([z_1, z_2, \quad ., z_r]) = \sum_{x=1}^{x=n} G_\nu\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) h(x)$$

$$\sum_{z_1,z_2,\ldots,z_r=1}^{z_1,z_2,\ldots,z_r=n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\nu]{n}]} G_1\left(\left[\frac{n}{x^\nu}\right]\right) h(x^\nu)$$

und speciell bei leicht verständlicher Bezeichnung

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(n)} G_\nu^{(0)}\left(\frac{n}{N(x)}\right) h^{(0)}(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(\sqrt[\nu]{n})} G_1^{(0)}\left(\frac{n}{N(x^\nu)}\right) h^{(0)}(x^\nu)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=n} G_\nu^{(0)}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) h^{(0)}(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\nu]{n}]} G_1^{(0)}\left(\left[\frac{n}{x^\nu}\right]\right) h^{(0)}(x^\nu).$$

Ist die Gleichung 22) erfüllt, so bestehen, wie die Verbindung dieser Relation mit 21) lehrt, die einander äquivalenten Beziehungen

$$\sum_d K(d) h\left(\frac{r}{d}\right) = \begin{cases} f(r) \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum_{d_\nu} H(d_\nu) g\left(\frac{r}{d_\nu}\right) = \begin{cases} f(r) \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem r eine Primzahl ist, oder nicht, wenn

$$H(n) = \sum_d h(d)$$

$$K(n) = \sum_{d_\nu} \mu(d_\nu) g\left(\frac{n}{d_\nu}\right)$$

ist. Aus der Existenz von 23) folgen selbstverständlich ganz analoge Relationen.

Zwei zahlentheoretische Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ heissen conjugirt, wenn die über alle Theiler d einer ganzen Zahl x ausgedehnte Summe

$$\sum_d f(d) f_1\left(\frac{x}{d}\right)$$

für alle Werthe von x, deren Norm die Einheit übersteigt, gleich 0 ist, während sie für $N(x) = 1$ den Werth 1 hat.

Bezeichnet nun $k^{(\alpha)}(x)$ die zu $\sum\limits_{d_\alpha} k\left(\frac{x}{d_\alpha}\right)$ conjugirte Function, so hat man, wie sich unmittelbar ergibt, beim Bestehen der Gleichung 22) die Formeln

$$h(x) = \sum_p f(p) g^{(\nu)}\left(\frac{x}{p}\right)$$

$$g(x) = \sum_p f(p) h^{(1)}\left(\frac{x}{p}\right),$$

in denen die Summation über alle Primtheiler p der ganzen complexen Zahl x auszudehnen ist.

Es sollen nun durch passende Specialisirung der Function $g(x)$, beziehungsweise $h(x)$ mehrere interessante Darstellungen von $\sum\limits_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r])$ und speciell von $\theta_r(n)$ ermittelt werden.

Ist

$$g(x) = \mu(\sqrt[\nu]{x})$$

so erhält $g^{(\nu)}(x)$ den Werth $\lambda_\nu(x)$ [$\lambda_1(x) = 0$ oder 1, je nachdem $N(x) > 1$ oder $N(x) = 1$ ist], und demnach wird

$$h(x) = \sum_p f(p) \lambda_\nu\left(\frac{x}{p}\right)$$

Man hat daher den Satz:

Ist die zahlentheoretische Function $\beta'_\nu(x)$ gleich 0, wenn x auch nur einen seiner Primfactoren in einer Potenz enthält, deren Exponent nach dem Modul ν grösser als 2 ist, oder mehr als einen Primfactor mit einem nach dem Modul ν der Zahl 2 congruenten Exponenten, gleich $(-1)^{\tau+1} f(p)$, wenn bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen der Primfactor p in der $(\varkappa\nu+2)^{\text{ten}}$ Potenz auftritt, τ Primzahlen Exponenten von der Form $\varkappa\nu+1$ und die übrigen durch ν theilbare besitzen, und hat sie endlich den Werth $(-1)^{\tau-1} \sum\limits_p f(p)$, wo die Summation über alle τ Primtheiler von x mit Exponenten von der Form $\varkappa\nu+1$ zu erstrecken ist, in allen anderen Fällen, so ist

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,\nu}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\beta'_\nu(x),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{Q}_{r,\nu}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\beta'_\nu(x)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,\nu}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\beta'^{(0)}_\nu(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{Q}_{r,\nu}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\beta'^{(0)}_\nu(x),$$

wo mit $\beta'^{(0)}_\nu(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\beta'_\nu(x)$ bezeichnet wird für welche die erwähnten Relationen in die folgenden übergehen:

$$\beta'^{(0)}_\nu(x) = 0$$
$$\beta'^{(0)}_\nu(x) = (-1)^{\tau+1}$$
$$\beta'^{(0)}_\nu(x) = (-1)^{\tau-1}\tau.$$

Specielle Fälle der eben aufgestellten Formeln sind die Gleichungen

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = -\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,2}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x) f_2(x)$$

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\vartheta(n)} \mathfrak{Z}_r\left(\frac{n}{N(p_\lambda)}\right) f(p_\lambda),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = -\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{Q}_{r,2}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\lambda(x) f_2(x)$$

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda = \theta(n)} \mathfrak{Z}_r\left(\left[\frac{n}{p_\lambda}\right]\right) f(p_\lambda),$$

wo $f_2(x)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Primtheiler der ganzen complexen Zahl x durchläuft, und speciellst

$$\theta_r(n) = -\sum_{x=(n)} \mathfrak{Q}_{r,2}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x)\tilde{\omega}(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\theta(n)} \mathfrak{Z}_r\left(\frac{n}{N(p_\lambda)}\right)$$

beziehungsweise für reelle Zahlen

$$\theta_r(n) = -\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{Q}_{r,2}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\lambda(x)\tilde{\omega}(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \mathfrak{Z}_r\left(\left[\frac{n}{p_\lambda}\right]\right)$$

Nimmt man

$$h(x) = \mu(\sqrt[r]{x}),$$

so wird

$$G_1(n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\beta'_r(x),$$

oder da, wie man leicht zeigt, die über alle Theiler d der ganzen complexen Zahl x ausgedehnte Summe

$$\sum_d \beta'_r(d)$$

stets gleich Null ist, ausser wenn alle bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen auftretenden Exponenten mit Ausnahme eines einzigen (zur Primzahl p gehörigen) durch ν theilbar sind und dieser von der Form $\varkappa\nu+1$ ist, in welchem Falle sie den Werth $f(p)$ hat,

$$G_1(n) = F_{r,\nu}(n),$$

wo $F_{r,\nu}(n)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche die willkürliche Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument der Reihe nach dem durch die grösste in ihm enthaltene ν^{te} Potenz dividirten grössten gemeinsamen Theiler eines jeden von jenen $F^{(0)}_{r,\nu}(n)$ Systemen von r ganzen Zahlen des Complexes (n) gleichgesetzt wird, für welche der genannte Quotient eine Primzahl ist. Man hat demnach die Relationen

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=(\sqrt[\nu]{n})} F_{r,\nu}\left(\frac{n}{N(x^\nu)}\right)\mu(x),$$

beziehungsweise für das Gebiet der reellen Zahlen

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\nu]{n}]} F_{r,\nu}\left(\left[\frac{n}{x^\nu}\right]\right)\mu(x)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(\sqrt[\nu]{n})} F^{(0)}_{r,\nu}\left(\frac{n}{N(x^\nu)}\right)\mu(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\nu]{n}]} F^{(0)}_{r,\nu}\left(\left[\frac{n}{x^\nu}\right]\right)\mu(x).$$

Ist

$$\nu = 1,\ g(x) = \lambda_\sigma(x),$$

so wird $g^{(\nu)}(x)$ gleich $\mu(\sqrt[\sigma]{x})$ und demnach

$$h(x) = \sum_p f(p)\,\mu\left(\sqrt[\sigma]{\frac{x}{p}}\right).$$

Man hat daher den Satz:

Ist die zahlentheoretische Function $\gamma_\sigma(x)$ nur dann von Null verschieden, wenn sämmtliche bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen auftretenden Exponenten mit Ausnahme eines einzigen (zur Primzahl p gehörigen) gleich σ sind, während dieser einen der Werthe 1, $\sigma+1$ hat, in welchem Falle sie gleich $(-1)^{\tilde{\omega}(x)-1}f(p)$, beziehungsweise $(-1)^{\tilde{\omega}(x)}f(p)$ ist, so hat man die Beziehung

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=(n)} Q_{r,\sigma}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\gamma_\sigma(x),$$

beziehungsweise das reelle Gebiet

$$\sum_{z_r=1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x=n} Q_{r,\sigma}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\gamma_\sigma(x)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(n)} Q_{r,\sigma}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\gamma_\sigma^{(0)}(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=n} Q_{r,\sigma}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\gamma_\sigma^{(0)}(x),$$

wo mit $\gamma_\sigma^{(0)}(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\gamma_\sigma(x)$ bezeichnet wird, für welche die eben erwähnten Werthe in die folgenden übergehen:

$$\gamma_\sigma^{(0)}(x) = 0$$
$$\gamma_\sigma^{(0)}(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)-1}$$
$$\gamma_\sigma^{(0)}(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)}.$$

Setzt man ferner

$$h(x) = \lambda_\sigma(x),$$

so wird

$$G_1(n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\gamma_\sigma(x),$$

oder weil, wie man sofort erkennt, die über alle Theiler d der ganzen complexen Zahl x erstreckte Summe

$$\sum_{d} \gamma_{\sigma}(d) = \Gamma_{\sigma}(x)$$

den Werth 0 hat, wenn bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen auch nur ein σ übersteigender oder mehr als ein σ erreichender Exponent auftritt, gleich $f(p_1)$ ist, wenn hierbei die Primzahl p_1 in der σten, die übrigen Primfactoren in niedrigeren Potenzen auftreten, und endlich in allen anderen Fällen mit der über alle Primtheiler von x ausgedehnten Summe $\sum\limits_{p} f(p)$ übereinstimmt,

$$G_1(n) = \overline{F}_{r,\sigma}(n),$$

wo $\overline{F}_{r,\sigma}(n)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche die willkürliche Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument der Reihe nach einerseits alle Primtheiler jedes von denjenigen grössten gemeinschaftlichen Divisoren der $\mathfrak{A}^{r}(n)$ Systeme von r ganzen complexen Zahlen des Bereiches (n) durchläuft, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen alle Exponenten unterhalb σ liegen, anderseits den den Exponenten σ besitzenden Primfactor eines jeden von denjenigen grössten gemeinsamen Theilern dieser Systeme, welche ein Product aus einer σten und niedrigeren Primzahlpotenzen sind. Man hat daher die Relation

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=(n)} \overline{F}_{r,\sigma}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \lambda_{\sigma}(x),$$

beziehungsweise für den Bereich der reellen Zahlen

$$\sum_{z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x=n} \overline{F}_{r,\sigma}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \lambda_{\sigma}(x)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(n)} \bar{F}^{(0)}_{r,\sigma}\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda_\sigma(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \bar{F}^{(0)}_{r,\sigma}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\lambda_\sigma(x),$$

wo $\bar{F}^{(0)}_{r,\sigma}(n)$ die Summe aus der Anzahl der Primtheiler jedes von denjenigen grössten gemeinschaftlichen Divisoren der $\mathfrak{A}^r(n)$ Systeme von r ganzen complexen Zahlen des Bereiches (n), bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen alle Exponenten unterhalb σ liegen, und der Anzahl derjenigen unter den genannten $\mathfrak{A}^r(n)$ Systemen vorstellt, deren grösster gemeinsamer Theiler ein Product aus einer σten und niedrigeren Primzahlpotenzen ist.

Ist

$$\nu = 1,\; g(x) = \lambda(x)\,\omega(x),$$

so erhält $g^{(\nu)}(x)$ den Werth $\mu_2(x)$ und demnach ist

$$h(x) = \sum_p f(p)\,\mu_2\left(\frac{x}{p}\right)$$

$$= \Gamma_2(x).$$

Da in diesem Falle

$$G_1(n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\lambda(x)\,\omega(x)$$

$$= \Lambda(n)$$

wird, wo $\Lambda(n)$ den Überschuss der Anzahl derjenigen unter den $\mathfrak{A}^r(n)$ grössten gemeinsamen Theilern von je r ganzen complexen Zahlen des Bereiches (n), welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, über die Anzahl der übrigen bezeichnet, so hat man den Satz:

Ist die zahlentheoretische Function $\Gamma_2(x)$ gleich 0, wenn x durch eine dritte Potenz oder durch mehr als eine zweite Potenz (ausser 1) theilbar ist, gleich $f(p_1)$, wenn p_1^2 der einzige quadratische Factor ihres Argumentes ist, und besitzt sie endlich den Werth $\sum_p f(p)$, wo die Summation über alle Primtheiler von x zu erstrecken ist, wenn diese Zahl durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, so besteht die Beziehung

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \qquad z_r]) = \sum_{x=(n)} \Lambda\left(\frac{n}{N(x)}\right) \Gamma_2(x),$$

beziehungsweise für das Gebiet der reellen Zahlen

$$\sum_{z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \qquad z_r]) = \sum_{x=1}^{x=n} \Lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \Gamma_2(x)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(n)} \Lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \Gamma_2^{(0)}(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \Lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \Gamma_2^{(0)}(x),$$

wo $\Gamma_2^{(0)}(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\Gamma_2(x)$ vorstellt, für welche die eben erwähnten Ausdrücke folgende Werthe annehmen:

$$\Gamma_2^{(0)}(x) = 0$$
$$\Gamma_2^{(0)}(x) = 1$$
$$\Gamma_2^{(0)}(x) = \varpi(x).$$

Nimmt man

$$h(x) = \lambda(x)\,\omega(x),$$

so wird

$$G_1(n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right) \Gamma_2(x),$$

oder, weil die über alle Theiler d der ganzen complexen Zahl x ausgedehnte Summe

$$\sum_d \Gamma_2(d)$$

gleich dem Aggregate der Producte ist, welche entstehen, wenn man den Werth, welchen die Function $f(x)$ für jeden einzelnen Primfactor von x annimmt, mit der Anzahl der Zerlegungen des zu demselben complementären Divisors in zwei theilerfremde Factoren multiplicirt,

$$G_1(n) = F_r(n),$$

wo $F_r(n)$ die Summe der für alle $\mathfrak{A}^r(n)$ grössten gemeinsamen Theiler von je r ganzen Zahlen des Complexes (n) gebildeten eben genannten Aggregate bezeichnet, beziehungsweise

$$G_1(n) = F_r^{(0)}(n),$$

für $f(x) = 1$, wo $F_r^{(0)}(n)$ die Summe der Anzahlen der Zerlegungen der zu einem primzahligen complementären Divisor gehörigen Theiler jedes der $\mathfrak{A}^r(n)$ grössten gemeinschaftlichen Divisoren von je r ganzen complexen Zahlen des Bereiches (n) in zwei theilerfremde Factoren vorstellt. Man hat daher die Relation

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=(n)} F_r\left(\frac{n}{N(x)}\right) \lambda(x)\,\omega(x),$$

beziehungsweise für die reellen Zahlen

$$\sum_{\ldots, z_r = 1}^{z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x=n} F_r\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \lambda(x)\,\omega(x)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(n)} F_r^{(0)}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \lambda(x)\,\omega(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=n} F_r^{(0)}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \lambda(x)\,\omega(x).$$

Ist ferner

$$\nu = 1,\ g(x) = \varphi^{(\varkappa)}(x)$$

so erhält $g^{\nu}(x)$ den Werth $N(x^{\varkappa})\mu(x)$, und demnach wird in diesem Falle

$$\frac{h(x)}{N(x^{\varkappa})} = \sum_{p} \frac{f(p)\,\mu\left(\frac{x}{p}\right)}{N(p^{\varkappa})}$$

Da bei den gemachten Voraussetzungen

$$G_1(n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right)\varphi^{(\varkappa)}(x)$$
$$= \bar{S}_\varkappa(n)$$

wird, wo mit $\bar{S}_\varkappa(n)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Normen aller $\mathfrak{A}^r(n)$ grössten gemeinsamen Theiler von je r ganzen Zahlen des Complexes (n) vorstellt, so hat man den Satz:

Ist die zahlentheoretische Function $\delta_\varkappa(x)$ gleich Null, wenn bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen auch nur ein Exponent grösser als 2, oder mehr als ein Exponent grösser als 1 ist, sonst aber gleich dem Producte der Differenz aus der Summe jener Werthe, welche die Function $\frac{f(y)}{N(y^\varkappa)}$ annimmt, wenn ihr Argument alle Primtheiler von x durchläuft, deren complementärer Divisor aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist, und der Summe jener Werthe, welche diese Function erhält, wenn für y die übrigen Primfactoren von x mit durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren complementären Divisor gesetzt werden, so besteht die Beziehung

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=(n)} \bar{S}_\varkappa\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x^\varkappa)\,\delta_\varkappa(x),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{\ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x=n} \bar{S}_\varkappa\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) x^\varkappa\,\delta_\varkappa(x)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(n)} \bar{S}_\varkappa\left(\frac{n}{N(x)}\right) N(x^\varkappa)\,\delta_\varkappa^{(0)}(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \bar{S}_\varkappa\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) x^\varkappa\,\delta_\varkappa^{(0)}(x),$$

wo $\delta_{\chi}^{(0)}(x)$ die dem speciellen Werthe $f(x) = 1$ entsprechende Function $\delta_{\chi}(x)$ vorstellt.

Setzt man

$$g(x) = 1,$$

so wird

$$G_{\nu}(n) = \sum_{x=(\sqrt[\nu]{n})} \mathfrak{A}^{r}\left(\frac{n}{N(x^{\nu})}\right)$$

gleich der Summe $\overline{P}_{0,\nu}(n)$ der Anzahlen desjenigen Theiles jedes der $\mathfrak{A}^{r}(n)$ grössten gemeinschaftlichen Divisoren von je r ganzen complexen Zahlen des Bereiches (n), welche νte Potenzen sind, und

$$g^{\nu}(x) = \sigma_{\nu}(x),$$

wo bekanntlich $\sigma_{\nu}(x)$ den Werth 0 hat, wenn bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen andere Exponenten als 1, ν, $\nu+1$ auftreten und $(-1)^{\sigma}$ [beziehungsweise $(-2)^{\sigma}$ für $\nu = 1$] in allen anderen Fällen ist, wenn σ die Anzahl jener Primfactoren vorstellt, deren Exponent den Werth 1 oder $\nu+1$ hat. Es ist daher

$$h(x) = \sum_{p} f(p)\sigma_{\nu}\left(\frac{x}{p}\right)$$

und demnach hat man den Satz:

Ist die zahlentheoretische Function $\varepsilon_{\nu}(x)$ gleich Null, wenn bei der Darstellung von x durch ein Product von Primzahlpotenzen auch nur ein Exponent grösser als $\nu+2$ ist oder einen der Werthe $3, 4, \ldots, \nu-1$ hat, oder wenn mehr als ein Exponent nach dem Modul ν der Zahl 2 congruent ist, gleich $(-1)^{\sigma_p} f(p)$ [beziehungsweise $(-2)^{\sigma_p} f(p)$], wenn die Primzahl p bei dieser Darstellung den Exponenten ν oder $\nu+2$ hat und in dem zu ihr complementären Divisor σ_p Primfactoren einen der beiden Exponenten 1, ν besitzen, endlich gleich der über alle Primtheiler von x ausgedehnten Summe $\sum\limits_{p} (-1)^{\sigma_p}$ [beziehungsweise $\sum\limits_{p} (-2)^{\sigma_p} f(p)$] in allen anderen Fällen, so entsteht die Beziehung

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (n)}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=(n)} \bar{P}_{0,\nu}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \varepsilon_\nu(x),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum_{z_1, z_2, \ldots, z_r = 1}^{z_1, z_2, \ldots, z_r = n}{}' f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x=n} \bar{P}_{0,\nu}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \varepsilon_\nu(x)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x=(n)} \bar{P}_{0,\nu}\left(\frac{n}{N(x)}\right) \varepsilon_\nu^{(0)}(x)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{n=1}^{x=n} \bar{P}_{0,\nu}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \varepsilon_\nu^{(0)}(x),$$

wo mit $\varepsilon_\nu^{(0)}(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\varepsilon_\nu(x)$ bezeichnet wird, für welche die obigen Werthe in die folgenden übergehen:

$$\varepsilon_\nu^{(0)}(x) = 0$$

$$\varepsilon_\nu^{(0)}(x) = (-1)^{\mathfrak{z}p}, \text{ beziehungsweise } (-2)^{\mathfrak{z}p}$$

$$\varepsilon_\nu^{(0)}(x) = \sum_p (-1)^{\mathfrak{z}p}, \text{ beziehungsweise } \sum_p (-2)^{\mathfrak{z}p}.$$

Wird

$$h(x) = 1 \text{ oder } 0,$$

je nachdem x eine ν^{te} Potenz ist oder nicht, so ist

$$G_1(n) = \sum_{x=(n)} \mathfrak{A}^r\left(\frac{n}{N(x)}\right) \varepsilon_\nu(x)$$

oder da, wie sich sofort ergibt, die über alle Theiler der ganzen complexen Zahl x ausgedehnte Summe

$$\sum_d \varepsilon_\nu(d) = \gamma_\nu(x)$$

ist,

$$G_1(n) = \sum_{\ldots, z_r = (n)} \gamma_\nu([z_1, z_2, \ldots, z_r])$$

und demnach hat man das Theorem:

Multiplicirt man den Werth, welchen die Function $f(x)$ annimmt, wenn für ihr Argument diejenige Primzahl p gesetzt wird, welche in irgend einem derjenigen unter den $\mathfrak{A}^r(n)$ grössten gemeinsamen Theilern von je r ganzen complexen Zahlen des Bereiches (n), bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen sämmtliche Exponenten mit Ausnahme eines einzigen (zur Primzahl p gehörigen) gleich sind, während dieser einen der Werthe 1, $\nu+1$ hat, in der 1 oder $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Potenz erscheint, mit $+1$ oder -1, je nachdem der zu p complementäre Theiler eine gerade oder ungerade Anzahl von verschiedenen Primfactoren enthält, und bezeichnet die Summe der so entstehenden Aggregate mit $F'_{r,\nu}(n)$, beziehungsweise, falls $f(x) = 1$ ist, mit $F'^{(0)}_{r,\nu}(n)$, so besteht die Beziehung

$$\sum'_{z_1, z_2, \ldots, z_r = (x)} f([z_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{n = (\sqrt[\nu]{x})} F'_{r,\nu}\left(\frac{n}{N(x^\nu)}\right),$$

beziehungsweise für das reelle Gebiet

$$\sum'^{z_r = n}_{\ldots, z_r = 1} f(z[_1, z_2, \ldots, z_r]) = \sum_{x=1}^{x = [\sqrt[\nu]{n}]} F'_{r,\nu}\left(\left[\frac{n}{x^\nu}\right]\right)$$

und speciell

$$\theta_r(n) = \sum_{x = (\sqrt[\nu]{n})} F'^{(0)}_{r,\nu}\left(\frac{n}{N(x^\nu)}\right)$$

$$\theta_r(n) = \sum_{x=1}^{x = [\sqrt[\nu]{n}]} F'^{(0)}_{r,\nu}\left(\left[\frac{n}{x^\nu}\right]\right)$$

§. 4. α) Herr Professor Leopold Kronecker hat in seinen an der Berliner Universität gehaltenen algebraischen Vorlesungen mit Hilfe einer eleganten Transformation auf Grund des Multiplicationstheorems der quadratischen Determinanten folgenden Satz bewiesen:

Werden aus den beiden Elementensystemen $a_{h,i}$, $b_{k,l}$ $(h, i = 1, 2, \ldots, n;\ k, l = 1, 2, \ldots, m)$ die $(mn)^2$ Elemente $c_{r,s}$ durch das Gleichungssystem

$$c_{n(k-1)+h,\, n(l-1)+i} = a_{h,i} b_{k,l}$$

abgeleitet, so ist

$$\left|c_{r,s}\right|_{(r,s=1,2,\ldots,mn)} = \left|a_{h,i}\right|^{m} . \left|b_{k,l}\right|^{n}_{(h,i=1,2,\ldots,n;\ k,l=1,2,\ldots,m)}$$

Andere Beweise dieses Satzes wurden von Herrn G. Rados im vierten Bande der mathematisch-naturwissenschaftlichen Mittheilungen aus Ungarn, von Herrn K. Hensel[1] mit Hilfe der Theorie der linearen Transformationen und in allerjüngster Zeit auf einem äusserst einfachen Wege von Herrn G. v. Escherich[2] im 3. Jahrgange der Monatshefte für Mathematik und Physik geliefert. Es soll nun gezeigt werden, dass dieser Satz sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung der Determinanten ableiten und auf Determinanten beliebigen Ranges ausdehnen lässt.

Zu dem Behufe muss die Ermittlung des Werthes einer bestimmten quadratischen Determinante vorausgeschickt werden.

In der quadratischen Determinante $(mn)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & & 0 \\ 0, & 1, & 0, & & 0 \\ & & & & \\ 0, & 0, & 0, & & 1 \end{vmatrix} \tag{24}$$

soll jede Horizontalreihe durch zwei Indices i, λ in der Weise charakterisirt werden, dass für die μ^{ten} n Horizontalreihen i den Werth $\mu-1$ hat und λ der Reihe nach gleich $1, 2, \ldots, n$ wird, so dass also zur $(\sigma n+\varkappa)^{\text{ten}}$ Horizontalreihe die Zahlen

$$i = \sigma-1, \quad \lambda = \varkappa$$

---

[1] »Über die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei anderen componirt ist.« Acta mathematica, 14. Bd., S. 317—329. Die Existenz des Rados'schen Beweises ist mir nur durch den in der Arbeit des Herrn Hensel enthaltenen Hinweis bekannt.

[2] »Über einige Determinanten.« A. a. O. S 68—81.

gehören. Vertauscht man in dieser Determinante die $(rn+\lambda)^{\text{te}}$ Horizontalreihe mit der $(n(j_{rn+\lambda}-1)+\lambda)^{\text{ten}}$ für $r=0,1,2,\ldots,m-1$, so wird die dadurch entstehende Determinante offenbar gleich

$$(j_\lambda, j_{n+\lambda}, j_{2n+\lambda}, \ldots, j_{(m-1)n+\lambda}),$$

wo mit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ diejenige gewöhnliche Determinante bezeichnet wird, welche aus der Determinante m^{ter} Ordnung

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & & 0 \\ 0, & 1, & 0, & & 0 \\ & & & & \\ 0, & 0, & 0, & & 1 \end{vmatrix}$$

dadurch entsteht, dass die $\alpha_\varkappa^{\text{te}}$ Horizontalreihe an die Stelle der $\varkappa^{\text{ten}}$ für $\varkappa=1,2,\ldots,m$ gesetzt wird. Wird die eben erwähnte Operation für $\lambda=1,2,\ldots,n$ ausgeführt, so ergibt sich eine Determinante, welche den Werth

$$\prod_{\lambda=1}^{n}(j_\lambda, j_{n+\lambda}, j_{2n+\lambda}, \ldots, j_{(m-1)n+\lambda})$$

besitzt. Werden nun in derselben diejenigen n Horizontalreihen, in denen der erste der beiden charakterisirenden Indices gleich ist, so vertauscht, dass die zweiten Indices die Anordnung $i_{(\rho-1)n+1}, i_{(\rho-1)n+2}, i_{(\rho-1)n+3}, \quad i_{(\rho-1)n+n}$ erhalten, so erhält sie dadurch den Factor

$$(i_{(\rho-1)n+1}, i_{(\rho-1)n+2}, i_{(\rho-1)n+3}, \ldots, i_{(\rho-1)n+n})$$

und demnach ist die quadratische Determinante $(j_1, j_2, \ldots, j_{mn}$ $i_1, i_2, \ldots, i_{mn})$, welche aus 24) dadurch abgeleitet wird, dass an die Stelle der τ^{ten} Horizontalreihe die durch das Indexpaar j_τ, i_τ charakterisirte tritt, gleich

$$\prod_{\lambda_1=1}^{m}\prod_{\lambda=1}^{n}(i_{n(\lambda_1-1)+1}, i_{(\lambda_1-1)n+2}, i_{(\lambda_1-1)n+3}, \ldots, i_{(\lambda_1-1)n+n})\,. \\ .(j_\lambda, j_{n+\lambda}, j_{2n+\lambda}, \ldots, j_{(m-1)n+\lambda}). \qquad 25)$$

Die Determinante $(mn)^{\text{ter}}$ Ordnung vom Range r $|c_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_r}|_{(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_r=1,2,\ldots,mn)}$ ist bekanntlich durch die Gleichung

$$|c_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_r}|_{(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_r=1,2,\ldots,mn)} = \sum_{\varkappa_1^{(1)},\varkappa_2^{(2)},\ldots,\varkappa_1^{(r-1)},\varkappa_2^{(1)},\varkappa_2^{(2)},\ldots,\varkappa_2^{(r-1)},\ldots,\varkappa_{mn}^{(1)},\varkappa_{mn}^{(2)},\ldots,\varkappa_{mn}^{(r-1)}=1}^{\varkappa_1^{(1)},\varkappa_1^{(2)},\ldots,\varkappa_1^{(r-1)},\varkappa_2^{(1)},\varkappa_2^{(2)},\ldots,\varkappa_2^{(r-1)},\ldots,\varkappa_{mn}^{(1)},\varkappa_{mn}^{(2)},\ldots,\varkappa_{mn}^{(r-1)}=n}$$

$$\prod_{\mu=1}^{r-1} (\varkappa_1^{(\mu)},\varkappa_2^{(\mu)},\ldots,\varkappa_{mn}^{(\mu)})\, c_{1,\varkappa_1^{(1)},\varkappa_1^{(2)},\ldots,\varkappa_1^{(r-1)}}\, c_{2,\varkappa_2^{(1)},\varkappa_2^{(2)},\ldots,\varkappa_2^{(r-1)}} \cdots c_{mn,\varkappa_{mn}^{(1)},\varkappa_{mn}^{(2)},\ldots,\varkappa_{mn}^{(r-1)}}$$

definirt. Sind nun die $(mn)^r$ Elemente $c_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_r}$ aus den zwei Elementensystemen $a_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$, $b_{j_1,j_2,\ldots,j_r}$ $(i_1, i_2,\ldots, i_r = 1, 2,\ldots, n;\ j_1, j_2,\ldots, j_r = 1, 2,\ldots, m)$ in der durch die Gleichungen

$$c_{n(j_1-1)+i_1,\, n(j_2-1)+i_2,\,\ldots,\, n(j_r-1)+i_r} = a_{i_1,i_2,\ldots,i_r}\, b_{j_1,j_2,\ldots,j_r}$$

angegebenen Weise componirt, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$
= \sum_{\substack{i_1^{(1)},\, i_2^{(2)},\, \ldots,\, i_1^{(r-1)},\, i_2^{(1)},\, i_2^{(2)},\, \ldots,\, i_2^{(r-1)} \;\ldots\; i_{mn}^{(1)},\, i_{mn}^{(2)},\, \ldots,\, i_{mn}^{(r-1)};\; j_1^{(1)},\, j_1^{(1)},\, \ldots,\, j_1^{(r-1)},\, j_2^{(1)},\, j_2^{(2)},\, \ldots,\, j_2^{(r-1)},\, \ldots,\, j_{mn}^{(1)},\, j_{mn}^{(2)},\, \ldots,\, j_{mn}^{(r-1)} = 1}}^{i_1^{(1)}\; i_1^{(2)} \;\ldots\; i_1^{(r-1)}\; i_2^{(1)} \;\ldots\; i_2^{(r-1)} \;\ldots,\, i_{mn}^{(1)},\, i_{mn}^{(2)},\, \ldots,\, i_{mn}^{(r-1)} = n,\; j_1^{(1)},\, j_1^{(2)},\, \ldots,\, j_1^{(r-1)},\, j_2^{(1)},\, j_2^{(2)},\, \ldots,\, j_2^{(r-1)} \;\ldots,\, j_{mn}^{(1)},\, j_{mn}^{(2)},\, \ldots,\, j_{mn}^{(r-1)} = m}
$$

$$
\prod_{\mu=1}^{r-1} \left(j_1^{(\mu)}, j_2^{(\mu)}, \ldots, j_{mn}^{(\mu)};\; i_1^{(\mu)}, i_2^{(\mu)}, \ldots, i_{mn}^{(\mu)}\right) a_{1,\, i_1^{(1)},\, i_1^{(2)},\, \ldots\, i_1^{(r-1)}}\; a_{1,\, i_{n+1}^{(1)},\, i_{n+1}^{(2)},\, \ldots\, i_{n+1}^{(r-1)}}
$$

$$
\ldots a_{1,\, i_{(m-1)n+1}^{(1)},\, i_{(m-1)n+1}^{(2)},\, \ldots,\, i_{(m-1)n+1}^{(r-1)}}\; a_{2,\, i_2^{(1)},\, i_2^{(2)},\, \ldots,\, i_2^{(r-1)}}\; a_{2,\, i_{n+2}^{(1)},\, i_{n+2}^{(2)},\, \ldots,\, i_{n+2}^{(r-1)}}
$$

$$
\ldots a_{2,\, i_{(m-1)n+2}^{(1)},\, i_{(m-1)n+2}^{(2)},\, \ldots,\, i_{(m-1)n+2}^{(r-1)}} \ldots a_{n,\, i_n^{(1)},\, i_n^{(2)},\, \ldots,\, i_n^{(r-1)}}\; a_{n,\, i_{2n}^{(1)},\, i_{2n}^{(2)},\, \ldots,\, i_{2n}^{(r-1)}} \ldots a_{i_{mn}^{(1)},\, i_{mn}^{(2)},\, \ldots,\, i_{mn}^{(r-1)}}
$$

$$
.\, b_{1,\, j_1^{(1)},\, j_2^{(2)},\, \ldots,\, j_1^{(r-1)}}\; b_{1,\, j_2^{(1)},\, j_2^{(2)},\, \ldots,\, j_2^{(r-1)}} \ldots b_{1,\, j_n^{(1)},\, j_n^{(2)},\, \ldots,\, j_n^{(r-1)}}\; b_{2,\, j_{n+1}^{(1)},\, j_{n+1}^{(2)},\, \ldots,\, j_{n+1}^{(r-1)}}\; b_{2,\, j_{n+2}^{(1)},\, j_{n+2}^{(2)},\, \ldots,\, j_{n+2}^{(r-1)}}
$$

$$
\ldots b_{2,\, j_{2n}^{(1)},\, j_{2n}^{(2)},\, \ldots,\, j_{2n}^{(r-1)}} \ldots b_{m,\, j_{(m-1)n+1}^{(1)},\, j_{(m-1)n+1}^{(2)},\, \ldots,\, j_{(m-1)n+1}^{(r-1)}}\; b_{m,\, j_{(m-1)n+2}^{(1)},\, j_{(m-1)n+2}^{(2)},\, \ldots,\, j_{(m-1)n+1}^{(r-1)}}
$$

$$
\ldots b_{m,\, j_{mn}^{(1)},\, j_{mn}^{(2)},\, \ldots,\, j_{mn}^{(r-1)}},
$$

oder nach 25)

$$
\left| c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r} \right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r = 1, 2, \dots, mn)} =
$$

$$
= \sum_{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \dots, i_1^{(r-1)}, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_2^{(r-1)}, \dots, i_{mn}^{(1)}, i_{mn}^{(2)}, \dots, i_{mn}^{(r-1)}; j_1^{(1)}, j_1^{(2)}, \dots, j_1^{(r-1)}, j_2^{(1)}, j_2^{(2)}, \dots, j_2^{(r-1)}, \dots, j_{mn}^{(1)}, j_{mn}^{(2)}, \dots, j_{mn}^{(r-1)} = 1}^{i_1^{(1)}, i_1^{(2)}, \dots, i_1^{(r-1)}, i_2^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_2^{(r-1)}, \dots, i_{mn}^{(1)}, i_{mn}^{(2)}, \dots, i_{mn}^{(r-1)} = n; j_1^{(1)}, j_1^{(2)}, \dots, j_1^{(r-1)}, j_2^{(1)}, j_2^{(2)}, \dots, j_2^{(r-1)}, \dots, j_{mn}^{(1)}, j_{mn}^{(2)}, \dots, j_{mn}^{(r-1)} = m}
$$

$$
\prod_{\mu=1}^{r-1} \prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\mu=1}^{n} \left(i^{(\mu)}_{(\lambda-1)n+1}, i^{(\mu)}_{(\lambda-1)n+2}, \dots, i^{(\mu)}_{(\lambda-1)n+n}\right) \left(j^{(\mu)}_{\rho}, j^{(\mu)}_{n+\rho}, j^{(\mu)}_{2n+\rho}, \dots, j^{(\mu)}_{(m-1)n+\rho}\right) a_{1, i^{(1)}_{(\lambda-1)n+1}, i^{(2)}_{(\lambda-1)n+1}, \dots, i^{(n)}_{(\lambda-1)n+1}}
$$

$$
. a_{2, i^{(1)}_{(\lambda-1)n+2}, i^{(2)}_{(\lambda-1)n+2}, \dots, i^{(r-1)}_{(\lambda-1)n+2}} \dots a_{n, i^{(1)}_{\lambda n}, i^{(2)}_{\lambda n}, \dots, i^{(r-1)}_{\lambda n}} . b_{1, j^{(1)}_{\rho}, j^{(2)}_{\rho}, \dots, j^{(r-1)}_{\rho}} b_{2, j^{(1)}_{n+\rho}, j^{(2)}_{n+\rho}, \dots, j^{(r-1)}_{n+\rho}}
$$

$$
\dots b_{m, j^{(1)}_{(m-1)n+\rho}, j^{(2)}_{(m-1)n+\rho}, \dots, j^{(r-1)}_{(m-1)n+\rho}}
$$

Vereinigt man in dieser Gleichung alle Glieder, in denen λ beziehungsweise ρ denselben Werth hat, so verwandelt sich dieselbe in

$$
\left| c_{\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r} \right|_{(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r = 1, 2, \dots, mn)} = \left| a_{i_1, i_2, \dots, i_r} \right|^{m} . \left| b_{j_1, j_2, \dots, j_r} \right|^{n}_{(i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n;\ j_1, j_2, \dots, j_r = 1, 2, \dots, m)},
$$

durch welche Relation die oben erwähnte Ausdehnung der Kronecker'schen Determinantenformel auf Determinanten beliebigen Ranges ausgesprochen wird.

β) Euler hat in seiner »Introductio in analysin infinitorum« durch Anwendung der Analysis auf die Zahlentheorie bekanntlich folgenden bemerkenswerthen Satz bewiesen:

Jede ganze Zahl kann ebenso oft in ungleiche ganze Zahlen zerlegt werden, als sie sich aus den ungeraden Zahlen, jede beliebig oft (natürlich auch nullmal) genommen, additiv zusammensetzen lässt.

Dieses Theorem ist einer auf arithmetischem Wege ungemein leicht zu findenden, wesentlichen Erweiterung fähig.

Sind die zur additiven Erzeugung von ganzen Zahlen zur Verfügung stehenden Elemente

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

und kann jedes von ihnen beliebig oft verwendet werden, so gibt es für jede in diese Elemente zerlegbare ganze Zahl n eine oder mehrere Gleichungen von der Form

$$n = \sum_{\rho} x_\rho a_\rho, \tag{26}$$

in welchen die Grössen x_ρ ganze nicht negative Zahlen sind. Stellt man nun die Zahl x_ρ in einem einfachen Zahlensysteme dar, in welchem das Element ε_μ nicht öfter als β_μ-mal positiv und γ_μ-mal negativ genommen werden darf, so hat man die Gleichungen

$$x_\rho = \sum \alpha_{\rho,\sigma} \varepsilon_\sigma,$$

in denen $\alpha_{\rho,\sigma}$ der Bedingung

$$-\gamma_\sigma \leqq \alpha_{\rho,\sigma} \leqq \beta_\sigma$$

genügt. Es entspricht demnach jeder Gleichung von der Form 26) eine Relation von der Gestalt

$$n = \sum_{\rho,\sigma} \alpha_{\rho,\sigma} a_\rho \varepsilon_\sigma$$

und umgekehrt, und daher hat man das Theorem.

Jede ganze Zahl n lässt sich ebenso oft in die Elemente $\alpha_\rho (\rho = 1, 2, \ldots)$, jedes beliebig oft genommen, zerlegen, als sie durch die Elemente

$$\alpha_\rho \varepsilon_\sigma = \alpha_\rho \prod_{0}^{\sigma-1} {}^{\lambda} (\beta_\lambda + \gamma_\lambda + 1) \qquad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, \beta_0 = \gamma_0 = 0)$$

derart additiv erzeugt werden kann, dass das Element $\alpha_\rho \varepsilon_\sigma$ nicht öfter als β_σ-mal positiv und γ_σ-mal negativ genommen wird.

Ist speciell

$$\beta_\lambda + \gamma_\lambda = \delta (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

und sind die Elemente $\alpha_\rho (\rho = 1, 2, \ldots)$ sämmtliche durch keine Potenz von $\delta + 1$ theilbaren ganzen Zahlen, so werden die Producte $\alpha_\rho \varepsilon_\sigma (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots)$ alle ganzen Zahlen und demnach hat man das weitere Theorem:

Jede ganze Zahl kann ebenso oft in die durch keine Potenz von $\delta + 1$ theilbaren ganzen positiven Zahlen, jede beliebig oft genommen, zerlegt werden, als sie sich aus allen ganzen positiven Zahlen in der Weise additiv zusammensetzen lässt, dass die durch $(\delta + 1)^{\sigma-1}$, aber nicht durch $(\delta + 1)^\sigma$ theilbaren Elemente nicht öfter als β_σ-mal positiv und $(\delta - \beta_\sigma)$-mal negativ genommen werden.

Den speciellen Fall $\beta_\sigma = \delta$ $(\sigma = 1, 2, \ldots)$ dieses Satzes hat meines Wissens zuerst Herr J. Glaisher bewiesen; von den anderen speciellen Fällen desselben mögen hier die folgenden angeführt werden:

Jede ganze Zahl kann ebenso oft durch die zu einer ungeraden Primzahl $2r + 1$ theilerfremden ganzen positiven Zahlen, jede beliebig oft genommen, additiv erzeugt werden, als sie sich in beliebige ganze positive Zahlen in der Weise zerlegen lässt, dass keine von ihnen öfter als r-mal, aber sowohl positiv als negativ genommen wird.

Jede ganze Zahl lässt sich in die zu drei theilerfremden ganzen positiven Zahlen, jede beliebig oft genommen, ebenso oft zerlegen, als sie mit Hilfe von unter einander dem absoluten

Betrage nach verschiedenen ganzen positiven oder negativen Zahlen zusammengesetzt werden kann.

Jede ganze Zahl lässt sich ebenso oft in die durch die Potenzen einer geraden Zahl $2r$ nicht theilbaren ganzen positiven Zahlen, jede beliebig oft genommen, zerlegen, als sie durch alle positiven und negativen ganzen Zahlen in der Weise additiv erzeugt werden kann, dass keine ganze Zahl der einen Sorte öfter als $(r-1)$-mal und keine der anderen öfter als r-mal auftritt.