Über Vervollständigung von Involutionen auf Trägern vom Geschlechte Eins und über Steiner'sche Polygone

Emil Weyr,

M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 20. October 1892.)

1. Mit J_k^n soll eine Involution n-ten Grades, k-ter Stufe auf einem Träger vom Geschlechte Eins bezeichnet werden; wenn jedoch $k = n-1$, so wollen wir der Kürze halber die Involution statt mit J_{n-1}^n nur mit J^n bezeichnen.

Eine J^n ist durch eine ihrer Gruppen vollkommen und unzweideutig bestimmt.

Wir haben in der dritten Mittheilung über Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins[1] einen Beweis dieses Satzes von n auf $(n+1)$ geliefert. Dass der Satz für $n = 2$ giltig ist, haben wir sowohl für ebene Curven dritter Ordnung,[2] Raumcurven vierter,[3] fünfter[4] Ordnung, sowie für den ganz allgemeinen Fall einer Curve beliebiger Ordnung vom Geschlechte Eins bewiesen.[5]

An der ersterwähnten Stelle[1] wurde ein Vorgang mitgetheilt, nach welchem man die durch eine Gruppe gegebene J^n vervollständigen, d. h. zu irgend $(n-1)$ Elementen das die Gruppe schliessende Element construiren kann. Es sind hiebei

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. XCVII, II. Abth., S. 606.

[2] Ibid. Bd. LXXXVII, II. Abth., S. 843.

[3] Ibid. Bd. LXXXVIII, S. 459.

[4] Ibid. Bd. XC, II. Abth., S. 220.

Ibid. S. 209.

J^{n-2} zur Verwendung gekommen. Man kann in ganz ähnlicher Art J^{n-r} verwenden, da es sich aber um die Vervollständigung handelt, so dürfte es wohl am angezeigtesten sein, J^2 zur Anwendung zu bringen. Dies kann in folgender Art geschehen.

Es sei also auf einem beliebigen Träger vom Geschlechte Eins eine willkürlich gewählte Gruppe von n Elementen a_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ gegeben, welche einer J^n anzugehören hat; ferner sei eine Gruppe von weiteren beliebig gewählten $(n-1)$ Elementen b_k $(k = 1, \ldots n-1)$ auf demselben Träger gegeben, und es soll jenes Element b_n construirt werden, welches die $(n-1)$ Elemente b_k zu einer Gruppe der durch die n a_i bestimmten J^n ergänzt.

Wir betrachten irgend ein Paar der Elemente a, z. B. a_1, a_2. Alle Paare, welche die Gruppe der übrigen $(n-2)$-Elemente a zu Gruppen der J^n ergänzen, bilden eine J^2 (siehe diese Sitzungsber., Bd. XCVII, II. Abth., S. 606), welche durch das Paar a_1, a_2 vollkommen bestimmt erscheint. In dieser J^2 construiren wir das zu einem der b-Elemente, z. B. zu b_1 gepaarte Element; es sei c_2. Dann stellt $b_1 c_2 a_3 a_4 \ldots a_n$ ebenfalls eine Gruppe der J^n dar. Aus dieser Gruppe scheiden wir das construirte Element c_2 und eines der a-Elemente, z. B. a_3 aus; die Paare, welche die übriggebliebenen $(n-2)$ - Elemente $b_1 a_4 a_5 \ldots a_n$ zu Gruppen der J^n ergänzen, bilden die durch das Paar c_2, a_3 bestimmte J^2. In dieser J^2 construiren wir das zu einem der übrigen b, z. B. zu b_2 gepaarte Element; es sei c_3. Dann stellt also $b_1 b_2 c_3 a_4 a_5 \ldots a_n$ wieder eine Gruppe der J^n dar. Ebenso construiren wir in der durch das Paar $c_3 a_4$ bestimmten J^2 das zu b_3 gepaarte Element c_4, so dass $b_1 b_2 b_3 c_4 a_5 \ldots a_n$ auch eine Gruppe von J^n ist; dann werden in derselben Weise die in den Involutionen J^2, welche durch die Paare $c_4 a_5, c_5 a_6 \ldots c_{n-1} a_n$, respective bestimmt sind, die den Elementen $b_4\, b_5 \ldots b_{n-2}$, respective gepaarten Elemente $c_5, c_6 \ldots c_{n-1}$ respective construirt, so dass schliesslich auch $b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-2}\, c_{n-1}\, a_n$ eine Gruppe der J^n darstellt. Die sämmtlichen Paare nun, welche die $(n-2)$-elementige Gruppe $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ zu Gruppen der J^n ergänzen, bilden die durch das Paar $c_{n-1}\, a_n$ bestimmte J^2 Wenn man also in dieser J^2 das zu b_{n-1} gepaarte Element b_n aufsucht, so ist auch $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}\, b_n$ eine Gruppe unserer J^n. Hiedurch ist somit unsere Aufgabe, und zwar in linearer Weise gelöst.

Es ist selbstverständlich, dass die Anordnung der a-Elemente, wie sie in die Construction eintreten, eine ganz beliebige ist; ebenso können die b-Elemente in beliebiger Ordnung in die Construction eingeführt werden. Es ist jedoch jedes a und jedes b nur einmal zu verwenden.

2. Verlegt man die J^n auf eine ebene Curve dritter Ordnung C_3, so ist die Vervollständigung der Gruppe $b_1 b_2 . . . b_{n-1}$

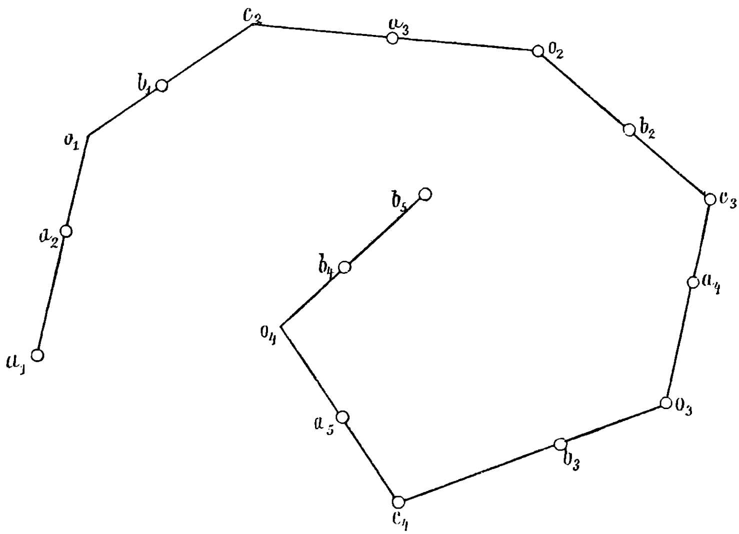

Fig. 1.

aus der gegebenen, die J^n bestimmende Gruppe $a_1 a_2 . . . a_n$ durch nebenstehende (schematische) Figur ausgedrückt.

Um b_n (in der Figur b_5) zu finden, verbinde man irgend zwei Punkte a (in der Figur $a_1 a_2$), suche den dritten Schnittpunkt (o_1) der Verbindungsgeraden mit C_3, verbinde diesen mit irgend einem b-Punkte (b_1), suche den dritten Schnittpunkt (c_2), verbinde diesen mit einem weiteren a-Punkte (a_3), suche den dritten Schnitt (o_2), verbinde diesen mit einem weiteren b-Punkte (b_2), suche den dritten Schnitt c_3, welcher mit einem weiteren a-Punkte (a_4) verbunden wird, was den Punkt o_3, dann die Geraden $\overline{o_3 b_3 c_4}$, $\overline{c_4 a_5 o_4}$ u. s. w., liefert. Endlich gelangt man zum Punkte o_{n-1} (in der Figur o_4), welcher mit b_{n-1} (in der Figur b_4) zu verbinden ist; der dritte Schnittpunkt der Verbindungsgeraden mit der Curve C_3 ist der gesuchte Punkt b_n (in der Figur b_5).

In der That haben wir die im vorigen Artikel auseinandergesetzte Construction von b_n auf C_3 als Träger der durch die Gruppe $a_1 \ldots a_n$ bestimmten J^n durchgeführt. Denn die Punktepaare der J^n, welche durch das Paar $a_1 a_2$ bestimmt ist, liegen auf Strahlen durch den Punkt o_1,[1] so dass der dem Punkte b_1 in dieser J^2 zugeordnete Punkt c_2 ist; die durch das Paar $c_2 a_3$ bestimmte J^2 hat ebenso o_2 zum Centrum, so dass in ihr dem b_2 der Punkt c_3 entspricht u. s. w. Die letzte zur Verwendung kommende J^2 ist jene durch das Paar $c_{n-1} a_n$ bestimmte, welche o_{n-1} zum Centrum hat, so dass die Gerade $\overline{o_{n-1} b_{n-1}}$ die C_3 in dem gesuchten Punkt b_n schneidet.

Wie schon gesagt wurde, kann die Anordnung der Punkte in der Gruppe $a_1 a_2 \ldots a_n$, sowie der Punkte in der Gruppe $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ beliebig geändert werden.

Es erscheint der Curve C_3 ein einfaches, nicht geschlossenes Polygon $a_1 o_1 c_2 o_2 c_3 o_3 c_4 o_4 \ldots c_{n-1} o_{n-1} b_n$ von $2\,(n-1)$-Seiten eingeschrieben, und es sind die Punkte $a_2 a_3 a_4 \ldots a_n$ die dritten Schnittpunkte seiner ungeradstelligen Seiten mit der Curve C_3, während die Punkte $b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots b_{n-1}$ die dritten Schnittpunkte seiner geradstelligen Seiten mit der Curve C_3 sind. Wenn wir a_1 als den Anfangspunkt und b_n als den Endpunkt des Polygones bezeichnen, so können wir den folgenden fruchtbaren Satz als bewiesen ansehen:

Wenn einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung ein (nicht geschlossenes) Polygon von $2\,(n-1)$-Seiten eingeschrieben wird, so bildet der Anfangspunkt mit den dritten Schnittpunkten der ungeradstelligen Seiten mit der Curve eine Gruppe, und der Endpunkt mit den dritten Schnittpunkten der geradstelligen Seiten mit der Curve eine zweite Gruppe von je n Punkten, und diese beiden Gruppen gehören einer und derselben J^n_{n-1} auf C_3 an.

[1] Siehe: »Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.« LXXXVII. Bd., S. 842.

Wird der Curve C_3 ein geschlossenes Polygon mit gerader Seitenanzahl eingeschrieben, so fällt b_n mit a_1 zusammen, so dass der Punkt a_1 $(\equiv b_n)$ sowohl von der $(n-1)$-elementigen Gruppe $a_2 a_3 \ldots a_n$, als auch von der $(n-1)$-elementigen Gruppe $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ zu Gruppen der J^n ergänzt wird. Es müssen somit[1] die beiden $(n-1)$-elementigen Gruppen $a_2 a_3 \ldots a_n$, $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ einer und derselben J^{n-1} angehören.

Wenn wir statt $(n-1)$ wieder n setzen, so können wir den Satz aussprechen:

Wenn einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung C_3 ein geschlossenes $2n$-Eck eingeschrieben wird, so bilden die dritten Schnittpunkte der ungeradstelligen Seiten eine n-punktige Gruppe auf C_3, und ebenso bilden die dritten Schnittpunkte der geradstelligen Seiten eine n-punktige Gruppe auf C_3, und diese beiden Gruppen gehören einer und derselben Involution n^{ten} Grades $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe J^n_{n-1} an.

3. Lässt man in dem eingeschriebenen geschlossenen $2n$-Eck die erste Ecke mit der zweiten, die dritte mit der vierten, allgemein die $(2k-1)^{\text{te}}$ mit der k^{ten} zusammenfallen, so stellen die ungeradstelligen Seiten des $2n$-Eckes die Tangenten der Curve in den Ecken eines derselben eingeschriebenen n-Eckes dar, während die geradstelligen Seiten des $2n$-Eckes durch die n-Seiten des n-Eckes dargestellt werden. Wir haben also den Satz:

Wenn man einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung C_3 ein geschlossenes einfaches n-Eck einschreibt, so bilden die dritten Schnittpunkte seiner Seiten eine n-punktige Gruppe auf C_3, und die Tangentialpunkte seiner Ecken bilden eine zweite n-punktige Gruppe auf C_3, und diese beiden Gruppen gehören einer und derselben J^n_{n-1} an.

Oder:

Legt man durch jeden von n-beliebigen Punkten a der Curve C_3 an sie je eine Tangente, so erhält man

[1] XCVII. Bd., S. 606; für $r = 1$.

n Berührungspunkte t; betrachtet man die letzteren als Ecken eines einfachen, der C_3 eingeschriebenen n-Eckes, so gehören die n dritten Schnittpunkte der Seiten dieses n-Eckes mit C_3 einer J_{n-1}^n an, welcher auch die n-punktige Gruppe a angehört.

Beliebige n-Punkte von $C_3 n > 3$ sind Ecken für 3 4.5. . n—1 einfache, der C_3 eingeschriebene n-Ecke. Die Gruppen der dritten Schnittpunkte der Seiten dieser n-Ecke mit der Curve sind 3.4.. . n—1-Gruppen einer J_{n-1}^n, welcher auch die Tangentialpunkte der n-Ecken als Gruppe angehören.

Anmerkung I. Aus der Definition des Geschlechtes von C_3 folgt bekanntlich der Satz, dass von den 3 k-Schnittpunkten der Curve C_3 mit einer Curve der k^{ten} Ordnung (3 k—1) beliebig auf C_3 gewählte, den k^{ten} Schnittpunkt eindeutig bestimmen, so dass die Schnittpunktgruppen der C_3 mit Curven k^{ter} Ordnung eine J_{3k-1}^{3k} auf der C_3 bilden.

Der zweite Satz des zweiten Artikels, aus welchem die Sätze dieses Artikels gefolgert wurden, ergibt sich sofort aus der eben gemachten Bemerkung. Die beiden Systeme der geradstelligen und der ungeradstelligen Seiten eines einfachen, der C_3 eingeschriebenen 2 n-Eckes stellen nämlich zwei Curven n^{ter} Ordnung dar. Das vollständige Schnittpunktsystem von C_3 mit jeder dieser Curven wird nun gebildet aus den 2 n-Ecken und den n dritten Schnittpunkten der geradstelligen, respective der ungeradstelligen Seiten. Diese beiden n-punktigen Gruppen der dritten Schnittpunkte ergänzen somit in einer und derselben J_{3n-1}^{3n} eine und dieselbe Gruppe der 2 n-Ecken zu 3 n-punktigen Gruppen und müssen somit (l. c.) einer und derselben J_{n-1}^n angehören.

Anmerkung II. Nimmt man auf C_3 eine beliebige ungerade Anzahl willkürlicher fester Punkte p_i ($i = 1$. . 2 k—1) an, und geht man nun von einem beliebigen Punkte a_1 der C_3, aus der mit p_1 verbunden o_1 als dritten Schnittpunkt von C_3 mit $p_1 a_1$ liefert, bestimmt man dann ebenso den dritten Schnitt c_2 von C_3 mit $o_1 p_1$, den dritten Schnitt o_2 von $c_2 p_3$ u. s. w., so dass c_3, o_3, c_4, o_4. die dritten Schnittpunkte von C_3 mit $o_2 p_4$, $c_3 p_5$, $o_3 p_6$, $c_4 p_7$. sind, so wird man nach einmaligem Durchlaufen der Punkte $p_1 \ldots p_{2k-1}$ zu dem Punkte o_{k-1} gelangen, mit welchem wir wieder so wie mit a_1 verfahren, indem wir ihn mit p_1 verbinden, den dritten Schnittpunkt der erhaltenen Geraden mit p_2 verbinden, den dritten Schnitt dieser Geraden wieder mit p_3 verbinden u. s. w. Wenn wir so alle Punkte p_i in derselben früheren Reihenfolge durchlaufen haben, so werden wir zu einem Endpunkte b_n gelangen, von welchem gezeigt werden soll, dass er mit dem Anfangspunkte a_1 identisch ist. Wir haben vor uns ein der C_3 eingeschriebenes $2[2k-1] = (4k-2)$-Eck, für welches die Punkte p_i die dritten Schnittpunkte sowohl der geradstelligen, als auch der ungeradstelligen Seiten darstellen, so dass nach dem ersten Satze des zweiten Artikels diese Punkte nicht nur mit dem Anfangspunkte a_1, sondern auch mit dem Endpunkte b_n eine Gruppe der durch die Gruppe $a_1 p_1 p_2 \ldots p_{2k-1}$ bestimmten J^{2k} bilden müssen.

Nun wird aber die $(2k-1)$-punktige Gruppe $p_1 p_2 \ldots p_{2k-1}$ nur von einem Punkte zu einer Gruppe einer J^{2k} ergänzt, so dass also b_n mit a_1 identisch sein muss. Hiemit ist der bekannte Satz[1] bewiesen:

Nimmt man eine ungerade Anzahl m von Fundamentalpunkten auf C_3 an, und beginnt mit einem beliebigen Anfangspunkte ein Polygon der C_3 einzuschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch jene Fundamentalpunkte gehen, indem nach Erschöpfung der Reihe der Fundamentalpunkte dieselbe noch einmal in derselben Reihenfolge verwendet wird, so schliesst sich das Polygon nach zweimaligem Durchgang durch die Fundamentalpunkte und bildet also immer ein geschlossenes, der Curve C_3 eingeschriebenes $2m$-Eck.

Anmerkung III. Es sei q_0 ein beliebiger Punkt von C_3; q_1 sein Tangentialpunkt, q_2 der Tangentialpunkt von q_1, q_3 jener von q_2 u. s. w., allgemein q_k der k^{te} Tangentialpunkt von q_0. Wir verfolgen die Reihe bis zu einem beliebigen geradstelligen Tangentialpunkt $q_{2(n-1)}$. Die in den Punkten $q_0 q_1 q_2 \ldots q_{2n-3}$ an

---

[1] Siehe: H. Schröter, Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung. Leipzig 1888, S. 269.

C_3 gelegten Tangenten bilden ein einfaches, der C_3 ein- und umgeschriebenes $2(n-1)$-Eck, wobei q_0 als Anfangspunkt und $q_{2(n-1)}$ als Endpunkt auftritt. Wendet man den ersten Satz des zweiten Artikels auf dieses $2(n-1)$-Eck an, so erkennt man, dass durch die Gruppe $q_1 q_3 q_5 \ldots q_{2n-3} q_{2(n-1)}$ eine J^{2n} bestimmt ist, welcher auch die den Doppelpunkt q_0 enthaltende Gruppe $q_0 q_0 q_2 q_4 q_6 \ldots q_{2n-4}$ angehört. Den Doppelpunkt $q_0 q_0$ kann man durch das auf irgend einem durch q_1 gezogenen Strahle liegende Punktepaar ersetzen.

Wenn sich die Reihe der Tangentialpunkte $q_0 q_1 q_2 \ldots$ schliesst, wenn also q_0 sein eigener $2(n-1)$te Tangentialpunkt ist, so können wir auf das ein- und umgeschriebene $2(n-1)$-Eck $q_0 q_1 q_2 \ldots q_{2n-3}$ den zweiten Satz des zweiten Artikels zur Anwendung bringen und erhalten das Resultat:

Ist ein einfaches $2m$-Eck der Curve C_3 zugleich ein- und umbeschrieben, so gehören die zwei m-punktigen Gruppen der geradstelligen und der ungeradstelligen Eckpunkte einer und derselben J^m an.

Anmerkung IV Ein der C_3 eingeschriebenes einfaches Polygon von ungerader Seitenanzahl kann man durch Hinzufügen der Tangenten in einer ungeraden Zahl der Eckpunkte (indem man dieselben als eingeschobene Polygonseiten betrachtet) in ein Polygon mit gerader Seitenanzahl verwandeln und dann die Sätze des Artikels 2 zur Anwendung bringen.

Sind z. B. 1, 2, 3, 4 beliebige vier Punkte von C_3 und betrachtet man das einfache dreiseitige (ungeschlossene) Polygon 1234, welches man durch Einschaltung der Tangente z. B. des Punktes 2 zu einem Viereck macht, so ergibt sich aus Artikel 2 sofort, dass der Punkt 1, der dritte Schnitt von $\overline{12}$ und der dritte Schnitt von $\overline{23}$ ein Tripel, und der Tangentialpunkt von 2 nebst 4 und dem dritten Schnitt von $\overline{34}$ ein zweites Tripel bilden, welche zwei Tripel einer und derselben J_2^3 angehören. Ebenso erhält man für geschlossene eingeschriebene Polygone von ungerader Seitenzahl durch Einschalten von Tangenten verschiedene Sätze nach Artikel 2; z. B.:

Ist der C_3 ein geschlossenes einfaches $(2n-1)$-Eck eingeschrieben, so gehört der Tangentialpunkt eines Eckpunktes und die dritten Schnitte der geradstelligen Seiten (wenn man die von ihm ausgehenden zwei Seiten als die erste und die letzte betrachtet) zu einer Gruppe, während die dritten Schnittpunkte der ungeradstelligen Seiten zu einer zweiten Gruppe einer J^n_{n-1} gehören, welche durch eine dieser Gruppen bestimmt erscheint.

4. Wenn p, q die Fundamentalpunkte für Steiner'sche, der C_3 eingeschriebene $2n$-Ecke, so ist der eine der beiden Punkte der dritte Schnitt für alle geradstelligen Seiten eines solchen $2n$-Ecks, während der andere Fundamentalpunkt der dritte Schnitt für alle ungeradstelligen Seiten ist. Es stellt also jeder der beiden Fundamentalpunkte eine aus n zusammenfallenden Punkten bestehende Gruppe einer J^n_{n-1} dar.

Wir haben also den Satz:

Die zwei Fundamentalpunkte für Steiner'sche $2n$-Ecke auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung sind n-fache Punkte einer und derselben Involution n^{ten} Grades $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe J^n_{n-1}.

Da die J^n durch ein n-faches Element vollkommen bestimmt ist, und da jede J^n n^2 n-fache Elemente besitzt,[1] so erkennen wir:

Wenn ein beliebiger Punkt einer C_3 als ein Fundamentalpunkt für Steiner'sche $2n$-Ecke gewählt wird, so gehören zu ihm (n^2-1) zweite Fundamentalpunkte; es sind dies die übrigen n-fachen Punkte jener J^n_{n-1}, welche durch den ersten Fundamentalpunkt, wenn man ihn als einen n-fachen Punkt betrachtet, bestimmt erscheint.

Da jede J^n_{n-1} durch Projection aus einem Punkte von C_3 auf C_3 wieder in eine zweite J^n_{n-1} übergeht, so zwar, dass die Projectionen der n-fachen Punkte der einen Involution n-fache Punkte der anderen werden, so erkennt man auch sofort, dass durch Projection zweier Fundamentalpunkte für Steiner'sche $2n$-Ecke aus irgend einem Curvenpunkte auf die Curve wieder zwei Fundamentalpunkte für Steiner'sche $2n$-Ecke zum Vor-

---

[1] Siehe: »Über die Anzahl der n-fachen Elemente eines J^n_{n-1}« u. s. Monatshefte für Mathem. und Physik, II. Jahrg., Wien 1891.

schein kommen, so dass man aus einem Paare unendlich viele andere Paare durch solche Projection ableiten kann.

5. Es seien A, B irgend zwei Gruppen einer J^n auf einem Träger vom Geschlechte Eins; die Gruppe (AB) enthält $2n$-Elemente und bestimmt somit eine J^{2n}. Man erkennt nun leicht, dass je zwei andere Gruppen A', B' von J^n als $2n$-elementige Gruppe $(A'B')$ aufgefasst, eine Gruppe der J^{2n} darstellen.

Wenn wir die Elemente A zu Gruppen der J^{2n} ergänzen, so bilden die ergänzenden Gruppen eine J^n und zwar offenbar die durch die Gruppe B bestimmte, also unsere ursprüngliche J^n, so dass auch (AB') eine Gruppe der J^{2n} ist.

Die n-elementigen Gruppen nun, welche die Gruppe B' ergänzen, bilden die durch A bestimmte, also wieder unsere ursprüngliche J^n, so dass auch $(A'B')$ eine Gruppe der J^{2n} ist.

Jede Gruppe der J^n stellt somit $(B \equiv A)$, wenn man ihre Elemente als Doppelelemente ansieht, eine Gruppe der J^{2n} dar, so dass jede Gruppe von J^n eine Gruppe von Doppelelementen von J^{2n} ist. Die J^{2n} ist offenbar durch eine solche n Doppelelemente enthaltende Doppelelementgruppe vollkommen bestimmt.

Wird der Curve C_3 ein geschlossenes $2n$-Eck eingeschrieben, so wird durch die Gruppe der n-Tangentialpunkte seiner Ecken eine J^{2n} bestimmt. Wir haben in Artikel 3 gesehen, dass die dritten Schnittpunkte der Seiten des Polygons eine zweite Gruppe derselben Involution darstellen. Nach Artikel 2 bilden jedoch die dritten Schnittpunkte der geradstelligen und der ungeradstelligen Seiten zwei Gruppen einer J^n und da diese zwei Gruppen eine Gruppe jener J^{2n} bilden, so ist die J^n, welche durch die Gruppe der dritten Schnitte der geradstelligen (oder der ungeradstelligen) Seiten eines der C_3 eingeschriebenen geschlossenen $2n$-Ecks bestimmt wird, die Involution der Doppelpunktsgruppen der J^{2n}, welche durch die Gruppe der Tangentialpunkte der Ecken des $2n$-Ecks bestimmt erscheint.

6. Den Sätzen der vorhergehenden Artikel kann man noch eine andere Fassung geben. So kann der zweite Satz des zweiten Artikels folgendermassen ausgesprochen werden.

Wenn a_i und b_k $(i, k = 1, 2, 3 \ldots n)$ zwei Punktgruppen einer J^n_{n-1} auf einer ebenen Curve dritter Ordnung sind, und man construirt von irgend einem Punkte der Curve umgehend ein derselben eingeschriebenes Polygon, dessen Seiten abwechselnd durch je einen Punkt der Gruppen a_i und b_k hindurchgehen (wobei jeder Punkt der Gruppen nur einmal zur Verwendung zu kommen hat), so erhält man immer ein geschlossenes $2n$-Eck, d. h. man kommt, wenn alle Punkte a_i und b_k erschöpft sind, wieder zu dem beliebig gewählten Anfangspunkte zurück.

Lässt man die Gruppe b_k mit der Gruppe a_i zusammenfallen, so erhält man den Satz:

Sind a_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ beliebige n-Punkte von C_3 und construirt man, von irgend einem Punkte der C_3 ausgehend, ein $2n$-Eck, von dessen Seiten durch jeden der Punkte eine geradstellige und eine ungeradstellige Seite hindurchgeht, so erhält man immer ein geschlossenes, der Curve eingeschriebenes $2n$-Eck.

Der Satz in Anmerkung II ist ein specieller Fall des soeben ausgesprochenen. Lässt man alle a zusammenfallen und ebenso alle b, so erhält man wieder den Satz über Steiner'sche Polygone.

7 Es sei a_i eine Gruppe von $2n$ beliebigen Punkten der C_3; durch dieselbe wird eine J^{2n} bestimmt.

Um eine J^n zu bestimmen, von der Art, dass irgend zwei Gruppen derselben eine Gruppe der J^{2n} darstellen (d. h. so, dass J^n die Involution der Doppelelementengruppen von J^{2n} wird), hat man aus jedem der Punkte a_i an C_3 eine Tangente zu legen; die $2n$-Berührungspunkte derselben können als Ecken für $3.\ 4.\ 5 \ldots 2n-1$ einfache $2n$-Ecke angesehen werden $(2n > 3)$ und dann stellen nach dem Satze des Artikels 5 die dritten Schnittpunkte sowohl der geradstelligen, als auch der ungeradstelligen Seiten eines solchen $2n$-Eckes je eine Gruppe der fraglichen J^n dar. Solcher Gruppen erhält man also $2.\ 3 \ldots 2n-1$; jede von ihnen bestimmt die J^n.

Handelt es sich nur um eine von diesen Gruppen, so kann man sie offenbar erhalten, wenn man die $2n$-Berührungspunkte paarweise durch n Gerade verbindet und deren dritte Schnittpunkte mit C_3 aufsucht; diese stellen dann eine Gruppe jener J^n vor, weil man die Geraden als die geradstelligen oder ungeradstelligen Seiten eines der $2n$-Ecke betrachten kann.

8. Es sei auf einem Träger vom Geschlechte Eins eine J^k gegeben; wir vereinigen irgend p Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_p$ dieser J^k zu einer kp-elementigen Gruppe, durch welche dann eine J^{kp} bestimmt erscheint. Dann kann leicht bewiesen werden, dass beliebige p-Gruppen der J^k eine Gruppe der J^{kp} bilden. Man kann nämlich jede der p-Gruppen A_i $(i = 1, 2, \ldots p)$ durch irgend eine Gruppe B_p von J^k ersetzen, denn alle Elemente, welche die $k(p-1) = kp-k$ Elemente $(A_1 A_2 \ldots A_{p-1})$ zu Gruppen der J^{kp} ergänzen, müssen nach dem oft schon verwendeten Hauptsatze eine J^k bilden, und zwar die gegebene, weil ja die k in A_p enthaltenen Elemente auch eine ergänzende Gruppe bilden. Es ist somit, wenn B irgend eine Gruppe der J^k bedeutet, auch $A_1 A_2 \ldots A_{p-1} B_p$ eine Gruppe der J^{kp}. Ebenso kann man A_{p-1} durch eine beliebige andere Gruppe B_{p-1} der J^k ersetzen u. s. w., so dass also, wenn $B_1 B_2 \ldots B_p$ beliebige p-Gruppen der J^k sind, die sämmtlichen kp-Elemente in $B_1 B_2 \ldots B_p$ eine Gruppe der J^{kp} bilden. Lässt man alle die B zusammenfallen, so wird jedes Element von B p-faches Element sein und somit B eine Gruppe p-facher Elemente von J^{kp}. Es ist also J^k die Involution der Gruppen p-facher Elemente von J^{kp} (oder kürzer die Involution p-facher Elemente).

Die J^{kp} ist selbstverständlich durch eine Gruppe der J^k vollkommen bestimmt, da man irgend p-Gruppen der J^k zusammenfassen kann zu einer (die J^{kp} schon bestimmenden) Gruppe der J^{kp}; von diesen p-Gruppen kann man beliebig viele zusammenfallen lassen.

9. Wir stellen uns nun die Frage: Wenn auf einem Träger vom Geschlechte Eins eine J^n gegeben ist, und wenn sich n in die zwei Factoren k, p zerlegen lässt, $n = k.p$, wie viele Involutionen p-facher Elemente gibt es in J^n?

Wenn wir eine Gruppe von k Elementen finden, welche p-fach genommen (jedes Element als p-faches Element betrachtet), eine Gruppe der J^n darstellt, so wird durch diese k-elementige Gruppe eine J^k bestimmt, welche nach früherem eine Involution p-facher Elemente von J^n darstellt. Wählen wir also $(k-1)$ beliebige Elemente, betrachten jedes als p-faches Element, so dass alle diese Elemente eine Gruppe von $p(k-1) = pk-p$ Elementen darstellen und vervollständigen diese Gruppe zu Gruppen der J^n; die vervollständigenden Gruppen enthalten also $n-(pk-p) \equiv p$ Elemente und bilden also eine J^p. Diese hat aber p^2 p-fache Elemente;[1] wenn wir ein solches p-faches Element zu den obigen $(k-1)$ p-fachen Elementen hinzufügen, so haben wir eine Gruppe der J^n vor uns, welche aus k p-fachen Elementen besteht und folglich eine Involution J^k von p-fachen Elementen der J^n bestimmt.

Da nun die p^2 p-fachen Elemente einer J^p alle von einander verschieden sein müssen,[2] so erhält man p^2 von einander verschiedene Gruppen von je k p-fachen Elementen der J^n; jede dieser Gruppen bestimmt eine J^k von p-fachen Elementen. Wir haben also den Satz:

In jeder J^{kp} gibt es p^2 Involutionen J^k, von denen jede aus Gruppen p-facher Elemente besteht, d. h. jede solche J^k hat die Eigenschaft, dass irgend p Gruppen derselben zusammen als Gruppe betrachtet, eine Gruppe der J^{kp} darstellen. Alle diese p^2 Involutionen J^k sind von einander verschieden.

Selbstverständlich gibt es ebenso k^2 Involutionen J^p, von denen jede eine Involution k-facher Elemente der J^{kp} ist.

Wir wollen eine Involution k^{ten} Grades J^k, welche die Eigenschaft hat, dass beliebige p Gruppen derselben eine

---

[1] Siehe: »Über die Anzahl der n-fachen Elemente einer J^n_{n-1}« u. Monatshefte für Mathematik und Physik, II. Jahrgang. Wien, 1891.

[2] Wenn von den p^2 p-fachen Elementen einer J^p zwei zusammenfallen würden, so müssten in jeder J^p zwei p-fache Elemente zusammenfallen. Denn denkt man sich die J^p als Punktinvolutionen auf einer C_3, so können je zwei J^p durch Projection (siehe Artikel 10) einem Curvenpunkte o in einander übergeführt werden. Man braucht nur o als den dritten Schnittpunkt von C_3 mit der Verbindungsgeraden eines p-fachen Punktes der einen J^p mit einem p-fachen Punkte der anderen J^p aufzufassen. Wenn also eine J^p zwei zusammenfallende p-fache Punkte hätte, so müsste dies in allen J^p der Fall sein, so dass jede J^p nur p^2-1 p-facher Punkte hätte, was nicht angeht.

Gruppe der J^{kp} darstellen, als eine aus der Involution kp^{ten} Grades J^{kp} abgeleitete Involution k^{ten} Grades bezeichnen.

Aus jeder Involution kp^{ten} Grades kann man also dem letzten Satze gemäss p^2 Involutionen k^{ten} Grades und k^2 Involutionen p^{ten} Grades ableiten.

Jede Gruppe der abgeleiteten Involution k^{ten} Grades besteht nach Früherem aus k p-fachen Elementen der J^{kp}, so dass also die k^2 k-fachen Elemente der abgeleiteten Involution zugleich kp-fache Elemente von J^{kp} sind:

Die k^2 k-fachen Elemente einer abgeleiteten Involution k^{ten} Grades sind zugleich kp-fache Elemente der J^{kp}

Die p^2 abgeleiteten J^k liefern so die k^2p^2 kp-fachen Elemente von J^{kp} und wir sehen:

Die k^2p^2 kp-fachen Elemente einer J^{kp} ordnen sich in p^2 k^2-elementige Gruppen und in k^2 p^2-elementige Gruppen; die ersteren sind die Gruppen der k-fachen Elemente der p^2 abgeleiteten Involutionen k^{ten} Grades, und die letzteren sind die Gruppen der p-fachen Elemente der k^2 abgeleiteten Involutionen p^{ten} Grades.

Lassen sich die Zahlen k, p wieder in Factoren zerlegen, so gruppiren sich nach demselben Satze die zusammenfallenden Gruppen der abgeleiteten Involutionen wieder zu Untergruppen in den neuerdings abgeleiteten Involutionen.

Ist n eine Primzahl, so gibt es in einer J^n keine abgeleiteten Involutionen.

9. Sind auf dem Träger vom Geschlechte Eins zwei Involutionen J^k, $J^{k'}$ der Grade k, respective k' gegeben, und verbindet man irgend eine Gruppe A der einen mit irgend einer Gruppe A' der anderen zu einer $(k+k')$-elementigen Gruppe $A+A'$, so wird durch diese eine Involution $J^{k+k'}$ vom Grade $k+k'$ bestimmt. Dann wird[1] eine jede Gruppe von J^k durch jede Gruppe von $J^{k'}$ zu einer Gruppe der $J^{k+k'}$ ergänzt. Wir sagen, dass sich die beiden Involutionen J^k $J^{k'}$ im Bereiche der $J^{k+k'}$ gegenseitig ergänzen. Ist die J^n, $n = k+k'$ gegeben,

---

[1] Siehe Bd. XCVII, S. 608.

so wird jede J^k im Bereiche der J^n durch eine J^{n-k} ergänzt. Ist $k' = k$, also $n = 2k$, so kann die Frage nach jenen J^k, die sich selbst ergänzen, gestellt werden; dies führt zu den $2^2 = 4$ aus der J^{2k} abgeleiteten J^k, als zu sich selbst ergänzenden J^k

Ist J^n gegeben, $n = k+k'$, und zerlegt man irgend eine Gruppe der J^n in zwei Gruppen von k, respective k' Elementen, so bestimmen letztere zwei sich im Bereiche von J^n ergänzende Involutionen J^k, $J^{k'}$

In derselben Art kann man irgend eine Reihe von Involutionen $J^k J^{k'} J^{k''}$ zu einer Involution $J^{k+k'+k''+\cdots}$ verknüpfen, so zwar dass, wenn man aus jeder der Involutionen eine beliebige Gruppe herausgreift, alle diese Gruppen zusammen eine Gruppe der $J^{k+k'+k''+\cdots}$ darstellen. Ist umgekehrt eine J^n gegeben und $n = k+k'+k''+\ldots$, so kann die J^n in sich ergänzende J^k, $J^{k'}$, $J^{k''}$ aufgelöst werden; man kann in der Reihe dieser Involutionen alle bis auf eine beliebig wählen, und diese letztere erscheint dann durch die angenommenen unzweideutig bestimmt.

10. Wenn auf einem Träger vom Geschlechte Eins eine J^2 und eine J^k gegeben ist und man construirt zu allen Elementen jeder Gruppe $a_1 a_2 \ldots a^k$ der J^k die ihnen in der J^2 gepaarten Elemente $b_1 b_2 \ldots b_k$, so bilden die Gruppen b_i wiederum eine Involution k^{ten} Grades.

Wir betrachten eine Gruppe $a_1 a_2 \ldots a_k$ von J^k und construiren die Elemente $b_1 b_2 \ldots b_k$, so dass $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \ldots a_k b_k$ k-Elementenpaare von J^2 werden; die Gruppe $b_1, b_2 \ldots b_k$ bestimmt eine Involution k^{ten} Grades J'^k. Die $2k$-Elemente $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_k$ als $2k$-elementige Gruppe bestimmen eine Involution $2k^{\text{ten}}$ Grades J^{2k}, für welche die J^2 offenbar eine der k^2 abgeleiteten Involutionen zweiten Grades ist (weil k Elementenpaare von J^2 eine Gruppe der J^{2k} bilden). Es wird also durch irgend k Paare der J^2 eine Gruppe der J^{2k} dargestellt. Anderseits wird nach dem Vorhergehenden jede Gruppe einer der beiden Involutionen J^k, J'^k durch die Gruppen der anderen zu Gruppen der J^{2k} ergänzt. Wenn wir also eine beliebige Gruppe $a'_1 a'_2 \ldots a'_k$ von J^k betrachten und zu ihren Elementen die in der J^2 entsprechenden $b'_1 b'_2 \ldots b'_k$ aufsuchen, so muss das Element, welches die Gruppe der $(2k-1)$ Elemente

$a'_1 a'_2 \ldots a'_k, b'_1 b'_2 \ldots b'_{k-1}$ zu einer Gruppe der J^{2k} ergänzt, einerseits jenes sein, welches die Gruppe $b'_1 b'_2 \ldots b'_{k-1}$ zu einer Gruppe der J'^k ergänzt, und anderseits muss es jenes sein welches zu dem Elemente a'_k in der J^2 gehört, also muss es b'_k sein, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Es werden also durch die Involution J^2 die Involutionen J^k gepaart und ist (da J^k aus J'^k genau so hervorgeht wie J'^k aus J^k) jedes Paar J^k, J'^k durch eine der dasselbe bildenden Involutionen k^{ten} Grades gegeben.

Man kann somit die Gesammtheit aller der Involutionspaare $J^k J'^k$ wieder als eine Involution zweiten Grades erster Stufe betrachten; diese Involution von Involutionen ist durch ein Paar der letzteren vollkommen gegeben.

Wenn die Involutionen $J^k J'^k$ durch die J^2 gepaart erscheinen, so leitet man aus jeder Gruppe a_i von J^k eine Gruppe b_i von J'^k ab, so dass die beiden Involutionen gruppenweise eindeutig aufeinander bezogen erscheinen. Fallen in der Gruppe a_i z. B. λ Elemente zusammen in a_1 etwa, so werden auch in der Gruppe b_i λ Elemente in b_1 zusammenfallen. Insbesondere werden also die k^2 k-fachen Elemente der J^k mit den k^2 k-fachen Elementen der J'^k k^2 Paare der J^2 bilden. Wenn also α eines der k-fachen Elemente der J^k und α' eines der k-fachen Elemente der J'^k ist, so hat man nur $\alpha\alpha'$ als ein Paar eines J^2 anzusehen, um eine J^2 vor sich zu haben, durch welche J^k und J'^k gepaart erscheinen. Da die k^2 k-fachen Elemente einer J^k alle von einander verschieden sein müssen, und da man ein α mit jedem der k^2 α' combiniren kann, so haben wir den Satz:

Es gibt k^2 von einander verschiedene Involutionen J^2, durch welche eine J^k mit einer J'^k gepaart erscheint.

Macht man J'^k identisch mit J^k, so hat man: Es gibt k^2 von einander verschiedene J^2, durch welche eine J^k sich selbst gepaart erscheint. Es sind dies offenbar jene J^2, welche man erhält, wenn man eines der k^2 k-fachen Elemente der J^k mit allen anderen k-fachen Elementen und mit sich selbst paart.

Wenn k gerade ist, etwa $k = 2\lambda$, so ist $k^2 = 4\lambda^2$ durch vier theilbar. Betrachtet man eines der k-fachen Elemente als Doppelelement einer J^2, wodurch diese auch bestimmt erscheint, so muss diese J^2 eine aus der J^k abgeleitete sein, d. h. irgend λ Paare der J^2 stellen eine Gruppe der J^k dar. Denn in der That kann man das Doppelelement der J^2 λ-fach gezählt als λ Paare der J^k darstellend betrachten, und da es zugleich k-faches Element der J^k ist, so ist J^2 eine der λ^2 abgeleiteten J^2-Involutionen (siehe Artikel 9). Es werden also die übrigen drei Doppelelemente dieser J^2 ebenfalls k-fache Elemente der J^k sein, so dass sich die k^2 k-fachen Elemente der J^k ($k = 2\lambda$) in λ^2 Quadrupel ordnen, von denen jedes aus den vier Doppelelementen einer der λ^2 aus J^k abgeleiteten J^2 besteht.

Greift man irgend eine dieser λ^2 J^2 heraus, so sind also ihre vier Doppelelemente vier k-fache Elemente von J^k und die übrigen $k^2—4$ k-fachen Elemente müssen sich in $\frac{k^2-4}{2}$ Paare der J^2 gruppiren, da ja jedes k-fache Element der J^k durch die J^2 wieder in ein k-faches Element übergeführt wird.

Wenn k ungerade ist, etwa $k = 2\lambda+1$, so ist auch $k^2 = 4\lambda^2+4\lambda+1 = 4(k^2+k)+1$ eine ungerade Zahl, und wenn man eines der k^2 k-fachen Elemente als Doppelelement einer J^2 betrachtet, so ist es eine der k^2 J^2, durch welche die J^k sich selbst gepaart erscheint, und zwar geht jenes Element in sich selbst über, während die anderen $k^2—1$ k-fachen Elemente der J^k durch die J^2 gepaart erscheinen.

Im Falle einer geraden $k = 2\lambda$ gibt es ausser den λ^2 abgeleiteten J^2 noch $3\lambda^2$ J^2, durch welche die J^k in sich selbst übergeführt wird; durch jede solche J^2 erscheinen die k^2 k-fachen Elemente in $\frac{k^2}{2}$ Paare geordnet.

11. Verlegt man die Involutionen der letzten Betrachtungen als Punktinvolutionen J^k auf eine ebene Curve dritter Ordnung C_3 vom Geschlechte Eins, so ergeben sich die folgenden von uns theilweise schon ausgesprochenen Sätze.

Projicirt man die Gruppen einer J^k aus einem festen Punkte von C_3 auf C_3, so erhält man die Gruppen einer zweiten J_1^k der feste Punkt paart in dieser Art die sämmtlichen einem k entsprechenden J^k auf C_3. Wenn man die Gruppe der k^2 k-fachen Elemente einer J^k aus einem festen Punkte der C_3 auf C_3 projicirt, so erhält man die Gruppe der k^2 k-fachen Elemente einer zweiten (der gepaarten) J'^k.

Verbindet man die k^2 k-fachen Punkte einer J^k mit den sämmtlichen k^2 k-fachen Punkten einer zweiten J'^k durch Gerade, so erhält man k^4 gerade Linien, welche die C_3 in k^2 Punkten schneiden, so zwar, dass von den k^4 Geraden je k^2 durch jeden dieser k^2 Punkte hindurchgehen. Da man diese k^2 Punkte offenbar erhält, wenn man die k^2 k-fachen Punkte einer der beiden Involutionen aus einem der k^2 k-fachen Punkte der anderen auf C_3 projicirt, so sind sie nach Obigem selbst wieder die k^2 k-fachen Punkte einer dritten J''^k.

Solche drei Gruppen von je k^2 Punkten sind nichts Anderes als drei connexe Gruppen [1] (welche jedoch in Gruppen von connexen wenigerelementigen Gruppen zerfallen, wie wir sehen werden).

Die k^2 Punkte einer der drei Gruppen sind die Centra für jene J^2, durch welche die beiden J^k, denen die anderen zwei Gruppen entspringen, in einander übergeführt werden. Die Verbindungsgerade irgend zweier k-fachen Punkte einer J^k schneidet C_3 im Centrum einer J^2, durch welche die J^k in sich selbst übergeführt wird; die übrigen k-fachen Punkte liegen paarweise auf Strahlen durch dieses Centrum oder sind Berührungspunkte von durch das Centrum gehenden Tangenten. Solcher Centren gibt es k^2, sie liegen auf den Verbindungsgeraden der k-fachen Punkte und sind auch Tangentialpunkte derselben. Ist k gerade, etwa gleich 2λ, so zerfallen die k^2 k-fachen Punkte in λ^2 Quadrupel, von denen jedes einen gemeinsamen Tangentialpunkt besitzt; diese λ^2 Tangentialpunkte (welche, wie wir später sehen werden, λ-fache Punkte einer J^λ sind) gehören unter jene $k^2 = 4\lambda^2$ Centren, so dass ausser ihnen noch weitere $3\lambda^2$ Centren auftreten.

Ist k ungerade, so ist auch k^2 ungerade, und die k^2 Centren, von denen oben die Rede ist, sind die Tangentialpunkte der

---

[1] Siehe Küpper, Über Steiner'sche Polygone Prager Abhandlungen, 1873.

k^2 k-fachen Punkte. Durch den Tangentialpunkt eines k-fachen Punktes gehen dann $\frac{k^2-1}{2}$ Strahlen, welche die übrigen (k^2-1) k-fachen Punkte paarweise enthalten.

Macht man $k = 2$, so ergeben sich sofort die Sätze: Schneidet ein sich um einen Punkt o_1 von C_3 drehender Strahl die Curve C_3 in dem Punktepaar x, x, welches von dem festen Curvenpunkte o auf C_3 projicirt das Punktepaar y, y liefert, so dreht sich die Gerade y, y um einen festen Punkt o_2 der Curve. Man sieht sofort, dass der Tangentialpunkt von o der dritte Schnittpunkt der Curve mit der Geraden $o_1 o_2$.

Sind also zwei J^2 mit den beliebigen Centren $o_1 o_2$ gegeben, so ist der Berührungspunkt o einer durch den dritten Schnittpunkt von $\overline{o_1 o_2}$ gehenden Curventangente Centrum für eine J^2, durch welche die beiden gegebenen J^2 in einander übergeführt werden. Dies gibt die vier J^2, von denen jede die beiden gegebenen J^2 in einander überführt.

Lassen wir o_2 mit o_1 zusammenfallen, so erhalten wir die vier Involutionen J^2, welche eine gegebene Involution J^2, deren Centrum o_1 ist, in sich selbst überführen. Es ist dies erstens die gegebene J^2 selbst (was auch unmittelbar klar ist) und die drei Involutionen, deren Centra jene drei Curvenpunkte sind, welche mit o_1 denselben Tangentialpunkt besitzen. Hieraus folgen dann die bekannten Sätze über das Viereck der Berührungspunkte der durch einen Curvenpunkt o_1 gehenden vier Tangenten, dass z. B. die drei Punkte, welche mit o_1 gemeinsamen Tangentialpunkt haben, die Diagonalecken jenes Viereckes sind u. s. w.

Bezüglich des Falles $k = 3$ verweisen wir auf die Abhandlung: »Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins«, Bd. LXXXVIII, S. 436—444. Für $k = 4$ (l. c. S. 444—448) hat man es mit einer J^4 zu thun. Dieselbe besteht aus den sämmtlichen Punktquadrupeln der C_3, welche einen gegebenen Gegenpunkt o haben. Sind t_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Berührungspunkte der durch o an C_3 gelegten Tangenten und t_{ik} $(k = 1, 2, 3, 4)$ die Berührungspunkte der vier durch t_i an C_3 gelegten Tangenten, so sind t_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ die sechzehn vierfachen Elemente der J^4. Jedes der vier Quadrupel

$t_{i_1} t_{i_2} t_{i_3} t_{i_4}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist auch ein Quadrupel der J^4, weil es ja o zum Gegenpunkte hat. Die Punkte t_i sind die Centra jener vier (aus J^4 abgeleiteten) J^2, durch welche die J^4 so in sich selbst übergeführt wird, dass vier vierfache Punkte in sich selbst übergehen. Es ist ja jeder Punkt t_i ein Diagonalpunkt für jedes der drei Vierecke $t_{\lambda k}$ $(\lambda \lesseqgtr i, k = 1, 2, 3, 4)$, so dass durch ihn zwei Gegenseiten eines jeden dieser drei Vierecke hindurchgehen; das gibt durch t_i drei Strahlenpaare, welche die zwölf $t_{\lambda k}$ paarweise enthalten. Wenn man also irgend zwei vierfache Punkte, welche demselben Quadrupel angehören, verbindet, so ist der dritte Schnittpunkt immer einer der Tangentialpunkte t_λ der anderen drei Quadrupeln. Verbindet man zwei t_{ik}, welche verschiedenen zwei Quadrupeln angehören, so erhält man einen dritten Schnittpunkt, aus welchem durch Projection diese beiden Quadrupel und ebenso die beiden anderen in einander übergehen. Der Tangentialpunkt dieses Projectionscentrums wird ein Punkt sein, welcher mit o gemeinsamen Tangentialpunkt hat. Wenn man also die drei Punkte aufsucht, die mit o gemeinsamen Tangentialpunkt besitzen und aus ihnen an C_3 die Tangenten legt, so sind deren zwölf Berührungspunkte die Centra für die zwölf übrigen J^2, durch welche die J^4 in sich selbst übergeführt wird.

Es haben somit die Centra der sechzehn J^2, welche eine J^4 in sich selbst überführen, einen gemeinsamen zweiten Tangentialpunkt (nämlich den ersten Tangentialpunkt von o), und folglich sind sie vierfache Punkte jener J^4, welche den Tangentialpunkt von o zum Gegenpunkte hat.

12. Es seien auf einem Träger vom Geschlechte Eins zwei beliebige k-elementige Gruppen $a_1 a_2 . \; . a_k$, $b_1 b_2 . \; . b_k$ und eine Involution J_3 dritten Grades zweiter Stufe gegeben. Wir bilden aus den Elementen a und b k Paare, so dass jedes Paar ein a und ein b enthält und jedes Element nur in einem Paare vorkommt, also etwa $a_1 b_1$, $a_2 b_2$,. $\;$.$a_k b_k$, und nun construiren wir die Elemente $c_1 c_2 \ldots c_k$, welche jene k Paare zu Tripeln der gegebenen J^3 ergänzen. Die Gruppe a bestimmt eine Involution k^{ten} Grades, welche wir $J^k_{(a)}$ nennen wollen; ebenso sind durch die Gruppen b und c zwei weitere Involutionen k^{ten} Grades $J^k_{(b)}$, $J^k_{(c)}$ bestimmt.

Wir behaupten nun, dass, wenn man die Gruppen a, b durch zwei beliebige Gruppen a', b' der Involutionen $J^k_{(a)}, J^k_{(b)}$ ersetzt, die Gruppe c in eine Gruppe c' der Involution $J^k_{(c)}$ übergeht.

Die drei Gruppen abc enthalten $3k$ Elemente und bestimmen als Gruppe eine J^{3k}; da jedoch die k Tripel $a_i b_i c_i$ derselben J^3 angehören, so ist diese J^3 eine der k^2 abgeleiteten J^3 der J^{3k}, und es werden somit beliebige $(k-1)$ Tripel dieser J^3 durch irgend ein k^{tes} Tripel derselben J^3 zu einer Gruppe der J^{3k} vervollständigt.

Anderseits wird die Gruppe von $2k$ Elementen, welche sich aus irgend einer Gruppe a' von $J^k_{(a)}$ und irgend einer Gruppe b' von $J^k_{(b)}$ zusammensetzt, durch die Gruppen von $J^k_{(c)}$ zu Gruppen der J^{3k} ergänzt. Wenn wir also die $(3k-1)$-elementige Gruppe $a'_1 a'_2 a'_3 \ldots a'_k, b'_1 b'_2 \ldots b'_k, c'_1 c'_2 \ldots c'_{k-1}$ zu einer Gruppe der J^{3k} vervollständigen, so muss das Element c'_k einerseits jenes sein, welches das Paar $a'_k b'_k$ zu einem Tripel der J^3, und anderseits muss es jenes sein, welches die $(k-1)$-elementige Gruppe $c'_1 c'_2 \ldots c'_{k-1}$ zu einer Gruppe der $J^k_{(c)}$ vervollständigt. Dadurch ist aber unsere Behauptung bewiesen.

Da man die Gruppen a, b durch die beliebigen Gruppen a', b' der Involutionen $J^k_{(a)} J^k_{(b)}$ ersetzen kann, so können wir auch von diesen Involutionen ausgehen und sehen aus dem Vorangehenden, dass durch eine Involution dritten Grades J^3 die sämmtlichen Involutionen eines und desselben Grades k in Tripel geordnet erscheinen, so zwar, dass durch irgend zwei Involutionen k^{ten} Grades die dritte Involution k^{ten} Grades vollkommen bestimmt erscheint. Wie man sieht, ist jede der drei Involutionen $J^k_{(a)}, J^k_{(b)}, J^k_{(c)}$ die aus den beiden anderen vermittelst der J^3 abgeleitete, so dass in jedem Tripel zwischen den drei Involutionen Vertauschungsfähigkeit herrscht. Wir können somit sagen, dass die Tripel der Involutionen $J^k_{(a)} J^k_{(b)} J^k_{(c)}$ wieder eine Involution (von Involutionen) dritten Grades zweiter Stufe bilden.

Ist a ein k-faches Element von $J^k_{(a)}$ und b ein k-faches Element von $J^k_{(b)}$, so wird das Element c, welches mit ab ein Tripel der J^3 bildet, ein k-faches Element von $J^k_{(c)}$ sein; dies folgt unmittelbar aus dem Voranstehenden.

Sind also $J^k_{(a)}$, $J^k_{(b)}$, $J^k_{(c)}$ irgend drei Involutionen k^{ten} Grades und a, b, c drei von ihren respectiven k-fachen Elementen, so wird die durch das Tripel abc bestimmte J^3 eine solche sein, dass durch sie jede der drei erstgenannten Involutionen aus den beiden anderen abgeleitet erscheint.

Wenn wir das Element a festhalten, so können wir aus den k^2 k-fachen Elementen b und den k^2 k-fachen Elementen c im Ganzen k^2 Paare bc bilden; die k Paare ab werden durch k c zu Tripeln der J^3 ergänzt, so dass die in diesen k Tripeln vorkommenden k Paare bc, weil mit demselben a Tripel der J^3 bildend, k Paare einer J^2 darstellen, welche offenbar eine der k^2 J^2 ist, durch welche $J^k_{(b)}$ und $J^k_{(c)}$ in einander übergeführt werden. Wenn man also irgend ein Paar dieser J^2 mit a zu einem Tripel vereinigt, so ist durch dieses Tripel eine J^3 bestimmt, durch welche aus zwei der drei J^k die dritte abgeleitet erscheint.

Man erhält also, vom Elemente a ausgehend, k^2 J^3 der eben besprochenen Art; ersetzt man a durch ein anderes k-faches Element a' von $J^k_{(a)}$, so erhält man dieselben k^2 J^3, denn man erkennt leicht, dass jede J^3, durch welche eine der drei J^k aus den beiden anderen abgeleitet erscheint, nothwendig unter den bereits gefundenen k^2 J^3 enthalten sein muss. Denn es wird ja durch eine solche J^3 auch das Element a als ein, ein Paar bc zu einem Tripel ergänzendes hervorgehen müssen.

Wir haben also den Satz:

Es gibt k^2 J^3, durch welche von drei gegebenen J^k jede aus den beiden anderen abgeleitet erscheint. Wählt man aus jeder der J^k ein k-faches Element, so bestimmt das Tripel derselben eine solche J^3; die übrigen k-fachen Elemente gruppiren sich ebenfalls zu Tripeln dieser J^k, so zwar, dass jedes k-fache Element in k^2 solchen Tripeln vorkommt.

Die Ergebnisse von Artikel 10, sowie das letzte Ergebniss kann man folgendermassen ausdrücken:

Sind zwei J^k gegeben, und verbindet man jedes k-fache Element der einen mit jedem k-fachen Element der anderen zu einem Paare, so erhält man $k^2.k^2$, das ist k^4 Elementenpaare, so dass jedes Element in k^2 Paaren vorkommt. Diese k^4 Paare ordnen sich in k^2 J^2, so zwar, dass jede dieser J^2 k^2 von jenen Paaren enthält. Diese J^2 sind jene, durch welche die zwei J^k in einander übergeführt werden.

Lässt man die beiden J^k identisch werden:

Verbindet man jedes der k-fachen Elemente einer J^k mit den übrigen und mit sich selbst zu Paaren, so erhält man k^4 Paare (darunter k^2 Doppelelemente), welche sich in k^2 J^2 ordnen u. s. w. Diese J^2 sind jene, durch welche die J^k in sich selbst übergeführt wird.

Sind drei J^k gegeben und bildet man aus den k-fachen Elementen derselben Tripel, so zwar, dass jede der drei J^k in jedem Tripel durch ein k-faches Element vertreten erscheint, so erhält man im Ganzen $k^2.k^2.k^2$, das ist k^6 Tripel, so zwar, dass jedes der k-fachen Elemente in $k^2.k^2 = k^4$ Tripeln vorkommt. Diese k^6 Tripel ordnen sich in k^2 J^3, so zwar, dass in jeder dieser J^3 k^4 Tripel vorkommen.

Lässt man zwei der drei J^k mit einander identisch werden, so dass eine doppelt zu zählen kommt, so werden die Tripel bestehen entweder aus irgend zwei k-fachen Elementen der doppelt zu zählenden und einem k-fachen Elemente der einfach zu zählenden J^k, oder aus einem doppelt zu zählenden k-fachen Elemente der doppelt zu zählenden und einem k-fachen Elemente der einfach zu zählenden J^k. Aber wieder erhält man k^2 durch diese Tripel bestimmte J^3 Werden alle drei J^k identisch, so erhält man den Satz:

Es gibt k^2 J^3 von der Art, dass eine gegebene J^k durch eine solche J^3 als aus sich selbst abgeleitet erscheint. Sind abc irgend drei k-fache Elemente der J^k, so ist eine J^3 der eben besprochenen Art durch das Tripel abc bestimmt. Eine solche J^3 ist aber auch bestimmt durch das Tripel aab oder endlich durch das Tripel (dreifaches Element) aaa (oder bbb, ccc. .).

Die Beziehung zwischen der J^k und einer solchen J^3 ist also die folgende: Sind $a_1 a_2 \; . \; a_k$, $b_1 b_2 \quad b_k$ irgend zwei

Gruppen der J^k und ergänzt man die Paare $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \ldots a_k b_k$ in der J^3 zu Tripeln, so erhält man die Elemente $c_1 c_2 \ldots c_k$, welche wieder eine Gruppe der J^k bilden.

13. Wir verlegen die Betrachtungen des letzten Artikels auf eine C_3. Dann ergibt sich zunächst, wenn wir aus irgend zwei Punktinvolutionen $J^k_{(a)} J^k_{(b)}$ die Involution $J^k_{(c)}$ mittelst der Fundamentalen J^3 der geraden Tripel ableiten, der Satz:

Wenn auf einer C_3 zwei Punktinvolutionen $k$ten Grades $k-1$ter Stufe $J^k_{(a)} J^k_{(b)}$ gegeben sind und man verbindet je einen Punkt irgend einer Gruppe a der einen mit je einem Punkte irgend einer Gruppe b der anderen, so erhält man k Geraden, welche die C_3 in k Punkten c zum drittenmale schneiden, welche k Punkte eine Gruppe einer gewissen dritten Punktinvolution $J^k(c)$ bilden. Jede der drei Involutionen erscheint durch die Fundamentale J^3 der geraden Tripel aus den beiden anderen abgeleitet.

Die k^2-elementigen Gruppen der k-fachen Elemente dieser J^k sind offenbar drei connexe Gruppen; wir könnten also die drei J^k auch als drei connexe J^k bezeichnen.

Macht man $J^k(a) \equiv J^k_{(b)}$, so erhält man den Satz:

Verbindet man die k Punkte einer beliebigen Gruppe einer J^k auf C_3 mit den k Punkten einer beliebigen zweiten Gruppe dieser J^k durch k Geraden, so bilden die dritten Schnittpunkte derselben mit C_3 eine Gruppe einer zweiten J'^k. Diese erscheint aus der gegebenen J^k durch die Fundamentale J^3 gerader Tripel abgeleitet.

Die Verbindungsgerade irgend zweier k-fachen Punkte der gegebenen J^k schneidet C_3 zum drittenmale in einem k-fachen Punkte der in obiger Art abgeleiteten J'^k.

Lässt man die beiden Gruppen der J^k identisch werden und verbindet man jeden Punkt der Gruppe mit sich selbst, so erhält man den Satz:

Die k Tangentialpunkte der Punkte der Gruppen einer J^k bilden wieder eine J'^k, nämlich die aus der J^k mittelst der Fundamentalen J^3 gerader Tripel abgeleitete J'^k.

Ist k gerade, so kann man jede Gruppe der J^k verschiedenartig in zwei Gruppen mit geraden Anzahlen von Elementen zerlegen; sucht man nun zu den Punkten der einen Partialgruppe die Tangentialpunkte und verbindet man die Punkte der anderen Partialgruppe paarweise durch Gerade, so bilden jene Tangentialpunkte und die dritten Schnittpunkte dieser Geraden, jeder der letzteren doppelt gezählt, eine Gruppe der abgeleiteten J'^k

Der zweite Satz in Artikel 2 ist ein besonderer Fall dieses Satzes, wenn man nämlich die Gesammtgruppe als die zweite Partialgruppe betrachtet.

Ist k ungerade, so kann jede Gruppe der J^k in verschiedener Art in zwei Partialgruppen zerlegt werden, von denen die eine eine ungerade Anzahl von Punkten enthält, während die Punktezahl der anderen gerade ist. Die Tangentialpunkte der ersten Partialgruppe und die doppelt gezählten Schnittpunkte der paarweisen Verbindungsgeraden der zweiten Gruppe stellen nach Obigem eine Gruppe der abgeleiteten J'^k dar.

Wenn man die 2λ Elemente einer Gruppe einer $J^{2\lambda}$ irgendwie in λ Paare theilt, jedes Paar durch eine Gerade verbindet und deren dritten Schnittpunkt mit C_3 aufsucht, so erhält man λ Punkte, welche als Doppelpunkte aufgefasst, eine Gruppe der $J'^{2\lambda}$ bilden; sie bestimmen als λ-punktige Gruppe eine J^λ, welche, wie wir wissen, die Involution der Doppelelementengruppen der $J^{2\lambda}$ ist. Wenn also a einer der 2λ-fachen Punkte der $J^{2\lambda}$ ist, so ist sein Tangentialpunkt a' ein λ-facher Punkt dieser J^λ. Hieraus folgt, nebenbei gesagt, mit Rücksicht auf Artikel 4, der bekannte Satz:

Wenn a b Fundamentalpunkte für Steiner'sche $4n$-Ecke sind, so sind deren Tangentialpunkte a' b' Fundamentalpunkte für Steiner'sche $2n$-Ecke.

14. Es seien nun auf einem Träger $(m-1)$ Involutionen k^{ten} Grades $J^k_{(a)}\, J^k_{(b)} \ldots J^k_{(x)}$ gegeben; ausserdem eine Involution m^{ten} Grades J^m.

Wir wählen aus jeder der $(m-1)$ Involutionen je eine beliebige Gruppe $a_1 a_2 \ldots a_k$, $b_1 b_2 \ldots b_k \ldots x_1 x_2 \ldots x_k$ und bilden nun aus ihnen k solche $(m-1)$-elementige Gruppen, dass in jeder Gruppe jede der Involutionen durch ein Element vertreten ist, und alle Elemente erschöpft werden, also etwa $a_1 b_1 c_1 . \; . x_1$, $a_2 b_2 \ldots x_2 . \; . a_k b_k . \; . x_k$. Jede dieser $(m-1)$-elementigen Gruppen ergänzen wir zu einer Gruppe der J^m; dies liefert die Elemente $y_1 y_2 . \; . y_k$ respective. Wir beweisen nun, dass die sämmtlichen Gruppen $y_1 y_2 \; . y_k$, die man so erhalten kann, wenn die Gruppen abc. in ihren Involutionen beliebig variiren, einer $m$ten Involution $J^k_{(y)}$ $k$ten Grades angehören, welche wir als die mittelst der J^m aus den $(m-1)$ Involutionen $J^k_{(a)} J^k_{(b)} \; . J^k_{(x)}$ abgeleitete bezeichnen. Es ist dann, wie man sofort sieht, jede der m Involutionen $J^k_{(a)} J^k_{(b)} \; . J^k_{(x)} J^k_{(y)}$ die aus den übrigen durch die J^m abgeleitete.

Die k Gruppen $ab \; . . xy$ als eine Gruppe von mk Elementen bestimmen eine J^{mk}; da die mk Elemente aus k Gruppen der J^m bestehen, so ist die J^m eine der k^2 abgeleiteten Gruppen der J^{mk} (siehe Artikel 8), und es werden also irgend $(k-1)$ Gruppen der J^m durch eine Gruppe der J^m zu einer Gruppe der J^{mk} ergänzt. Anderseits müssen die $(m-1)k$ Elemente von den $(m-1)$ Involutionen $J^k_{(a)} J^k_{(b)} . \; . J^k_{(x)}$ beliebig entnommenen Gruppen (a), (b). . (x) durch Gruppen jener $J^k_{(y)}$ ergänzt werden, welche durch die Gruppe $y_1 y_2 . \; . y_k$ bestimmt erscheint. Wenn wir also die Gruppen $ab \; . x$ durch andere $a' b' \; . x'$ ersetzen, und aus ihnen die Gruppe y' ableiten, so muss y'_k, weil es die $(mk-1)$-elementige Gruppe $a'_1 a'_2 \ldots a'_k \; b'_1 b'_2 . \; . b'_k \; . x'_1 x'_2 . \; . x'_k$ $y'_1 y'_2 . \; . y'_{k-1}$ zu einer Gruppe der J^{mk} ergänzt, zugleich das $k$te Element in der Gruppe (y') der $J^k_{(y)}$ sein. Hiemit ist unser Satz erwiesen.

Auch hier haben wir den Satz:

Es gibt k^2 Involutionen J^m, durch welche jede von m gegebene J^k als aus den anderen abgeleitet erscheint. Man gelangt zu ihnen genau so, wie zu den J^3 des vorletzten Artikels.

Die Gruppen der Involutionen J^k, welche mit einer gegebenen J^m in obiger Weise verknüpft sind, kann man als eine Involution $m$ten Grades von Involutionen $k$ten Grades bezeichnen.

Insbesondere hat man auch den Satz:

Es gibt k^2 Involutionen J^m, durch welche eine J^k als aus sich selbst abgeleitet erscheint.

Wenn man aus den k-fachen Punkten der J^k irgend eine m-elementige Gruppe constituirt, wobei jedes der k-fachen Elemente mehrmals in der Gruppe auftreten kann, so bestimmt eine solche Gruppe eine J^m, durch welche die J^k als aus sich selbst abgeleitet erscheint.

Weitere Ausführungen und Anwendungen auf Curven vom Geschlechte Eins, insbesondere auf ebene Curven dritter Ordnung sollen später mitgetheilt werden.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: 101_2a

Autor(en)/Author(s): Weyr Emil

Artikel/Article: Über Vervollständigung von Involutionen auf Trägern vom Gesehlechte Eins und über Steiner'sche Polygone. 1457-1483