Über die Multiplicatoren eines Systems linearer, homogener Differentialgleichungen

(I. Mittheilung)

G. v. Escherich,
c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Mai 1892.)

Forschungen nach der eigentlichen Quelle, aus der die von Clebsch angegebene Transformation der zweiten Variation des allgemeinen isoperimetrischen Problems fliesst, haben mich zu einer eingehenderen Untersuchung der Multiplicatoren eines Systems linearer homogener Differentialgleichungen gedrängt. Die hiebei gewonnenen Ergebnisse, die den Zusammenhang der Integral- und Multiplicatorensysteme, die Reduction des gegebenen Formensystems aus der Kenntniss von Integral- und Multiplicatorensystemen etc. klarzulegen versuchen, haben ein durchaus selbständiges Interesse, wesshalb ich sie in einer eigenen Abhandlung der Darstellung ihrer Anwendung auf die Transformation der zweiten Variation voranschicke.

I.

Sucht man zu einem Systeme von n homogenen linearen Differentialausdrücken der ersten Ordnung

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv \frac{dx_1}{dt} - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ f_2 &\equiv \frac{dx_2}{dt} - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\cdots \\ f_n &\equiv \frac{dx_n}{dt} - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

wo $x_1, x_2 \ldots x_n$ die abhängigen Variablen und t die unabhängige Veränderliche bezeichnen, Multiplicatoren: $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$, welche die Summe

$$\rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 + \ldots + \rho_n f_n$$

zu einem vollständigen Differentialquotienten nach t machen, so findet man leicht, dass die gesuchten Grössen die n Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \frac{d\rho_1}{dt} + (a_{11}\rho_1 + a_{21}\rho_2 + \ldots + a_{n1}\rho_n) = 0 \\
\varphi_2 &\equiv \frac{d\rho_2}{dt} + (a_{12}\rho_1 + a_{22}\rho_2 + \ldots + a_{n2}\rho_n) = 0 \\
&\ldots \\
\varphi_n &\equiv \frac{d\rho_n}{dt} + (a_{1n}\rho_1 + a_{2n}\rho_2 + \ldots + a_{nn}\rho_n) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

befriedigen.

Diese Eigenschaft ist aber nur die Folge einer allgemeineren Beziehung, welche zwischen den f und φ besteht und durch die Gleichung

$$\rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 + \ldots + \rho_n f_n + x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_n\varphi_n =$$
$$= \frac{d}{dt}(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n$$

ausgedrückt wird. Aus dieser Relation ergibt sich aber:

»Befriedigen die n Grössen $\rho_1, \rho_2 \ldots$ die n Gleichungen

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_n = 0,$$

so bilden sie ein System Multiplicatoren für die Ausdrücke: $f_1; f_2 \ldots f_n$;

befriedigen hingegen die n Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die n Gleichungen

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0 \ldots f_n = 0,$$

so bilden sie ein System Multiplicatoren für die Ausdrücke: $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$.«

Nennt man daher das System (II) wegen seiner Eigenschaft die Multiplicatoren von (I) zu bestimmen, das diesem adjungirte System, so ist auch umgekehrt (I) zu (II) adjungirt.

II.

Bilden $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ ein System Multiplicatoren von (I), so gilt für jedes Integralsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ von

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0 \ldots f_n = 0 \tag{1}$$

die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n) = 0$$

oder

$$\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n = \text{Const.}$$

Ist diese Constante nicht Null, so kann man durch dieselbe jedes x dividiren und erhält für dieses neue Integralsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$:

$$\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n = 1.$$

Hat man noch ein zweites Integralsystem $\xi_1, \xi_2 \ldots$ so ist für dieses die zugehörige Constante entweder 0, oder, wenn dies nicht der Fall, kann man aus diesem System ein anderes $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ ableiten, wofür

$$\rho_1 \xi_1 + \rho_2 \xi_2 + \ldots + \rho_n \xi_n = 1.$$

Aus den beiden Gleichungen folgt aber

$$\rho_1(x_1 - \xi_1) + \rho_2(x_2 - \xi_2) + \ldots + \rho_n(x_n - \xi_n) = 0$$

und es ergibt sich also aus dieser Bemerkung: Aus n linear unabhängigen particulären Integralsystemen[1] von (1) kann man stets n andere

$$\begin{array}{l} x_1^1,\ x_2^1 \ldots x_n^1; \\ x_1^2,\ x_2^2 \ldots x_n^2; \\ \ldots \\ x_1^n,\ x_2^n \ldots x_n^n \end{array}$$

---

[1] n particuläre Integralsysteme

$$\begin{array}{l} \xi_1^1,\ \xi_2^1 \ldots \xi_n^1; \\ \xi_1^2,\ \xi_2^2 \ldots \xi_n^2; \\ \ldots \\ \xi_1^n,\ \xi_2^n \ldots \xi_n^n \end{array}$$

herleiten, welche in den Beziehungen stehen:

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1 x_1^1 + \rho_2 x_2^1 + \ldots + \rho_n x_n^1 = 0 \\ \rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2 + \ldots + \rho_n x_n^2 = 0 \\ \ldots \\ \rho_1 x_1^{n-1} + \rho_2 x_2^{n-1} + \ldots + \rho_n x_n^{n-1} = 0 \\ \rho_1 x_1^n + \rho_2 x_2^n + \ldots + \rho_n x_n^n = 1\end{array}\right\} \qquad (III)$$

Jedes andere particuläre Integralsystem $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ von (1), welches mit dem $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ durch die Gleichung

$$\rho_1 \xi_1 + \rho_2 \xi_2 + \ldots + \rho_n \xi_n = 0$$

verknüpft ist, hängt linear von dem $(n-1)$ ersten dieser Systeme ab.

Aus den Gleichungen (III) lassen sich die $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ durch die Elemente der n linear unabhängigen Integralsysteme von (1) bestimmen, und zwar findet man, wenn X die Determinante $\Sigma \pm x_1^1 x_2^2 \ldots x_n^n$ dieser Systeme bezeichnet:

$$\rho_1 = \frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x_1^n}, \quad \rho_2 = \frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x_2^n} \quad \ldots \quad \rho_n = \frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial x_n^n}.$$

Sind n Grössen ρ durch die Gleichungen (III) mit den n particulären Integralsystemen von (1) verbunden, so erhält man für dieselben, indem man die Gleichungen nach t differentiirt und für die Ableitungen der x nach t die Werthe aus (1) einsetzt, wegen $X \neq 0$ wieder das Gleichungssystem (II).

Hängen die n linear unabhängigen Integralsysteme von (I) mit n Grössen $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ durch das Gleichungssystem (III) zusammen, so bildet diese ein System Multiplicatoren von (I).

---

sollen linear unabhängig heissen, wenn nicht die Glieder jeder Colonne dieser Determinante dieselbe homogene Gleichung mit constanten Coëfficienten

$$\alpha_1 \xi^1 + \alpha_2 \xi^2 + \ldots + \alpha_n \xi^n = 0$$

befriedigen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist bekanntlich, dass die Determinante dieser Grössen nicht identisch verschwindet.

Wegen der Reciprocität, die zwischen den Systemen (I) und (II) besteht, lässt sich jedem der hier aufgestellten Sätze ein reciproker an die Seite stellen.

III.

Der eben gefundene Zusammenhang zwischen den Integralen der Gleichungssysteme (1) und (II), sowie eine Ableitung dieses aus jenen ergibt sich auch in einfacher Weise aus der Zusammensetzung der Coëfficienten a in (I) durch die Elemente von n linear unabhängigen Integralsystemen von (1).

1. Bezeichnen wieder

$$\begin{array}{l} x_1^1, \; x_2^1 \ldots x_n^1 \\ x_1^2, \; x_2^2 \ldots x_n^3 \\ \\ x_1^n, \; x_2^n \ldots x_n^n \end{array}$$

n linear unabhängige Integralsysteme von (1) und ist X ihre Determinante, so erhält man

$$f_k = \frac{1}{X} \begin{vmatrix} \frac{dx_k}{dt}, & x_1 & \ldots x_n \\ \frac{dx_k^1}{dt}, & x_1^1 & \ldots x_n^1 \\ \\ \frac{dx_n^n}{dt}, & x_1^n & \ldots x_n^n \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten, welche die verschiedenen Formen $f_1, f_2 \ldots f_n$ darstellen, unterscheiden sich also nur in ihrer ersten Colonne. Bezeichnet man daher mit X_k^i die Subdeterminante des Elementes x_k^i in X und bildet die Summe

$$X_1^i f_1 + X_2^i f_2 + \ldots + X_n^i f_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^i f_k,$$

so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^i f = \frac{1}{X} \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} X_k^i \frac{dx_k}{dt}, & x_1 & \ldots x_n \\ \sum_{k=1}^{n} X_k^i \frac{dx_k^1}{dt}, & x_1^1 & \ldots x_n^1 \\ \vdots & & \\ \sum_{k=1}^{n} X_k^i \frac{dx_k^n}{dt}, & x_1^n & \ldots x_n^n \end{vmatrix}$$

Addirt man in dieser Determinante zur ersten Colonne, nachdem man sie durch X dividirt hat, die mit $\frac{d}{dt}\frac{X_k^i}{X}$ multiplicirte $(k+1)^{te}$ und verfährt so mit allen auf die erste folgenden Colonnen, so geht die obige Gleichung in

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^i f_k = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{X_k^i}{X}\frac{dx_k}{dt} + x_k \frac{d}{dt}\left(\frac{X_k^i}{X}\right)\right], & x_1 \ldots x_n \\ \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{X_k^i}{X}\frac{dx_k^1}{dt} + x_k^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{X_k^i}{X}\right)\right], & x_1^1 \ldots x_n^1 \\ \vdots & \\ \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{X_k^i}{X}\frac{dx_k^n}{dt} + x_k^n \frac{d}{dt}\left(\frac{X_k^i}{X}\right)\right] & \end{vmatrix}$$

über. Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{X_n^i}{X}\frac{dx_k^\mu}{dt} + x_k^\mu \frac{d}{dt}\frac{X_k^i}{X}\right] = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\left[x_k^\mu \frac{X_k^i}{X}\right] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

je nachdem

$$\mu \begin{cases} \neq i \\ = i \end{cases}$$

ist. Es verschwinden somit in der ersten Colonne obiger Determinante sämmtliche Elemente bis auf das erste, und man hat daher

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^i f_k = X \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^i}{X} x_k$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^i}{X} f_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^i}{X} x_k$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{d}{dt} \frac{1}{X} \begin{vmatrix} x_1, & x_2 & \ldots x_n \\ x_1^1, & x_2^1 & .x_n^1 \\ & & \\ x_1^{k-1}, & x_2^{k-1} \ldots & x_n^{k-1} \\ x_1^{k+1}, & x_2^{k+1}. & .x_n^{k+1} \\ & & \\ x_1^n, & x_2^n & \ldots x_n^n \end{vmatrix}$$

Es sind daher die n Grössen

$$\rho_1^i = \frac{X_1^i}{X}, \; \rho_2^i = \frac{X_2^i}{X} \; \ldots \rho_n^i = \frac{X_n^i}{X}$$

Multiplicatoren von (I).

Man ersieht hieraus:

Die Subdeterminanten der Elemente einer jedweden Zeile in X bilden ein System Multiplicatoren von (I).

Man erhält also aus den n linear unabhängigen Integralsystemen von (I) n Systeme von Multiplicatoren:

$$\begin{matrix} \rho_1^1, & \rho_2^1 \ldots & \rho_n^1 \\ \rho_1^2, & \rho_2^2 . & .\rho_n^2 \\ & & \\ \rho_1^n, & \rho_2^n & .\rho_n^n \end{matrix}$$

welche in dem früher angegebenen Sinne linear unabhängig von einander sind, da deren Determinant P mit X durch die Relation

$$XP = 1$$

zusammenhängt und somit nicht Null sein kann.

2. Jedes dieser Systeme von Functionen genügt demselben System von n linearen homogenen Differentialgleichungen der ersten Ordnung. Man erhält dieses entweder auf der in (II) angegebenen Weise, indem man von der Relation

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k$$

ausgeht oder unmittelbar aus der Gleichung

$$\rho_k^i = \frac{X_k^i}{X}.$$

Denn hieraus folgt:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \rho_k^i x_k^\mu = 0$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^\mu \frac{d\rho_k^i}{dt} = - \sum_{k=1}^{n} \rho_k^i \frac{dx_k^\mu}{dt}$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^i}{X} \frac{dx_k^\mu}{dt}.$$

Um aus den n Gleichungen, die man hieraus für $\mu = 1, 2 \dots n$ erhält, die Differentialquotienten

$$\frac{d\rho_1^i}{dt}, \frac{d\rho_2^i}{dt} \qquad \frac{d\rho_n^i}{dt}$$

zu bestimmen, multiplicire man die μ^{te} mit X_k^μ; nachdem man jede mit dem zugehörigen Factor multiplicirt hat, ergibt die Addition

$$\frac{d\rho_k^i}{dt} \sum_{k=1}^{n} X_k^\mu x_k^\mu = - \frac{1}{X} \sum_{\mu=1}^{n} X_k^\mu \sum_{\lambda=1}^{n} X_\lambda^i \frac{dx_\lambda^\mu}{dt}$$

$$= - \frac{1}{X} \sum_{\lambda=1}^{n} X_\lambda^i \sum_{\mu=1}^{n} X_k^\mu \frac{dx_\lambda^\mu}{dt}$$

oder da

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^\mu x_k^\mu = X$$

und

$$a_{\lambda k} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{X_k^\mu}{X} \frac{dx_\lambda^\mu}{dt}$$

ist:

$$-\frac{d\rho_k^i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\lambda k} \rho_\lambda^i.$$

3. Nach der Bedeutung der Grössen ρ ist

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^\mu \rho_k^i = \frac{1}{X} \sum_{k=1}^{n} x_k^\mu X_k^i$$

$$= \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

je nachdem $\mu \neq i$ oder $\mu = i$ ist. Indem man nun hierin dem i die Werthe 1, 2. . n beilegt, erhält man n Gleichungen, aus denen sich, weil die Determinante P nicht verschwindet, die Grössen $x_1^\mu, x_2^\mu. \; . x_n^\mu$ berechnen lassen. Bezeichnet man mit P_k^μ die Subdeterminante von ρ_k^μ in P, so erhält man

$$x_k^\mu = \frac{P_k^\mu}{P}$$

und hieraus erhellt wieder die Reciprocität, die zwischen den Grössen x und ρ und damit zwischen den Systemen (I) und (II) besteht.

IV

Die bisher entwickelten Formeln ergeben auch unmittelbar das allgemeine Integralsystem der n simultanen linearen Differentialgleichungen

$$f_1 = b_1, f_2 = b_2 \ldots f_n = b_n,$$

wo die $b_1, b_2. \; . b_n$ Functionen bloss von t sind, wenn das von

$$f_1 = 0, f = 0. \; . f_n = 0 \qquad (1)$$

ermittelt ist.

Denn sind wieder

$$\begin{matrix} x_1^1, & x_2^1 & .x_n^1 \\ x_1^2, & x_2^2 & .x_n^2 \\ \\ x_1^n, & x_2^n & .x_n^n \end{matrix}$$

n linear unabhängige Integralsysteme von (1), so sind auch n linear unabhängige Multiplicatorensysteme

$$\begin{matrix} \rho_1^1, & \rho_2^1 & \rho_n^1 \\ \rho_1^2, & \rho_2^2 & \rho_n^2 \\ \\ \rho_1^n, & \rho_2^n & ..\rho_n^n \end{matrix}$$

von

$$f_1, f_2 . \quad . f_n$$

bekannt. Ist $\rho_1, \rho_2 . \quad . \rho_n$ irgend eines derselben, so ist

$$\rho_1 f_1 + \rho_2 f_2 + . \quad + \rho_n f_n = \frac{d}{dt}(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \quad . + \rho_n x_n)$$

und daher

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \quad + \rho_n x_n) = \rho_1 b_1 + \rho_2 b_2 + \quad + \rho_n b_n.$$

Bezeichnet man $\sum_{k=1}^{n} \rho_k b_k$ mit S und unterscheidet die verschiedenen S, welche den verschiedenen Systemen der ρ zugehören, durch Anfügung des gemeinsamen oberen Index der ρ an S unten rechts, so erhält man zur Bestimmung von $x_1, x_2 \ldots x_n$ die n Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho_1^1 x_1 + \rho_2^1 x_2 + \quad . + \rho_n^1 x_n &= \int S_1 \, dt \\ \rho_1^2 x_1 + \rho_2^2 x_2 + \quad . + \rho_n^2 x_n &= \int S_2 \, dt \\ \\ \rho_1^n x_1 + \rho_2^n x_2 + \quad . + \rho_n^n x_n &= \int S_n \, dt. \end{aligned}$$

Da nun

$$x_k^i = \frac{P_{ik}}{P},$$

so ergibt sich hieraus:

$$x_k = x_k^1 \int S_1 dt + x_k^2 \int S_2 dt + \ldots + x_k^n \int S_n dt.$$

V

Ist nun $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ ein Multiplicatorensystem von (I), so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k = \frac{d}{dt}(\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n).$$

Bildet man mit Hilfe dieser Grössen ρ aus (I) das System von $(n-1)$ linearen homogenen Ausdrücken:

$$f_1^1 \equiv \frac{dx_1}{dt} - \frac{a_{11}\rho_n - a_{1n}\rho_1}{\rho_n} x_1 - \ldots - \frac{a_{1,n-1}\rho_n - a_{1n}\rho_{n-1}}{\rho_n} x_{n-1}$$

$$f_2^1 \equiv \frac{dx_2}{dt} - \frac{a_{21}\rho_n - a_{2n}\rho_1}{\rho_n} x_1 - \ldots - \frac{a_{2,n-1}\rho_n - a_{2n}\rho_{n-1}}{\rho_n} x_{n-1}$$

$$f_{n-1}^1 \equiv \frac{dx_{n-1}}{dt} - \frac{a_{n-1,1}\rho_n - a_{n-1,n}\rho_1}{\rho_n} x_1 - \ldots - \frac{a_{n-1,n-1}\rho_n - a_{n-1,n}\rho_{n-1}}{\rho_n} x_{n-1},$$

so stehen die Multiplicatoren $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ dieses neuen Systems mit denen des ursprünglichen in enger Beziehung. Denn wie das zu diesem adjungirte System:

$$\varphi_1^1 \equiv \frac{dr_1}{dt} + a_{11} r_1 + \ldots + a_{n-1,1} r_{n-1} - \frac{\rho_1}{\rho_n}(a_{1,n} r_1 + \ldots + a_{n-1,n} r_{n-1})$$

$$\varphi_2^1 \equiv \frac{dr_2}{dt} + a_{12} r_1 + \ldots + a_{n-1,2} r_{n-1} - \frac{\rho_2}{\rho_n}(a_{1,n} r_1 + \ldots + a_{n-1,n} r_{n-1})$$

$$\varphi_{n-1}^1 \equiv \frac{dr_{n-1}}{dt} + a_{1,n-1} r_1 + \ldots + a_{n-1,n-1} r_{n-1} -$$

$$- \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}(a_{1,n} r_1 + \ldots + a_{n-1,n} r_{n-1})$$

zeigt, werden die Gleichungen

$$\varphi_1^1 = 0,\ \varphi_2^1 = 0 . \quad . \varphi_{n-1}^1 = 0$$

durch die Grössen

$$r_1 = \frac{\rho_1 \rho_n' - \rho_1' \rho_n}{\rho_n},\ r_2 = \frac{\rho_2 \rho_n' - \rho_2' \rho_n}{\rho_n}, \qquad r_{n-1} = \frac{\rho_{n-1} \rho_n' - \rho_{n-1}' \rho_n}{\rho_n}$$

befriedigt, wenn auch

$$\rho_1',\ \rho_2' . \quad . \rho_n'$$

ein System Multiplicatoren von (I) sind: es sind also dann

$$r_1,\ r_2 \ldots r_{n-1}$$

Multiplicatoren des Systems $f_1^1,\ f_2^1 \quad . f_{n-1}^1$.

Jedes Lösungssystem $x_1, x_2 . \quad . x_{n-1}$ von

$$f_1^1 = 0,\ f_2^1 = 0 \ldots f_{n-1}^1 = 0$$

liefert mit

$$x_n = -\frac{\rho_1}{\rho_n} x_1 - . \quad . - \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} x^{n-1}$$

ein Lösungssystem von

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0 \ldots f_n = 0.$$

Und umgekehrt: Jedes Lösungssystem $x_1, x_2 . \quad . x_n$ dieses letzteren Gleichungssystems, das überdies der Relation

$$\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + . \quad . + \rho_n x_n = 0$$

genügt, ergibt ein Lösungssystem: $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ von

$$f_1^1 = 0,\ f_2^1 = 0 . \quad . f_{n-1}^1 = 0.$$

VI.

Da $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ ein System Multiplicatoren von $f_1^1, f_2^1 \ldots f_{n-1}^1$ sind, so ist nach III (2)

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k f_k^1 = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} r_k x_k$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k \rho'_n - \rho'_k \rho_n}{\rho_n}$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{\rho'_n}{\rho_n} \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \right] - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \rho'_k x_k .$$

Hieraus folgt, da

$$\sum_{k=1}^{n} \rho'_k f_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \rho'_k x_k$$

ist,

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k f'_k = \frac{\rho'_n}{\rho_n} \sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k - \sum_{k=1}^{n} \rho'_k f_k + \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \right) \frac{d}{dt} \frac{\rho'_n}{\rho_n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} r_k f_k + \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \right) \frac{d}{dt} \frac{\rho'_n}{\rho_n}.$$

Berücksichtigt man nun, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k$$

ist, so erhält man hieraus:

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho'_n}{\rho_n}\right)} \sum_{k=1}^{n-1} r_k f'_k \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} r_k f_k}{\frac{d}{dt} \frac{\rho'_n}{\rho_n}} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho'_n}{\rho_n}\right)} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} r_k f_k \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} r_k f_k}{\frac{d}{dt} \frac{\rho'_n}{\rho_n}} \right).$$

Hat X wieder dieselbe Bedeutung wie in (III) und wählt man

$$\rho_k = \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial x_k^n} = \frac{X_k^n}{X}$$

$$\rho'_k = \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial X_k^{n-1}} = \frac{X_k^{n-1}}{X},$$

so ist

$$r_k = \frac{\rho_k \rho'_n - \rho'_k \rho_n}{\rho_n} = \frac{1}{X} \frac{X_k^n X_n^{n-1} - X_k^{n-1} X_n^n}{X_n^n}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \partial x_k^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}}.$$

Man erhält somit

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_k^n} f_k = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}}\right)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \partial x_k^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{d x_n^n}} f_k^1\right]$$

$$- \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \partial x_k^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}} f_k}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}}\right)}\right).$$

Bildet man mittelst der r_k die Ausdrücke $f_1^2, f_2^2 \,.. f_{n-2}^2$ auf analoge Weise wie die $f_1^1, f_2^1 \; . f_{n-1}^1$ mittelst der ρ_k aus $f_1, f_2 \ldots f_n$ hergeleitet wurden, so findet man

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_k^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}} f_k^1 = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1}}}\right)} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dfrac{\partial^n X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1} \, \partial x_k^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1}}} f_k^{(2)}$$

$$- \frac{d}{dt} \left(\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dfrac{\partial^3 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1} \, \partial x_k^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1}}} f_k^{(1)}}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1}}}\right)} \right).$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die obige Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k,$$

so erhält man vermöge der Identität

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dfrac{\partial^3 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1} \, \partial x_k^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1}}} f_k^2 = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\dfrac{\partial^3 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1} \, \partial x_k^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1}}} x_k$$

hieraus:

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k f_k = \frac{d}{dt} \frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}}\right)} \frac{d}{dt} \frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1}}}\right)} \frac{d}{dt} \sum_{k-1}^{n-2} \frac{\dfrac{\partial^3 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1} \, \partial x_k^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n \, \partial x_{n-1}^{n-1}}} x_k$$

$$-\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\frac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}}{\frac{\partial X}{\partial x_n^{n}}}\right)}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\dfrac{\partial^3 X}{\partial x_n^n\,\partial x_{n-1}^{n-1}\,\partial x_k^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n\,\partial x_{n-1}^{n-1}}}\,f_k^{(1)}}{\dfrac{d}{dt}\,\dfrac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n\,\partial x_{n-1}^{n-2}}}{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n\,\partial x_{n-1}^{n-1}}}}\right)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n\,\partial x_k^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}}\,f_k}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\frac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}}{\frac{\partial X}{\partial x_n^{n}}}\right)}\right).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man bei λ-maliger Wiederholung desselben:

$$\sum_{k=1}^{n}\rho_k f_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X}{\partial x_k^n}\,f_k=$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\frac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}}{\frac{\partial X}{\partial x_n^{n}}}\right)}\,\frac{d}{dt}$$

$$\cdot\frac{d}{dt}\,\frac{}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial^\lambda X}{\partial x_n^n\cdots\partial x_{n-\lambda+2}^{n-\lambda+2}\,\partial x_{n-\lambda+1}^{n-\lambda}}}{\dfrac{\partial^\lambda X}{\partial x_n^n\cdots\partial x_{n-\lambda+2}^{n-\lambda+2}\,\partial x_{n-\lambda+1}^{n-\lambda+1}}}\right)}\,\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\lambda-n}\frac{\dfrac{\partial^{\lambda+1} X}{\partial x_n^n\cdots\partial x_{n-\lambda+1}^{n-\lambda+1}\,\partial x_k^{n-\lambda}}}{\dfrac{\partial^\lambda X}{\partial x_n^n\cdots\partial x_{n-\lambda+2}^{n-\lambda+2}\,\partial x_{n-\lambda+1}^{n-\lambda+1}}}\,x_k$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}}\right)}\frac{d}{dt}$$

$$\cdot\frac{d}{dt}\frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial^\lambda X}{\partial x_n^n\ldots\partial x_{n-\lambda+2}^{n-\lambda+2}\partial x_{n-\lambda+1}^{n-\lambda}}}{\dfrac{\partial^\lambda X}{\partial x_n^n\ldots\partial x_{n-\lambda+2}^{n-\lambda+2}\partial x_{n-\lambda+1}^{n-\lambda+1}}}\right)}\sum_{k=1}^{n-\lambda}\frac{\dfrac{\partial^{\lambda+1}X}{\partial x_n^n\ldots\partial x_{n-\lambda+1}^{n-\lambda+1}\partial x_k^{n-\lambda}}}{\dfrac{\partial^\lambda X}{\partial x_n^n\ldots\partial x_{n-\lambda+2}^{n-\lambda+2}\partial x_{n-\lambda+1}^{n-\lambda+1}}}f_k^{(\lambda-1)}-$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{1}{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}}\right)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\dfrac{\partial^2 X}{\partial x_n^n\,\partial x_k^{n-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x_n^n}}f_k.$$

Die hierin vorkommenden Grössen $f_1^\mu, f_2^\mu \ldots f_{n-\mu}^\mu$ werden offenbar aus $f_1, f_2 \ldots f_{n-\mu}$ erhalten, indem man in diesen die Grössen $x_{n-\mu+1}, x_{n-\mu+2} \ldots x_n$ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial x_1^n}x_1+\frac{\partial X}{\partial x_2^n}x_2+\ldots+\frac{\partial X}{\partial x_n^n}x_n=0$$
$$\frac{\partial X}{\partial x_1^{n-1}}x_1+\frac{\partial X}{\partial x_2^{n-1}}x_2+\ldots+\frac{\partial X}{\partial x_n^{n-1}}x_n=0$$
$$\cdots$$
$$\frac{\partial X}{\partial x_1^{n-\mu+1}}x_1+\frac{\partial X}{\partial x_2^{n-\mu+1}}x_2+\ldots+\frac{\partial X}{\partial x_n^{n-\mu+1}}x_n=0$$

einsetzt.

VII.

Ebenso wie sich aus der Kenntniss von Multiplicatorensystemen von (I) eine Reduction des Formensystems $f_1, f_2 \ldots f_n$ erzielen lässt, kann eine solche auch mittelst eines Systems particulärer Integrale

$$\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$$

der Gleichungen

$$f_1 = 0, f_2 = 0. \quad f_n = 0$$

bewerkstelligt werden.

Denn setzt man

$$x_\lambda - \frac{\xi_\lambda}{\xi_n} x_n = y_\lambda,$$

so geht bekanntlich das obige Gleichungssystem in ein anderes aus nur $(n-1)$ Gleichungen zwischen $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$ über, deren linke Seiten die Ausdrücke:

$$\varphi_1 \equiv \frac{\xi_n f_1 - \xi_k f_n}{\xi_n} = \frac{dy_1}{dt} - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{a_{1\lambda}\xi_n - a_{n\lambda}\xi_1}{\xi_n} y_\lambda$$

$$\varphi_{n-1} \equiv \frac{\xi_n f_{n-1} - \xi_{n-1} f_n}{\xi_n} = \frac{dy_{n-1}}{dt} - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{a_{n-1,\lambda}\xi_n - a_{n,\lambda}\xi_{n-1}}{\xi_n} y_\lambda$$

darstellen.

1. Bezeichnet man ein System Multiplicatoren dieses Formensystems mit $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$, so genügen sie dem adjungirten System

$$\psi_\lambda = \frac{dr_\lambda}{dt} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k\lambda}\xi_n - a_{n\lambda}\xi_k}{\xi_n} r_k \qquad \lambda = 1, 2. \; . n-1$$

$$= \frac{dr_\lambda}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{k\lambda} r_\lambda - \frac{a_{n\lambda}}{\xi_n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k r_k.$$

Wird nun mit r_n die Grösse bezeichnet, die durch die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k r_k = 0$$

bestimmt wird, so nimmt dieses die einfachere Gestalt an:

$$\psi_\lambda \equiv \frac{dr_\lambda}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{k\lambda} r_k \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots n-1).$$

Diese Ausdrücke bilden aber in Verbindung mit

$$\psi_n = \frac{d\nu_n}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{kn}\nu_k$$

das adjungirte System von (I) und es ist daher

$$\xi_1\psi_1 + \xi_2\psi_2 + \ldots + \xi_n\psi_n = \frac{d}{dt}(\nu_1\xi_1 + \nu_2\xi_2 + \ldots + \nu_n\xi_n)$$
$$= 0.$$

Somit:

Befriedigen die Grössen $r_1, r_2 \ldots r_n$, die in der Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k r_k = 0$$

stehen, die Gleichungen

$$\psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0 \ldots \psi_{n-1} = 0,$$

so genügen sie auch der Gleichung

$$\psi_n = 0,$$

und sind daher Multiplicatoren des Systems (I).

Und umgekehrt:

Von jedem System Multiplicatoren $r_1, r_2 \ldots r_n$ von (I), das die Gleichung

$$\xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \ldots + \xi_n r_n = 0$$

befriedigt, sind

$$r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$$

Multiplicatoren von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$.

Bildet man mit diesen Multiplicatoren $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k \varphi_k,$$

so findet man

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} r_k f_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} r_k y_k .$$

Also:

Ist $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ ein Integral- und $r_1, r_2 \ldots r_n$ ein Multiplicatorensystem von

$$f_1 = 0, f_2 = 0 \ldots f_n = 0,$$

die in der Beziehung

$$\xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \ldots + \xi_n r_n = 0$$

stehen, so ist

$$\sum_{k=1}^{n} r_k f_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} r_k \frac{\xi_n x_k - x_n \xi_k}{\xi_n} .$$

Es wird somit für jedes Integralsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ von

$$f_1 = 0, f_2 = 0 \ldots f_n = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k y_k = \text{Const.}$$

Diese Constante wird aber, wie aus

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k y_k = \sum_{k=1}^{n} r_k \frac{x_k \xi_n - x_n \xi_k}{\xi_n} = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k$$

hervorgeht, dann und nur dann Null, wenn

$$\sum_{k=1}^{n} r_k x_k = 0$$

ist.

Also:

Jedes Integralsystem $x_1, x_2 \ldots x_n$ von

$$f_1 = 0, f_2 = 0 \ldots f_n = 0$$

ergibt ein Integralsystem $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$ von

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_{n-1} = 0.$$

Dieses steht aber dann und nur dann mit dem Multiplicatorensystem $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ in der Beziehung

$$r_1 y_1 + r_2 y_2 + \ldots + r_{n-1} y_{n-1} = 0,$$

wenn die $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Gleichung

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 + \ldots + r_n x_n = 0$$

befriedigen.

2. Bilden $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$ ein anderes Multiplicatorensystem von $f_1, f_2 \ldots f_n$, wofür

$$\rho_1 \xi_1 + \rho_2 \xi_2 + \ldots + \rho_n \xi_n = 0$$

ist, so stellen nach dem Vorangehenden

$$\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{n-1}$$

ein System Multiplicatoren von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$ dar. Es ist daher nach (VI):

$$\sum_{k=1}^{n} r_k f_k = \sum_{k=1}^{n-1} r_k \varphi_k = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} r_k y_k$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{\frac{d}{dt}\frac{r_{n-1}}{\rho_{n-1}}} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} R_k$$

$$- \frac{d}{dt} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} R_k y_k}{\frac{d}{dt}\left(\frac{r_{n-1}}{\rho_{n-1}}\right)},$$

wo

$$R_k = \frac{\rho_k r_{n-1} - r_k \rho_{n-1}}{\rho_{n-1}}$$

gesetzt wurde.

Oder, wenn man für y_k seinen Werth einsetzt:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k f_k = \frac{d}{dt} \frac{1}{\frac{d}{dt}\frac{r_{n-1}}{\rho_{n-1}}} \frac{d}{dt} R_k \frac{x_k \xi_n - \xi_k x_n}{\xi_n}$$

$$- \frac{d}{dt} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} R_k \varphi_k}{\frac{d}{dt}\left(\frac{r_{n-1}}{\rho_{n-1}}\right)}.$$

Bezeichnet man mit $\varphi_1^1 \ldots \varphi_{n-2}^1$ die Formen, welche mittelst $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_{n-1}$ auf dieselbe Weise aus $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$ hergeleitet werden, wie in (V) $f_1^1 \ldots f_{n-1}^1$ aus $f_1, f_2 \ldots f_n$, so bilden $R_1, R_2 \ldots R_{n-2}$ ein System Multiplicatoren von $\varphi_1^1, \varphi_2^1 \ldots \varphi_{n-2}^1$ und es ist

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n-2} R_k y_k = \sum_{k=1}^{n-2} R_k \varphi_k^1.$$

Sind nun $\xi_1', \xi_2' \ldots \xi_n'$ die Glieder eines Integralsystems von $f_1 = 0 \ldots f_n = 0$, welche die Gleichung

$$r_1\xi_1' + r_2\xi_2' + \ldots + r_n\xi_n' = 0$$

befriedigen, so bilden

$$\eta_1 = \xi_1' - \frac{\xi_n'}{\xi_n}\xi_1 \quad \ldots \eta_{n-1} = \xi_{n-1}' - \frac{\xi_n'}{\xi_n}\xi_{n-1}$$

ein Integralsystem von

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_{n-1} = 0$$

Für dieses ist

$$r_1\eta_2 + r_2\eta_2 + \ldots + \rho_{n-1}\eta_{n-1} = 0$$

und

$$\begin{aligned}\rho_1\eta_1 + \rho_2\eta_2 + \ldots + \rho_{n-1}\eta_{n-1} \\ = \rho_1\xi_1' + \rho_2\xi_2' + \ldots + \rho_{n-1}\xi_{n-1}' \\ - \frac{\xi_n'}{\xi_n}(\rho_1\xi_1 + \rho_2\xi_2 + \ldots + \rho_{n-1}\xi_{n-1}) \\ = \rho_1\xi_1' + \rho_2\xi_2' + \ldots + \rho_n\xi_n'.\end{aligned}$$

Genügt daher das Integralsystem $\xi_1', \xi_2' \ldots \xi_{n-1}'$ der Relation

$$\rho_1\xi_1' + \rho_2\xi_2' + \ldots + \rho_n\xi_n' = 0,$$

so wird auch

$$\rho_1\eta_1 + \rho_2\eta_2 + \ldots + \rho_{n-1}\eta_{n-1} = 0$$

und

$$R_1\eta_1 + R_2\eta_2 + \ldots + R_{n-1}\eta_{n-2} = 0.$$

Da nun $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_{n-1}$ ein Multiplicatorensystem von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-1}$ bilden, so ist wegen der ersten der beiden voranstehenden Gleichungen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{n-2}$ nach (V) ein Integralsystem von

$$\varphi_1^1 = 0, \; \varphi_2^1 = 0 \ldots \varphi_{n-2}^1$$

und wegen der letzteren nach S. 1241:

$$\sum_{k=1}^{n-2} R_k \varphi_k^1 = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-3} R_k \frac{y_k \eta_{n-2} - y_{n-2} \eta_k}{\eta_{n-2}}.$$

Nun ist aber

$$\begin{vmatrix} y_k, y_{n-2} \\ \eta_k, \eta_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x_k \xi_n - \xi_k x_n}{\xi_n}, & \dfrac{x_{n-2} \xi_n - \xi_{n-2} x_n}{\xi_n} \\ \dfrac{\xi_k' \xi_n - \xi_k \xi_n'}{\xi_n}, & \dfrac{\xi_{n-2}' \xi_n - \xi_{n-2} \xi_n'}{\xi_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_k - \dfrac{\xi_k}{\xi_n} x_n, & x_{n-2} - \dfrac{\xi_{n-2}}{\xi_n} x_n, & x_n \\ \xi_k' - \dfrac{\xi_k}{\xi_n} \xi_n', & \xi_{n-2}' - \dfrac{\xi_{n-2}}{\xi_n} \xi_n', & \xi_n' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_k, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi_k', & \xi_{n-2}', & \xi_n' \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} \frac{1}{\xi_n}$$

und daher

$$\frac{y_k \eta_{n-2} - y_{n-2} \eta_k}{\eta_{n-2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_k, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi_k', & \xi_{n-2}', & \xi_n' \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi_{n-2}', & \xi_n' \\ \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die frühere Formel S. 1242, so geht derselbe über in

$$\sum_{k=1}^{n} r_k f_k = \frac{d}{dt} \frac{1}{\frac{d}{dt}\frac{r_{n-1}}{\rho_{n-1}}} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-3} R_k \frac{\begin{vmatrix} x_k, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}}$$

$$-\frac{d}{dt} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} R_k \varphi_k}{\frac{d}{dt}\left(\frac{r_{n-1}}{\rho_{n-1}}\right)}.$$

3. Ist ein drittes Integralsystem $\xi''_1, \xi''_2 \ldots \xi''_n$ von (I) gegeben, das mit dem r und ρ in der Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} r_k \xi''_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n} \rho_k \xi''_k = 0$$

steht, so ergibt sich zunächst aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} r_1\xi_1 + r_2\xi_2 + \ldots + r_n\xi_n &= 0 \\ r_1\xi'_1 + r_2\xi'_2 + \ldots + r_n\xi'_n &= 0 \\ r_1\xi''_1 + r_2\xi''_2 + \ldots + r_n\xi''_n &= 0 \end{aligned}$$

Die Relation

$$\sum_{k=1}^{n-3} r_k \begin{vmatrix} \xi''_k, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} + r_{n-1} \begin{vmatrix} \xi''_{n-1}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_{n-1}, & \xi'_{n-2}, & \xi_n \\ \xi_{n-1}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} = 0;$$

aus den drei anderen Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_1\xi_1 + \rho_2\xi_2 + \ldots + \rho_n\xi_n &= 0 \\ \rho_1\xi'_1 + \rho_2\xi'_2 + \ldots + \rho_n\xi'_n &= 0 \\ \rho_1\xi''_1 + \rho_2\xi''_2 + \ldots + \rho_n\xi''_n &= 0 \end{aligned}$$

folgt:

$$\sum_{k=1}^{n-3} \rho_k \begin{vmatrix} \xi''_k, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_k, & \xi_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} + \rho_{n-1} \begin{vmatrix} \xi''_{n-1}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_{n-1}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-1}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} = 0$$

und aus den beiden gewonnenen Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{n-3} R_k \begin{vmatrix} \xi''_k, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} = 0.$$

Vermöge dieser Gleichung geht daher der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n-3} R_k \begin{vmatrix} x_k, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}$$

über in einen Bruch, dessen Nenner

$$\begin{vmatrix} \xi''_{n-3}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-3}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}$$

und dessen Zähler

$$\sum_{k=1}^{n-4} R_k \left\{ \begin{vmatrix} x_k, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi''_{n-3}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-3} & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} \xi''_k, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{n-3}, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-3}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} \right\}$$

ist.

Die in der Klammer enthaltenen Determinanten sind aber Subdeterminanten der Elemente in

$$\begin{vmatrix} x_k, & x_{n-3}, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi''_k, & \xi''_{n-3}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-3}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}$$

und zwar der Reihe nach von ξ_{n-3}, x_k, x_{n-3}, ξ''_k, wesshalb die Differenz in der Klammer gleich

$$\begin{vmatrix} x_k, & x_{n-3}, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi''_k, & \xi''_{n-3}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-3}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}$$

ist. Somit ist

$$\sum_{k=1}^{n-3} R_k \frac{\begin{vmatrix} x_k, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-4} R_k \begin{vmatrix} x_k, & x_{n-3}, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi''_k, & \xi''_{n-3}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-3}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \xi''_{n-3}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-3}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}$$

und der Ausdruck in (2) geht über in:

$$\sum_{k=1}^{n} r_k f_k =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{\frac{d}{dt} \frac{r_{n-1}}{\rho_{n-1}}} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-4} R_k \begin{vmatrix} x_k, & x_{n-3}, & x_{n-2}, & x_n \\ \xi''_k, & \xi''_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_k, & \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_k, & \xi_{n-3}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi''_{n-3}, & \xi''_{n-2}, & \xi''_n \\ \xi'_{n-3}, & \xi'_{n-2}, & \xi'_n \\ \xi_{n-3}, & \xi_{n-2}, & \xi_n \end{vmatrix}$$

$$- \frac{d}{dt} \frac{\sum_{k=1}^{n-2} R_k \varphi_k}{\frac{d}{dt} \frac{r_{n-1}}{\rho_{n-1}}}$$