Über die Differentialquotienten von Functionen mehrerer Variabeln

Prof. **Emanuel Czuber** in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. October 1892.)

Die Differentiation von Functionen mehrerer Variabeln ist zuerst von Euler in den Institutiones calculi differentialis systematisch behandelt und der von ihm befolgte Vorgang, das totale Differential einer solchen Function als Charakteristik ihres infinitesimalen Verhaltens aufzufassen, seither allgemein beibehalten worden. Indessen ist der Begriff des Differentialquotienten schlechtweg von einer Function einer Variabeln auf Functionen mehrerer Variabeln übertragbar. Die partiellen Differentialquotienten erscheinen dann nur als specielle Fälle eines allgemeinen Begriffes, und neben anderen hat diese Art der Behandlung den Vortheil, dass sie die Ausdehnung mancher Resultate, welche für Functionen einer Veränderlichen gelten, auf Functionen mehrerer Veränderlichen in einfacher und natürlicher Weise gestattet.

Der hier kurz angedeutete Gedanke ist in den folgenden Blättern näher ausgeführt.

1. Es sei $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine auf dem Gebiete K gegebene, einwerthige und continuirliche Function der n reellen unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Zur Darstellung des Gebietes K werde der n-dimensionale Raum R_n herangezogen. Ein beliebiger Punkt O desselben diene als Nullpunkt und irgend eine der $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ von ihm ausgehenden Gruppen von n paarweise zu einander senkrechten Richtungen, z. B. die Gruppe $O(X_1, X_2, \ldots X_n)$, bilde das Coordinatensystem;

der Theil des Raumes R_n, welcher die Mannigfaltigkeit K darstellt, werde durch das $(n-1)$-dimensionale Gebilde S_{n-1} begrenzt.

Den beiden Werthverbindungen $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ und $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Variabeln entsprechen zwei Punkte P^0 und P in R_n, und durch sie ist eine Gerade in diesem Raume bestimmt, d. i. eine einfach unendliche Menge von Punkten $\Pi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, welche den Gleichungen

$$\frac{\xi_1 - x_1}{x_1 - x_1^0} = \frac{\xi_2 - x_2}{x_2 - x_2^0} = \ldots = \frac{\xi_n - x_n}{x_n - x_n^0} \tag{1}$$

genügen. Die Entfernung der Punkte P^0, P ist durch

$$s = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2} \tag{2}$$

gegeben, die Quadratwurzel mit dem positiven Zeichen genommen, wenn man festsetzt, dass die Richtung S von P^0 nach P hin als die positive zu gelten habe; diese Richtung ist bestimmt durch die Richtungscosinusse

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1 - x_1^0}{s}, \ \cos\alpha_2 = \frac{x_2 - x_2^0}{s}, \ldots \cos\alpha_n = \frac{x_n - x_n^0}{s} \tag{3}$$

welche wegen (2) der Gleichung

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n = 1 \tag{4}$$

genügen.

In der Richtung S, von P aus gezählt, liege der Punkt P', dem die Werthverbindung $x_1 + \Delta x_1$, $x_2 + \Delta x_2$, $\ldots$ $x_n + \Delta x_n$ der Variabeln entspricht; beide Punkte haben, nach (2), die Entfernung

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2} \tag{5}$$

und beide sollen in das Gebiet K fallen; die ihnen zugehörenden Werthe der gegebenen Function führen zu der Differenz

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{6}$$

Der Grenzwerth — falls ein solcher existirt —, gegen welchen der Quotient aus dieser Differenz durch die Entfernung Δs convergirt, wenn $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ sämmtlich (und mit ihnen Δs) gegen Null abnehmen derart, dass P' in der S

entgegengesetzten Richtung sich P nähert, in allen seinen Lagen also den Gleichungen (1) genügt, soll als »der in der Richtung S genommene Differentialquotient« von f im Punkte P definirt und mit $\frac{df}{ds}$ bezeichnet werden.

Im Sinne dieser Definition hat eine Function von n Variabeln an jeder Stelle des Gebietes, für welches sie gegeben ist, ∞^{n-1} Differentialquotienten, welche aber insgesammt als lineare Formen von n besonderen unter ihnen, und zwar der nach den Richtungen OX_1, $OX_2, \ldots OX_n$ genommenen, darstellbar sind. Man kann nämlich die Differenz (6) durch Einschaltung von $n-1$ Paaren einander aufhebender Glieder in eine Summe von n Differenzen verwandeln, deren jede aus zwei Functionswerthen gebildet ist, die nur in den Werthen Einer und jedesmal einer andern Variabeln sich unterscheiden. Diese Entwicklung ist auf $n!$ verschiedene Arten ausführbar entsprechend den $n!$ Permutationen der Variabeln. Aus einer derartigen Anordnung wird beispielsweise die Differenz

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots x_n+\Delta x_n) - f(x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots x_n+\Delta x_n)$$

entspringen; sie ergibt bei der Bildung des Quotienten $\frac{\Delta f}{\Delta s}$ das Glied

$$\frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots x_n+\Delta x_n) - f(x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots x_n+\Delta x_n)}{\Delta x_1} \, \frac{\Delta x_1}{\Delta s}.$$

Im ersten Factor dieses Gliedes denke man sich den Grenzübergang in zwei Theilen vollzogen; zuerst mögen $\Delta x_2, \Delta x_3 \ldots \Delta x_n$ sämmtlich gegen Null convergiren; vermöge der vorausgesetzten Continuität von f nimmt dabei dieser Factor den Grenzwerth

$$\frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\Delta x_1}$$

an; wird nun der Grenzübergang mit $\lim \Delta x_1 = 0$ vollendet, so convergirt dieser Zwischenwerth gegen dasjenige, was im Sinne der obigen Terminologie »der in der Richtung OX_1 genommene Differentialquotient« zu nennen wäre, in allgemein üblicher

Weise aber als »der nach x_1 genommene partielle Differentialquotient« von f bezeichnet wird und gewöhnlich das Symbol $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ erhält. Was den zweiten Factor des herausgehobenen Gliedes anlangt, so hat derselbe nach dem, was über die Modalitäten des Grenzprocesses vorausgeschickt worden ist, den Grenzwerth $\cos\alpha_1$.

In dem ersten der beiden Factoren kann aber der Grenzübergang auch in anderer Weise vollzogen werden, z. B. derart, dass man zuerst Δx_1 gegen Null abnehmen lässt; der Grenzwerth, wenn ein solcher vorhanden ist, wäre dann mit

$$\frac{\partial f(x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots x_n+\Delta x_n)}{\partial x_1}$$

zu bezeichnen, und er convergirt bei unendlicher Abnahme von $\Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ nur dann gegen denselben Endwerth $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, welcher vorhin erhalten wurde, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ an der Stelle P eine stetige Function der Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ ist.

Diese beiden Durchführungen des Grenzüberganges schliessen alle andern möglichen Arten zwischen sich ein; wenn man hinzunimmt, dass eine in einem gewissen mehrdimensionalen Gebiet stetige Function auch stetig ist in jedem minder dimensionirten Gebiet, das in dem ersten enthalten ist, so kommt man zu dem Resultate: Wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine stetige Function der Variabeln $x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ ist, so wird, unabhängig von der Art des Grenzüberganges,

$$\frac{df}{ds}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cos\alpha_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n, \tag{7}$$

und die rechte Seite ist thatsächlich eine lineare Form der n besonderen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Mit Rücksicht auf das Folgende schreiben wir für (7) in symbolischer Abkürzung

$$\frac{df}{ds}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\cos\alpha_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\cos\alpha_n\right)f. \tag{7*}$$

2. Um den Verlauf von $\frac{df}{ds}$ um den Punkt P kennen zu lernen, trage man von diesem aus in der Richtung S oder in der entgegengesetzten die Grösse $\frac{df}{ds}$ auf, je nachdem sie positiv oder negativ ist, und bestimme den Ort des Endpunktes. Nennt man seine relativen Coordinaten in Bezug auf P $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, so bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{df}{ds}\cos\alpha_1 \\ \xi_2 &= \frac{df}{ds}\cos\alpha_2 \\ &\ \vdots \\ \xi_n &= \frac{df}{ds}\cos\alpha_n; \end{aligned} \tag{8}$$

zwischen diesen, nachdem man $\frac{df}{ds}$ aus (7) ersetzt, und der Gleichung (4) hat man $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots \cos\alpha_n$ zu eliminiren. Dies kann in der Weise bewerkstelligt werden, dass man zuerst die für $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots \cos\alpha_n$ aus (8) resultirenden Werthe in (7*) einträgt, wodurch die Gleichung

$$\left(\frac{df}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right) f$$

entsteht; dass man ferner die Summe der Quadrate der Gleichungen (8) bildet, welche wegen (4) lautet:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \left(\frac{df}{ds}\right)^2$$

aus beiden Resultaten zusammen folgt als Gleichung des gesuchten Ortes

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right) f. \tag{9}$$

Der Verlauf des ersten Differentialquotienten ist hiernach dargestellt durch ein Gebilde zweiten Grades, das durch den Punkt P gehend im zweidimensionalen Raume ein Kreis, im dreidimensionalen eine Kugel, im n-dimensionalen Raume ein dem Kreise und der Kugel adäquates $(n-1)$-dimensionales Gebilde ist.

Das $(n-1)$-dimensionale Gebilde ersten Grades, dessen Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)f=0 \qquad (10)$$

lautet und von welchem das quadratische Gebilde (9) im Punkte P berührt wird, ist der Ort jener ∞^{n-2} von diesem Punkte auslaufenden Richtungen, nach welchen der Differentialquotient $\frac{df}{ds}$ verschwindet. Ein dem Punkte P benachbarter Punkt P' $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, \ldots x_n+dx_n)$ in K gehört diesem Gebilde an, wenn die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)f=0 \qquad (11)$$

besteht, eine Differentialgleichung, welche äquivalent ist der endlichen Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{const.}, \qquad (12)$$

die ein ∞^1-faches System $(n-1)$-dimensionaler Gebilde in K repräsentirt, deren jedes Punkte gleichen Werthes von f umfasst (Niveaulinien eines ebenen Potentials, einer krummen Fläche; Niveauflächen eines räumlichen Potentials).

Man kann weiter der Gleichung (9) die Gestalt

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2-$$
$$-\left\{\left(\xi_1-\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\xi_2-\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\xi_n-\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right\}$$

geben und erkennt nun unmittelbar, dass $\frac{df}{ds}$ am grössten wird für

$$\xi_1=\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \xi_2=\frac{\partial f}{\partial x_2}\ \ldots\ \xi_n=\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

dass also in der zu dem linearen Gebilde (10) normalen Richtung

$$\frac{\xi_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{\xi_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \cdot \quad \cdot = \frac{\xi_n}{\frac{\partial f}{\partial x_n}} \tag{13}$$

der Differentialquotient $\frac{df}{ds}$ sein Maximum (dem absoluten Werthe nach)

$$\max\left|\frac{df}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2} \tag{14}$$

erreicht. Der dem Punkte P benachbarte P' fällt in diese Richtung, wenn

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}} = \cdot \quad = \frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}. \tag{15}$$

Dieses System von $n-1$ simultanen Differentialgleichungen charakterisirt ein ∞^{n-1}-faches System von eindimensionalen Gebilden im n-dimensionalen Raume, welche die Richtung der raschesten Änderung der Function bezeichnen (Kraftlinien eines Potentials, Linien stärksten Falles einer krummen Fläche).

Diese Ergebnisse lassen sich folgendermassen formuliren: Wenn man die Mannigfaltigkeit K, für welche eine Function von n Variabeln gegeben ist, durch ein n-dimensionales Gebilde dargestellt denkt, so gibt es in diesem ∞^1 Gebilde von $n-1$ Dimensionen, für deren Punkte die Function constant bleibt, und ∞^{n-1} zu diesen normale eindimensionale Gebilde, längs welcher die Function am raschesten sich ändert.

3. Auf den Differentialquotienten $\frac{df}{ds}$, als Function der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, den Vorgang der Bildung des Differentialquotienten neuerdings und in derselben Richtung S angewendet, erhält man »den zweiten in der Richtung S genommenen Differentialquotienten« $\frac{d^2f}{ds^2}$ Zunächst ergibt sich für ihn aus (7) der Ausdruck

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \frac{d\,\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{ds}\cos\alpha_1 + \frac{d\,\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{ds}\cos\alpha_2 + \quad + \frac{d\,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}{ds}\cos\alpha_n;$$

führt man die rechts angedeuteten Differentiationen nach eben derselben Formel aus und bedient sich dabei für die neu auftretenden partiellen Differentialquotienten der üblichen Bezeichnungen, so kommt

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{ds^2} = & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\cos\alpha_2 + . \quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}\cos\alpha_n\right)\cos\alpha_1 \\ & + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}\cos\alpha_2 + . \quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}\cos\alpha_n\right)\cos\alpha_2 \\ & + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}\cos\alpha_2 + \quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}\cos\alpha_n\right)\cos\alpha_n \end{aligned} \tag{16}$$

oder in symbolischer Abkürzung wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\, \partial x_i}$

$$\frac{d^2f}{ds^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \quad + \frac{\partial}{\partial x_n}\cos\alpha_n\right)^2 f. \tag{16*}$$

Es ist also der zweite in einer beliebigen Richtung genommene Differentialquotient von f darstellbar als lineare Form der $\frac{n(n+1)}{2}$ partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung.

Um seinen Verlauf kennen zu lernen, verfahre man ähnlich wie bei dem ersten und eliminire $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_n$ zwischen den Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{d^2f}{ds^2}\cos\alpha_1 \\ \xi_2 &= \frac{d^2f}{ds^2}\cos\alpha_2 \\ \xi_n &= \frac{d^2f}{ds^2}\cos\alpha_n \end{aligned} \tag{17}$$

und der Gleichung (4), nachdem man vorher $\frac{d^2f}{ds^2}$ durch seine obige Darstellung ersetzt hat. Diese Elimination wird am bequemsten wie im Falle des ersten Differentialquotienten ausgeführt; es ergeben sich die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \quad + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^2 f$$

und

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \quad + \xi_n^2 = \left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)^2;$$

aus beiden zusammen folgt die Gleichung des Ortes der Punkte $\xi_1, \xi_2, . \; . \xi_n$, nämlich

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \quad + \xi_n^2)^3 = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + . \; . + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^2 f\right]^2. \tag{18}$$

Der Verlauf des zweiten Differentialquotienten wird hiernach durch ein $(n-1)$-dimensionales algebraisches Gebilde sechsten Grades zur Darstellung gebracht.

In allen Richtungen, deren Ort der $(n-1)$-dimensionale Kegel zweiten Grades

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \quad + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^2 f = 0 \tag{19}$$

mit der Spitze P ist, verschwindet $\frac{d^2f}{ds^2}$.

Setzt man zur Abkürzung

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + . \quad + \xi_n^2 = u$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \quad + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^2 f = v,$$

so führt die Frage nach den Richtungen, in welchen der zweite Differentialquotient ein Maximum oder Minimum erreicht, darauf zurück, die Maxima oder Minima von u^3 aufzusuchen für solche Werthe der Variabeln $\xi_1, \xi_2, . \; . \xi_n$, welche die Bedingung

$$u^3 = v^2$$

erfüllen, und dies wieder kommt auf die Aufsuchung der absoluten Maxima und Minima von

$$u^3+\lambda(u^3-v^2)$$

zurück. Die Bedingungen für diese sind

$$3u^2\xi_1+\lambda\left[3u^2\xi_1-2v\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}f\right]=0$$

$$3u^2\xi_2+\lambda\left[3u^2\xi_2-2v\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}f\right]=0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$3u^2\xi_n+\lambda\left[3u^2\xi_n-2v\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}f\right]=0;$$

durch Elimination von λ ergibt sich hieraus das System von $n-1$ homogenen Gleichungen zweiten Grades

$$\frac{\xi_1}{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}f}$$
$$=\frac{\xi_2}{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}f} \tag{20}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$=\frac{\xi_n}{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}f},$$

durch welche 2^{n-1} Werthe des Verhältnisses $\xi_1 : \xi_2 : \ldots : \xi_n$, also ebenso viele von P auslaufende Richtungen bestimmt sind.

Für eine Function von n Variabeln gibt es hiernach in jedem Punkte des Gebietes, für welches sie gegeben ist, 2^{n-1} Richtungen maximaler und minimaler Werthe des zweiten Differentialquotienten.

4. Der Fall $n=2$ möge besonders ins Auge gefasst werden. Die beiden Variabeln sollen jetzt x, y heissen; die Darstellung von $f(x, y)$ im dreidimensionalen Raume ist eine Fläche, $z=f(x, y)$ ihre Gleichung; für die partiellen Differential-

quotienten erster und zweiter Ordnung sollen die üblichen Zeichen p, q, r, s, t benützt werden, so dass

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

Die Curve, welche den Verlauf von $\frac{d^2 z}{ds^2}$ im Punkte x, y darstellt, hat [siehe (18)] die Gleichung

$$(\xi^2+\eta^2)^3=(r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2)^2, \tag{21}$$

ist also eine tricirculare Curve, welche den Ursprung, d. i. den Punkt P zum vierfachen Punkt mit den zwei doppelt zählenden Tangenten

$$r\xi^2+2s\xi\eta+t\eta^2=0 \tag{22}$$

hat. Diese Tangenten sind reell und von einander verschieden, wenn $rt-s^2<0$ ist — die Curve besteht in diesem Falle aus zwei Paaren gleicher, in P einander berührender Schleifen; sie sind reell und zusammenfallend, wenn $rt-s^2=0$ ist — die Curve besteht aus zwei gleichen, in P einander berührenden Ovalen; sie sind endlich imaginär, wenn $rt-s^2>0$ ist — die Curve ist einfach geschlossen, P ein conjugirter Punkt. Diese Tangenten bezeichnen zugleich [siehe (19)] diejenigen Richtungen, nach welchen $\frac{d^2z}{ds^2}$ verschwindet. Für die Richtungen, in welchen dieser Differentialquotient ein Maximum oder Minimum erlangt, hat man [siehe (20)] die Gleichung

$$\frac{\xi}{r\xi+s\eta}=\frac{\eta}{s\xi+t\eta}$$

oder, in anderer Anordnung,

$$s\eta^2+(r-t)\xi\eta-s\xi^2=0. \tag{23}$$

Dieselbe bestimmt zwei stets reelle, zu einander senkrechte Richtungen, deren eine dem Maximum, deren andere dem Minimum von $\frac{d^2 z}{ds^2}$ entsprechen wird.

Die Richtungen (23) halbiren die Winkel der Richtungen (22); denn sind

$$\frac{\eta}{\xi} = m, \quad \frac{\eta}{\xi} = n$$

zwei gegebene Richtungen, so werden die durch sie gebildeten Winkel von den Richtungen

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{mn - 1 \pm \sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}{m+n} \tag{24}$$

halbirt; nun folgt aus (22)

$$m = \frac{-s+\sqrt{s^2-rt}}{t}, \quad n = \frac{-s-\sqrt{s^2-rt}}{t}$$

und daraus auf Grund von (24)

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{t-r\pm\sqrt{(t-r)^2+4s^2}}{2s}$$

und dies fällt mit der Lösung von (23) überein.

Man kann hiernach den Satz aussprechen: In dem Büschel der Verticalschnitte, welche durch einen beliebigen Punkt P der Fläche $z = f(x, y)$ gelegt werden, gibt es zwei bedingt reelle, längs welcher $\frac{d^2 z}{ds^2}$ in P Null ist, und zwei unbedingt reelle, die Winkel der vorigen halbirende und daher zu einander normale, für deren einen $\frac{d^2 z}{ds^2}$ ein Maximum, für deren andern es ein Minimum ist.

Da jede Ebene zur xy-Ebene und daher jede Richtung zur Verticalrichtung gemacht werden kann, so hat man es hier mit einem Satze von grosser Allgemeinheit zu thun. Wird insbesondere die Normale zur Verticalrichtung genommen, so ist wegen $p = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $q = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ vermöge (7) $\frac{dz}{ds}$ für jeden Verticalschnitt Null, das Krümmungsmass also, welches

$$\frac{\frac{d^2 z}{ds^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

als allgemeinen Ausdruck hat, durch $\frac{d^2z}{ds^2}$ bestimmt, und man kommt so zu dem bekannten Satze der Flächentheorie: In dem Büschel der Normalschnitte, welche durch einen beliebigen Punkt P der Fläche $z = f(x, y)$ gelegt werden, gibt es zwei bedingt reelle, welche in dem betreffenden Punkte das Krümmungsmass Null, und zwei unbedingt reelle, die Winkel der ersteren halbirende und daher zu einander normale von maximaler und minimaler Krümmung.

5. Man kann auf $\frac{d^2f}{ds^2}$, das wieder Function von $x_1, x_2 \ldots x_n$ ist, die Bildung des Differentialquotienten aufs Neue und in derselben Richtung anwenden; so fortfahrend kommt man zu dem allgemeinen Begriffe des »k^{ten} in der Richtung S genommenen Differentialquotienten«. Wie aus (7*) hervorgeht, kommt die Bildung des Differentialquotienten von f nach der durch die Cosinusse $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots \cos\alpha_n$ bestimmten Richtung darauf zurück, dass man vor f den symbolischen Factor

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cos\alpha_n$$

setzt; daraus folgt unmittelbar — die direct abgeleitete Formel (16*) bestätigt es für den nächstfolgenden Fall —, dass die Bildung des k^{ten} Differentialquotienten mit der Setzung der k^{ten} Potenz jenes symbolischen Factors vor f übereinfällt. Demnach ist

$$\frac{d^kf}{ds^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cos\alpha_n\right)^k f, \quad (25)$$

$\frac{d^kf}{ds^k}$ also darstellbar als lineare Form aller partiellen Differentialquotienten der k^{ten} Ordnung.

Wenn man, um den Verlauf von $\frac{d^kf}{ds^k}$ um P kennen zu lernen, den nämlichen Weg einschlagen will wie bei dem ersten und zweiten Differentialquotienten, so kommt es auf die Elimination von $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots \cos\alpha_n$ zwischen den Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{d^k f}{d s^k} \cos \alpha_1 \\
\xi_2 &= \frac{d^k f}{d s^k} \cos \alpha_2 \\
&\ \ \vdots \\
\xi_n &= \frac{d^k f}{d s^k} \cos \alpha_n
\end{aligned}
\tag{26}
$$

und (4) unter Zuziehung von (25) an. Dies geschieht wie in den beiden bisher behandelten Fällen und es ergibt sich aus den Gleichungen

$$\left(\frac{d^k f}{ds^k}\right)^{k+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^k f$$

und

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = \left(\frac{d^k f}{ds^k}\right)^2$$

die Gleichung des den Verlauf darstellenden Ortes:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)^{k+1} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^k f\right]^2 \tag{27}$$

derselbe ist ein $(n-1)$-dimensionales algebraisches Gebilde des $2(k+1)^{\text{ten}}$ Grades.

In den Richtungen, deren Ort der $(n-1)$-dimensionale Kegel k^{ten} Grades

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^k f = 0 \tag{28}$$

ist, verschwindet $\frac{d^k f}{ds^k}$.

Um die Richtungen zu finden, nach welchen $\frac{d^k f}{ds^k}$ ein Maximum oder Minimum werden kann, setzen wir zur Abkürzung

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = u$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^k f = v$$

und haben dann die absoluten Maxima und Minima von

$$u^{k+1}+\lambda(u^{k+1}-v^2)$$

zu suchen; dazu führen die Gleichungen

$$(k+1)u^k\xi_1+\lambda\left[(k+1)u^k\xi_1-kv\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}f\right]=0$$

$$(k+1)u^k\xi_2+\lambda\left[(k+1)u^k\xi_2-kv\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}f\right]=0$$

$$(k+1)u^k\xi_n+\lambda\left[(k+1)u^k\xi_n-kv\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}f\right]=0,$$

aus welchen sich weiter durch Elimination von λ das System von $n-1$ homogenen Gleichungen k^{ten} Grades

$$\frac{\xi_1}{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right\}f}$$

$$=\frac{\xi_2}{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right\}f} \tag{29}$$

$$=\frac{\xi_n}{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}f}$$

ergibt; dadurch sind k^{n-1} von P ausgehende Richtungen bestimmt, nach welchen $\frac{d^kf}{ds^k}$ ein Maximum oder ein Minimum wird. Bei einer Function von zwei Variabeln gibt es hiernach in jedem Punkte im Allgemeinen (zweimal) ein, zwei, drei, Richtungen, nach welchen beziehungsweise der erste, zweite, dritte, ... Differentialquotient Maximum oder Minimum wird und vermöge (28) auch ebensoviele Richtungen, nach welchen er verschwindet.

6. Wenn man in der Gleichung (27), welche das Gesetz des Verlaufes des k^{ten} Differentialquotienten zum Ausdruck bringt, $k=1$ setzt, so kommt man zu der Gleichung

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\quad+\xi_n^2)^2 = \left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\quad+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)f\right|^2 \qquad (30)$$

welche umfassender ist als die auf directem Wege für diesen Specialfall gefundene Gleichung (9). Der Grund dieser Discrepanz liegt in dem Eliminationsprocess, welcher von $k = 2$ angefangen Potenzirungen erfordert, durch die der umfassendere Inhalt der Eliminationsresultate herbeigeführt wird. Während die Gleichung (30) für $n = 2$ zwei in P einander berührende gleiche Kreise und für $n = 3$ zwei einander berührende gleiche Kugeln darstellt, entsprechen der Gleichung (9) in den gedachten Fällen nur ein Kreis und eine Kugel; diese letzte Darstellung hat vor der ersten desshalb den Vorzug, weil durch sie auf einer aus P gezogenen Richtung durch den Kreis oder die Kugel eine Strecke bestimmt wird, welche den dieser Richtung zukommenden Werth von $\frac{df}{ds}$ nicht allein dem absoluten Werthe, sondern auch dem Vorzeichen nach erkennen lässt; die andere Darstellung und jeder $k = 1$ überschreitende Fall erfordert die gesonderte Feststellung des Vorzeichens.

Für jedes ungerade k zerfällt der Ort (27) in zwei gleiche Örter niederen Grades, welche in Bezug auf den Punkt P symmetrisch angeordnet sind. Ist nämlich $k = 2\lambda-1$, so lautet (27)

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\quad+\xi_n^2)^{2\lambda} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\quad+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^{2\lambda-1}f\right]^2$$

und zerfällt in die beiden Gleichungen

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\quad.\xi_n^2)^{\lambda} = \pm\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\xi_2+\quad+\frac{\partial}{\partial x_n}\xi_n\right)^{2\lambda-1}f,$$

jede vom Grade 2λ; Gleichung (30) bildet den einfachsten Fall dieser Art.

In dem Falle zweier Variabeln ($n = 2$) lässt sich den Resultaten eine einfache Formulirung geben. Der Verlauf des ersten, dritten, fünften, . . Differentialquotienten einer Function zweier Variabeln in einem Punkte P ihres Gebietes wird durch zwei in Bezug auf diesen Punkt symmetrische mono-, bi-, tricirculare Curven; der Verlauf des zweiten, vierten, sechsten, Differentialquotienten durch eine tri-, penta-, hepta-circulare Curve dargestellt. Dabei hat man, im üblichen Sprachgebrauche, unter einer μ-circularen Curve eine solche algebraische Curve zu verstehen, welche durch jeden der beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte ihrer Ebene μ-fach hindurchgeht. Insofern zwei μ-circulare Curven zusammengenommen eine 2μ-circulare bilden, kann man auch sagen, der k^{te} Differentialquotient einer Function zweier Variabeln verlaufe nach dem Gesetze einer $\overline{k+1}$-circularen Curve.

7 Von dem Bildungsgesetze des k^{ten} Differentialquotienten führt zu dem Bildungsgesetz des k^{ten} totalen Differentials nur ein Schritt. Es ist nämlich

$$d^k f = \frac{d^k f}{ds^k} ds^k,$$

und da

$$ds \cos \alpha_1 = dx_1$$
$$ds \cos \alpha_2 = dx_2$$
$$\cdots$$
$$ds \cos \alpha_n = dx_n,$$

so hat man auf Grund von (25)

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^k f \tag{31}$$

Das totale Differential k^{ter} Ordnung ist also eine homogene Function k^{ten} Grades der Differentiale der Variabeln, deren Coëfficienten die partiellen Differentialquotienten k^{ter} Ordnung sind.

Das Gesetz, welches der k^{te} Differentialquotient befolgt, ist zugleich das Gesetz, nach welchem das k^{te} totale Differential sich ändert bei constant bleibendem ds.

8. Der entwickelte Begriff des Differentialquotienten nach einer bestimmten Richtung kann förderlich sein, wenn es sich um die Ausdehnung von Theoremen, welche für Functionen einer Variabeln bewiesen sind, auf Functionen beliebig vieler Variabeln handelt, und es mag dies an zwei Beispielen erläutert werden.

Eine Function von n Variabeln, $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, erlangt in einem Punkte $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein Maximum oder Minimum, wenn sie bei Überschreitung dieses Punktes in was immer für einer Richtung dortselbst zu einem Maximum oder Minimum wird; nothwendige Bedingung hiefür ist, dass

$$\frac{df}{ds} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cos\alpha_n\right) f$$

für jede Richtung verschwinde, was nur dann geschieht, wenn gleichzeitig

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

wird. Ein Maximum oder Minimum findet aber wirklich nur dann statt, wenn das erste nicht identisch verschwindende $\frac{d^k f}{ds^k}$ von gerader Ordnung und für jede Richtung negativ, beziehungsweise positiv und von Null verschieden ist; wenn also die ersten, in P nicht verschwindenden partiellen Differentialquotienten von gerader Ordnung sind und der mit ihnen gebildete homogene Ausdruck

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cos\alpha_n\right)^k f$$

für alle Richtungen, d. h. für alle Werthverbindungen von $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2, \ldots \cos\alpha_n$ negativ, respective positiv und von Null verschieden ist.

Um die Function $f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n)$ nach Potenzen der Incremente $h_1, h_2, \ldots h_n$ zu entwickeln, ist es am natürlichsten, ihren Verlauf auf der Geraden zu verfolgen, welche den Punkt $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mit dem Punkte $P'(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n)$ verbindet; sie verhält sich dabei wie eine Function einer Variabeln s, worunter der Abstand des Punktes P von einem festen Punkte P^0 der Geraden verstanden wird. Setzt man $PP' = \Delta s$, so ist P durch s, P' durch $s+\Delta s$ bestimmt und

$$f(s+\Delta s) = f(s) + \frac{\Delta s}{1}\frac{df}{ds} + \frac{\Delta s^2}{1\cdot 2}\frac{d^2 f}{ds^2} + \ldots + \frac{\Delta s^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{d^{m-1}f}{ds^{m-1}} + \frac{\Delta s^m}{1.2\ldots m}\frac{d^m f_\vartheta}{ds^m}$$

das dem f im letzten Gliede angehängte θ zeigt an, dass der betreffende Differentialquotient mit dem Argument $s+\theta\Delta s$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ zu bilden ist. Nun hat man, wenn der Richtung P^0P die Cosinusse $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2, \ldots \cos\alpha_n$ zukommen,

$$\frac{d^kf}{ds^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cos\alpha_n\right)^k f,$$

$$h_1 = \Delta s \cos\alpha_1$$

$$h_2 = \Delta s \cos\alpha_2$$

$$\ldots$$

$$h_n = \Delta s \cos\alpha_n;$$

mithin ist

$$\Delta s^k \frac{d^kf}{ds^k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^k f.$$

Hiermit verwandelt sich die obige Gleichung, wenn man an Stelle von s und $s+\Delta s$ die ursprünglichen Bestimmungsgrössen der Punkte P und P' einsetzt, in die folgende:

$$\begin{aligned} & f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n) \\ = {} & f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \frac{1}{1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right) f \\ & + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^2 f \\ & \ldots \\ & + \frac{1}{1.2.\ldots(m-1)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^{m-1} f \\ & + \frac{1}{1.2\ldots m}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^m f_\theta; \end{aligned}$$

das dem f im letzten Gliede angehängte θ zeigt an, dass die Differentialquotienten hier nicht wie in den übrigen Gliedern mit den Argumenten $x_1, x_2, \ldots x_n$, sondern mit $x_1+\theta h_1$, $x_2+\theta h_2$, $\ldots x_n+\theta h_n$ zu bilden sind. Damit ist die Taylor'sche Entwicklung für eine Function mehrerer Variabeln gewonnen, und die Bedingungen ihrer Giltigkeit sind aus jenen für eine Function nur einer Variabeln leicht abzuleiten.