

Über abgeleitete J^n_{n-1} auf Trägern vom Geschlechte Eins

Emil Weyr,

M. k. Akad.

1. Ist auf einem Träger vom Geschlechte Eins eine Involution J^n_{n-1} n^{ten} Grades $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe gegeben, so kann zu jedem Elemente a ein Element a' in folgender Art gefunden werden. Wir betrachten a als ein $(n-1)$-faches Element $n > 2$ und construiren nun jenes (einzige) Element a', welches mit a eine Gruppe von J^n_{n-1} bildet. Ist der Träger eine ebene C_3 und ist die J^3_2 die Involution gerader Tripel, so ist a' der Tangentialpunkt von a in gewöhnlichem Sinne des Wortes. Wir wollen auch in dem allgemeinen Falle das Element a' als das Tangentialelement von a in der J^n_{n-1} bezeichnen. Jedes Element a' ist Tangentialelement von $(n-1)^2$ Elementen a; denn die $(n-1)$-elementigen Gruppen, welche mit a' Gruppen der J^n bilden (es soll statt J^n_{n-1} kurz J^n gesetzt werden), stellen eine J^{n-1} dar, welche $(n-1)^2$ $(n-1)$-fache Elemente besitzt.

Wir können aus der J^n mittelst einer beliebigen J^k eine zweite J'^n ableiten. Wählen wir nämlich beliebige $(k-1)$ Gruppen $a_1 a_2 \ldots a_n$, $b_1 b_2 \ldots b_n \ldots m_1 m_2 \ldots m_n$ von J^n und construiren wir aus diesen $n(k-1)$ Elementen n Gruppen von je $k-1$ Elementen, so dass in jeder Gruppe ein a, ein b, ein c u. s. w. vorkommt, also etwa $a_1 b_1 c_1 \ldots m_1$, $a_2 b_2 c_2 \ldots m_2, \ldots$ $a_n b_n c_n \ldots m_n$ und vervollständigen wir jede dieser Gruppen zu einer Gruppe der J^k, so erhalten wir n Elemente $l_1 l_2 \ldots l_n$, respective, welche Gruppe eine J'^n bestimmt. Wenn nun die

Gruppen $a\,b\,c\,.\ .\,m$ in J^n beliebig variiren, so wird die Gruppe l immer dieser J'^n angehören.[1]

Man kann also zu der J'^n auch folgendermassen gelangen. Es seien $\alpha\,\beta\,\gamma\ .\,.\,\mu$ irgend $k-1$ n-fache Elemente von J^n und λ sei jenes Element, welches die Gruppe derselben zu einer Gruppe der J^k vervollständigt; dann ist λ ein n-faches Element von J'^n und J'^n ist durch λ vollkommen bestimmt. Die Elemente $\alpha\,\beta\,\gamma\,.\ .\,\mu$ müssen nicht alle von einander verschieden sein.

Wir lassen nun J^k mit J^n identisch werden und beweisen, dass auch J'^n mit J^n identisch wird.

Wir setzen also $J^k \equiv J^n$ voraus, also auch $k = n$. Die $(n-1)$ beliebigen Gruppen $a\,b\,c\,.\ .\,m$ lassen wir in eine $a_1 a_2 a_3\,.\ .\,a_n$ zusammenfallen; es wird dann l_1 das Element, welches die Gruppe $a_2 a_3\,.\ .\,a_n$ zu einer Gruppe der J^n ergänzt, das ist aber a_1, also $l_1 \equiv a_1$; ebenso $l_2 \equiv a_2 \ldots l_n \equiv a_n$, somit endlich $J'^n \equiv J^n$ w. z. B. w.

»Es ist also die aus einer J^n mittelst derselben J^n abgeleitete J^n wieder dieselbe J^n.«

2. Die folgenden bekannten Sätze (über ebene Curven dritter Ordnung und Raumcurven vierter Ordnung vom Geschlechte Eins) sind nur andere Formen des obigen Satzes.

I. Sind $a_1 a_2\,.\ .\,a_n$, $b_1 b_2 \ldots b_n$,. $.\,m_1 m_2\,.\ .\,m_n$ beliebige $(n-1)$ Gruppen einer J^n und man construirt aus ihnen solche n Gruppen zu $(n-1)$ Elementen, dass in jeder der letzteren Gruppen jede der ersteren Gruppen durch je ein Element vertreten erscheint (also etwa: $a_1 b_1 \ldots m_1$, $a_2 b_2\,.\ .\,m_2$,. $a_n b_n \ldots m_n$), so bilden die Elemente $l_1 l_2\,.\ .\,l_n$, welche diese $(n-1)$-elementigen Gruppen zu Gruppen der J^n vervollständigen, wieder eine Gruppe der J^n.

Eine ebene Curve C_3 dritter Ordnung (ohne Doppelpunkt) wird von einer C_m in $3m$ Punkten geschnitten; alle die $3m$-punktigen Gruppen bilden eine J^{3m} auf C_3. Wendet man den Satz I auf diese J^{3m} an, so hat man das bekannte Resultat:

»Schneidet man C_3 mit beliebigen $(3m-1)$ Curven m^{ter} Ordnung C_m, so erhält man $(3m-1)$ Gruppen von je $3m$ Punkten;

[1] Siehe: »Über Vervollständigung der Involutionen J^n auf Trägern vom Geschlechte Eins und über Steiner'sche Polygone.« Sitzungsbericht vom 20. October 1892.

bildet man nun aus diesen $3m(3m-1)$ Punkten $3m$ solche Gruppen zu je $(3m-1)$ Punkten, dass jede der ersteren Gruppen in jeder der letzteren durch einen Punkt vertreten erscheint (und jeder Punkt nur in einer Gruppe vorkommt), so schneiden $3m$ Curven C_m, von denen jede durch eine der $(3m-1)$-punktigen Gruppen gelegt worden ist, die C_3 in $3m$ neuen Punkten, welche wieder Schnittpunkte von C_3 mit Curven C_m sind.«

Für $m=1$: Sind $a_1 a_2 a_3$ Schnitte von C_3 mit einer Geraden, und $b_1 b_2 b_3$ Schnitte von C_3 mit einer zweiten Geraden, so liegen die dritten Schnittpunkte von C_3 mit den drei Geraden $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ wieder auf einer Geraden. Hier ist die auftretende J^3 die cubische Involution der geraden Punkttripel von C_3.

Für $m=2$: Sind $a_i b_i c_i d_i e_i$ $(i = 1\,2\,3\,4\,5\,6)$ die Schnittpunkte von C_3 mit fünf beliebigen Kegelschnitten, so liegen die sechsten Schnittpunkte der sechs Kegelschnitte $(a_i b_i c_i d_i e_i)$ mit C_3 wieder auf einem Kegelschnitte. Hier ist die auftretende J^6 die conische Sextupelinvolution u. s. w.

Betrachtet man auf C_3 irgend eine J^3, so hat man sofort den Satz:

»Wir legen durch drei beliebige Punkte $o_1 o_2 o_3$ von C_3 zwei beliebige Kegelschnitte, welche die Curve in den beiden Punktetripeln $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ schneiden mögen; die drei sechsten Schnittpunkte von C_3 mit den drei Kegelschnitten $(o_1 o_2 o_3 a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3$ liegen mit $o_1 o_2 o_3$ in einem und demselben Kegelschnitt.«

Für eine beliebige J^4 auf C_3 hat man:

»Wir legen durch zwei beliebige Punkte $o_1 o_2$ von C_3 drei beliebige Kegelschnitte, welche C_3 in den drei Punktquadrupeln a_i, b_i, c_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ schneiden mögen; dann liegen die vier sechsten Schnittpunkte von C_3 und der vier Kegelschnitte $(o_1 o_2 a_i b_i c_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ mit $o_1 o_2$ auf einem und demselben Kegelschnitte.«

Für J^5 hat man ebenso:

»Wir legen durch einen beliebigen Punkt o von C_3 vier beliebige Kegelschnitte, welche C_3 in den vier Quintupeln $a_i b_i c_i d_i$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ schneiden mögen; dann liegen die fünf sechsten Schnittpunkte von C_3 und der fünf Kegelschnitte $(o a_i b_i c_i d_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ mit o in einem und demselben Kegelschnitte.«

Für eine Raumcurve R_4 vierten Grades vom Geschlechte Eins hat man ebenso (weil die Gruppen ihrer Schnittpunkte mit Flächen m^{ter} Ordnung eine J^{4m} bilden):

»Schneidet man R_4 mit beliebigen $(4m-1)$ Flächen m^{ter} Ordnung F^m, so erhält man $(4m-1)$ Gruppen von je $4m$ Punkten; bildet man nun aus diesen $4m\,(4m-1)$ Punkten $4m$ solche Gruppen zu je $(4m-1)$ Punkten, dass jede der ersteren Gruppen in jeder der letzteren durch einen Punkt vertreten erscheint (und jeder Punkt nur in einer Gruppe vorkommt, so schneiden $4m$ Flächen F^m, von denen jede durch eine der $(4m-1)$-punktigen Gruppen hindurchgeht, die R_4 in $4m$ neuen Punkten, welche wieder Schnittpunkte von R_4 mit Flächen F^m sind.«

Für $m=1$: Sind a_i, b_i, c_i $(i=1, 2, 3, 4)$ die Schnittpunktquadrupel von R_4 mit drei beliebigen Ebenen, so liegen die vier vierten Schnittpunkte der vier Ebenen $(a_i b_i c_i)$, $i=1234$, mit R_4 wieder in einer Ebene.

Für $m=2$: Sind a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i $(i=1\ldots 8)$ irgend sieben Gruppen von je acht associirten Punkten (Schnittpunkte von R_4 mit Flächen zweiten Grades) und construirt man den Punkt h_i, welcher mit den sieben Punkten $a_i b_i c_i d_i e_i f_i g_i$ associirt ist, so sind die acht Punkte h_i $(i=1\ldots 8)$ wieder acht associirte Punkte.

3. Wir lassen nun in I (Art. 2) die $(n-1)$ Gruppen in eine $a_1 a_2 \ldots a_n$ zusammenfallen und construiren die $(n-1)$-elementigen Gruppen in der Art, dass wir jedes der Elemente a_i als ein $(n-1)$-faches Element betrachten, so dass also die Elemente l_i die Tangentialelemente a'_i der a_i werden, doch muss $n>2$ sein. Dies gibt den Satz:

II. »Ist $a_1 a_2 \ldots a_n$ irgend eine Gruppe einer J^n $n>2$, so bilden die Tangentialelemente $a'_1 a'_2 \ldots a'_n$ wieder eine Gruppe derselben J^n.«

Betrachtet man die J^3 der geraden Punkttripel einer C_3 oder die J^4 der ebenen Quadrupel einer R_4, so hat man sofort die bekannten Sätze: Die Tangentialpunkte dreier in gerader Linie liegenden Punkte von C_3 liegen ebenfalls in gerader Linie. Die Schmiegungsebenen der R_4 in vier Punkten, die in einer Ebene liegen, schneiden die R_4 in vier Punkten, die wieder in einer Ebene liegen.

Eine beliebige J^3 auf C_3 liefert:

»Sind $a_1 a_2 a_3$ die drei Schnittpunkte von C_3 mit einem C_2, welcher durch die drei Punkte $o_1 o_2 o_3$ von C_3 geht und sind $a'_1 a'_2 a'_3$ die letzten Schnittpunkte von C_3 mit den Kegelschnitten, welche durch $o_1 o_2 o_3$ gehen und C_3 respective in $a_1 a_2 a_3$ berühren, so liegen auch $o_1 o_2 o_3$ mit $a'_1 a'_2 a'_3$ in einem Kegelschnitte C'_2.«

Für eine J^4 auf C_3:

»Sind $a_1 a_2 a_3 a_4 o_1 o_2$ die sechs Schnittpunkte von C_3 mit einem C_2 und $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ die letzten Schnittpunkte von C_3 mit den durch $o_1 o_2$ gehenden Kegelschnitten, welche C_3 in $a_1 a_2 a_3 a_4$ respective osculiren, so liegen auch $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ mit $o_1 o_2$ in einem Kegelschnitte C'_2.«

Für eine J^5 auf C_3

»Sind a_i $(i = 12345)$ die fünf Schnittpunkte von C_3 mit einem durch den Punkt o von C_3 gehenden C_2 und sind a'_i $(i = 12345)$ die letzten Schnittpunkte der C_3 mit den Kegelschnitten, welche durch o gehen und in a_i mit C_3 vier unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich haben, so liegen auch die fünf Punkte a'_i $(i = 1\ldots 5)$ mit o in einem Kegelschnitte.«

Für die Fundamentale J^6 der conischen Sextupel auf C_3:

»Wenn man in den sechs Schnittpunkten der C_3 mit einer C_2 die fünfpunktigen Kegelschnitte construirt, so schneiden sie die C_3 in sechs Punkten, welche auf einer C'_2 liegen.«

Allgemein für die Fundamentale J^{3m}, deren Gruppen die Schnittpunkte der C_3 mit Curven m^{ter} Ordnung sind:

»Wenn man in jedem der $3m$ Schnittpunkte der C_3 mit einer C_m eine $(m-1)$-punktige C'_m construirt, so schneidet sie C_3 noch in einem m^{ten} Punkte; die so sich ergebenden $3m$ Punkte sind wieder Schnittpunkte von C_3 mit Curven m^{ter} Ordnung.«

4. Lässt man die $(k-1)$ Gruppen der J^n in Art. 1 zusammenfallen, so dass $a_i \equiv b_i \equiv c_i \ldots \equiv m_i$ wird, so ist h_i das Tangentialelement von a_i in der J^k. Wir haben also den Satz:

III. »Construirt man zu allen Elementen der einzelnen Gruppen einer J^n die Tangentialelemente in einer J^k, so bilden sie Gruppen jener J'^n, welche aus J^n durch die J^k abgeleitet erscheint.«

Wenn $n = k.p$ und wenn J^k eine der p^2 aus J^n abgeleiteten J^k ist (l. c. Art. 8), so ist die J'^n identisch mit der J^n.

Dies erkennt man durch folgende Betrachtungen.

Wird J'^n aus J^n durch eine beliebige J^k abgeleitet, so erhält man (Art. 1) ein n-faches Element λ von J'^n, wenn man eine Gruppe von beliebigen $(k-1)$ n-fachen Elementen $\alpha\beta\gamma\ldots\mu$ von J^n durch λ zu einer Gruppe der J^k vervollständigt.

Wenn $J^k \equiv J^n$, so ist auch $J'^n \equiv J^n$ (Art. 1), so dass also λ ebenfalls ein n-faches Element von J^n ist. Wir haben also den wichtigen Satz:

IV »Construirt man das Element, welches mit beliebigen $(n-1)$ n-fachen Elementen einer J^n eine Gruppe dieser J^n bildet, so ist dieses Element wieder ein n-faches Element der J^n.«

Der Satz, dass die Verbindungsgerade zweier Inflexionspunkte einer C_3 durch einen dritten Inflexionspunkt geht, ist die Anwendung des letzten Satzes auf die fundamentale J^3 gerader Tripel; ebenso ist der Satz, dass die Verbindungsebene dreier Berührungspunkte stationärer Ebenen einer R_4 den Berührungspunkt einer vierten solchen Ebene enthält, die Anwendung des letzten Satzes auf die Fundamentale J^4 ebener Quadrupel der R_4.

Wählt man unter den Berührungspunkten der 27 sechspunktigen Kegelschnitte einer C_3 beliebige fünf, so wird der durch sie gehende C_2 die C_3 in einem sechsten Punkte schneiden, welcher ebenfalls Berührungspunkt eines sechspunktigen Kegelschnittes oder Inflexionspunkt ist. Auch dies folgt sofort als Anwendung des letzten Satzes auf die J^6 der conischen Sextupel der C_3. (Die C_2 können auch in Geradenpaare übergehen).

Wird nun aus einer J^n $(n = kp)$ durch eine der p^2 abgeleiteten J^k die J'^n abgeleitet, so hat man, um ein n-faches Element λ von J'^n zu erhalten, die Gruppe $\alpha\beta\ldots\mu$ von beliebigen $k-1$ n-fachen Elementen der J^n durch λ zu einer Gruppe der J^k zu vervollständigen. Wählt man nun die $\alpha\beta\ldots\mu$ als k-fache Elemente der J^k, so wird nach dem letzten Satze λ ebenfalls ein k-faches Element von J^k sein; da aber jedes k-fache Element einer aus $J^n \equiv J^{kp}$ abgeleiteten J^k zugleich n-faches Element der J^n ist, so wird $J'^n \equiv J^n$ sein, w. z. b. w.

Betrachtet man z. B. die J^{3m} auf C_3, deren Gruppen die Schnittpunkte von C_3 mit Curven C_m sind, so ist die fundamentale J^3 gerader Tripel eine der m^2 abgeleiteten J^3. hieraus folgt also:

»Die Tangentialpunkte der $3m$ Schnittpunkte einer C_3 mit einer C_m sind wieder $3m$ Schnittpunkte der C_3 mit Curven C_m.«

Ebenso für R_4:

»Legt man in den $4m$ Schnittpunkten einer R_4 mit einer F_m an R_4 die Schmiegungsebenen, so schneiden sie R_4 in $4m$ Punkten, welche wieder Schnittpunkte der R_4 mit Flächen m^{ter} Ordnung sind.«

5. Wendet man den Satz IV auf eine beliebige J^3 auf einer C_3 an, so erhält man das bekannte Resultat:

»Durch drei Punkte $o_1 o_2 o_3$ von C_3 gehen neun Kegelschnitte, welche C_3 an anderer Stelle osculiren; verbindet man irgend zwei dieser Osculationspunkte mit $o_1 o_2 o_3$ durch einen Kegelschnitt, so schneidet er C_3 allemal noch in einem dritten Osculationspunkte.«

Für eine beliebige J^4 auf C_3:

»Durch zwei Punkte $o_1 o_2$ von C_3 gehen sechzehn Kegelschnitte, welche mit C_3 an anderer Stelle eine Berührung der dritten Ordnung besitzen; verbindet man irgend drei von den sich ergebenden sechzehn Berührungspunkten mit $o_1 o_2$ durch einen Kegelschnitt, so schneidet er C_3 allemal noch in einem vierten solchen Berührungspunkte.«

Oder auch:

»Legt man durch einen Punkt o von C_3 an C_3 die vier Tangenten und aus jedem Berührungspunkte einer solchen Tangente wieder die vier Tangenten, so erhält man im Ganzen sechzehn Berührungspunkte (welche alle o zum zweiten Tangentialpunkte haben). Der Punkt von C_3, welcher mit irgend drei dieser sechzehn Punkte ein Viereck bildet, welches o zum Gegenpunkte hat, ist wieder einer von den sechzehn Punkten.«

Für eine beliebige J^5 auf C_3:

»Durch einen Punkt o von C_3 lassen sich fünfundzwanzig Kegelschnitte legen, welche C_3 an anderer Stelle in fünf zusammenfallenden Punkten schneiden; der durch o und irgend vier der fünfundzwanzig Berührungspunkte gehende Kegelschnitt schneidet C_3 zum sechstenmale noch in einem fünften von jenen Berührungspunkten.«

Allgemein:

»Durch beliebige q Punkte von C_3 lassen sich Curven p^{ter} Ordnung legen, welche mit C_3 an anderer Stelle eine Berührung $(3p-q-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $[3p-q$ zusammenfallende Schnittpunkte] besitzen; und zwar erhält man $(3p-q)^2$ solcher Berührungspunkte. Eine durch jene q Punkte und beliebige $(3p-q-1)$ der Berührungspunkte hindurchgehende Curve p^{ter} Ordnung schneidet C_3 noch in einem weiteren von jenen Berührungspunkten.«

Für $q = o$:

»Es gibt qp^2 Punkte auf C_3, in denen die C_3 mit Curven p^{ter} Ordnung eine Berührung der $(3p-1)^{\text{ten}}$ Ordnung eingeht (unter ihnen sind auch die neun Inflexionspunkte). Jede Curve p^{ter} Ordnung, welche $(3p-1)$ dieser Punkte enthält, enthält noch einen weiteren dieser Punkte.«

Für eine Raumcurve vierter Ordnung R_4 vom Geschlechte Eins (erster Species):

»Zu beliebigen q Punkten von R_4 kann man $(4p-q)^2$ andere Punkte von der Art finden, dass es Flächen p^{ter} Ordnung gibt, welche durch die sämmtlichen q Punkte gehen und in einem der letzteren Punkte mit R_4 eine Berührung der $(4p-q-1)^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen. Legt man durch beliebige $(4p-q-1)$ dieser Punkte und durch die ersteren q Punkte eine Fläche p^{ter} Ordnung, so schneidet diese die R_4 noch in einem jener $(4p-q)^2$ Punkte.«

Für $q = o$:

»Es gibt $16p^2$ Punkte auf R_4 (darunter auch die Berührungspunkte der sechzehn stationären Schmiegungsebenen) von der Beschaffenheit, dass es Flächen p^{ter} Ordnung gibt, welche in einem solchen Punkte mit R_4 eine Berührung der $(4p-1)^{\text{ten}}$ Ordnung besitzen. Eine durch irgend $(4p-1)$ dieser Punkte gehende Fläche p^{ter} Ordnung schneidet R_4 noch in einem weiteren dieser Punkte.«

6. Den Satz IV kann man auf Grund der Betrachtungen des Art. 1 verallgemeinern.

Man kann eine gegebene Gruppe von Elementen immer auch als eine Gruppe von beliebig vielen Elementen betrachten. Ein Element a als Doppelelement (zweimal gezählt) soll mit a^2, als dreifaches mit a^3 u. s. w., als k-faches mit a^k bezeichnet werden. Die Gruppe a^3b^2c z. B. stellt dann eine sechselementige Gruppe dar, in welcher a dreifach, b doppelt und c einfach zu zählen ist. Allgemein kann man die Gruppe $abc\ldots l$, wenn man a α-fach, b β-fach. . l λ-fach zählt als Gruppe $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots l^\lambda$ von $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\lambda$ Elementen ansehen, wobei selbstverständlich $\alpha\beta\gamma\ldots\lambda$ beliebige ganze positive Zahlen sind. Wir können nun den Satz beweisen:

V »Sind $abc\ldots l$ beliebige unter den n^2 n-fachen Elementen einer J^n, und sind $\alpha\beta\gamma\ldots\lambda$ beliebige positive ganze Zahlen, so bestimmt die Gruppe $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots l^\lambda$ von $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\lambda=k$ Elementen eine J^k, durch welche die J^n in sich selbst übergeführt wird.«

Um nämlich ein n-faches Element jener J'^n zu finden, in welche eine gegebene J^n durch eine gegebene J^k übergeführt wird, hat man aus beliebigen $k-1$ n-fachen Elementen der J^m eine Gruppe zu bilden (Art. 1) und diese zu einer Gruppe der J^k zu ergänzen; das ergänzende Element ist dann ein n-faches Element der J'^n. Nehmen wir nun die $k-1$ Elemente $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots l^{\lambda-1}$, so wird ihre Gruppe durch l zu einer Gruppe der J^k ergänzt, daher ist l ein n-faches Element von J'^n und da es auch n-fach von J^n ist, so ist J'^n identisch mit J^n, w. z. b. w.

Da durch die J^k, welche eine J^n in sich selbst überführt, jede Gruppe von $k-1$ n-fachen Elementen der J^n durch ein weiteres n-faches Element der J^n zu einer Gruppe der J^k ergänzt wird, so folgt aus V sofort:

VI. »Sind $abc\ldots l$ beliebige unter den n^2 n-fachen Elementen einer J^n, so bestimmt die Gruppe $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots l^\lambda$ eine J^k vom Grade $k=\alpha+\beta+\gamma+\ldots\lambda$; sind nun $a_1b_1c_1\ldots m_1$ wieder beliebige, von den ersteren verschiedene oder nicht verschiedene n-fache Elemente der J^n und ist $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots\mu_1=k-1$, so wird die Gruppe $a_1^{\alpha_1}b_1^{\beta_1}c_1^{\gamma_1}\ldots m_1^{\mu_1}$ von $k-1$ Elementen durch ein Element n_1 zu einer Gruppe der J^k ergänzt. Dieses Element n_1 ist wieder ein n-faches Element der J^n, doch kann es auch mit einem der Elemente $a_1b_1c_1\ldots m_1$ zusammenfallen.«

7 Betrachten wir eine J^2; sie hat vier Doppelelemente a, b, c, d. Wird eines derselben z. B. a als Doppelelement einer J^2

gewählt, so ist es dieselbe ursprüngliche, welche man als die Paarinvolution erhält, welche die J^2 in sich überführt. Wird ein Paar, a, b z. B., gewählt, so erscheint durch dasselbe eine J'^2 gegeben, welche die J^2 in sich überführt. Das dem c in dieser J'^2 gepaarte Element muss wieder ein Doppelelement von J^2 sein; a oder b kann es nicht sein, weil jedes dieser Elemente dem anderen gepaart erscheint, es muss also d sein.

Wenn $abcd$ die vier Doppelelemente einer J^2 sind, so gehören die Paare ab, cd einer J'^2 an, welche die J^2 in sich überführt; zwei anderen solchen Paarinvolutionen gehören ac, bd, respective ad, bc an. Wir verknüpfen nun drei von den vier Doppelelementen, z. B. bcd, zu einem Tripel; durch dasselbe erscheint eine J^3 gegeben, welche die J^2 in sich selbst überführt. Wenn wir in dieser J^3 das Element a als Doppelelement a^2 zu einem Tripel ergänzen, so muss das ergänzende Element a' wieder eines der Doppelelemente von J^2 sein. Nun kann a' weder mit b, noch mit c, noch mit d identisch sein; denn wäre a' etwa mit b identisch, so wären bcd und ba^2 zwei Tripel einer J^3, somit müssten cd und a^2 zwei Paare einer J^2 sein, welche offenbar die gegebene J^2 sein müsste, weil sie a^2 zum Doppelelemente hätte, so dass in der gegebenen J^2 dem c das d gepaart wäre, was nicht angeht, weil ja in dieser J^2 jedes der beiden Elemente c, d sich selbst gepaart ist. Es muss also a' mit a^2 zusammenfallen, d. h. a ist dreifaches Element der durch das Tripel bcd bestimmten J^3

»Je drei von den vier Doppelelementen einer J^2 bestimmen als Tripel eine J^3, für welche das vierte Doppelelement eines der neun dreifachen Elemente darstellt.«

Oder:

»Wird eines der vier Doppelelemente einer J^2 als dreifaches Element einer J^3 betrachtet, so bilden die drei übrigen Doppelelemente ein Tripel dieser J^3.«

Man gelangt sofort zu demselben Resultate, wenn man die J^2 auf eine C_3 verlegt; dann sind $abcd$ die Berührungspunkte der aus einem Curvenpunkte o an C_3 gelegten Tangenten. Weil bc und ad zwei Paare einer J^2 sind, so liegt der Schnittpunkt δ von bc und ad auf C_3, und in der E-Beziehung, welche mit der J^3 verknüpft ist,[1] die durch das Tripel bcd bestimmt erscheint, entspricht also dem Punkte d der Punkt δ. Soll nun a^2 zu einem Tripel ergänzt werden, so ist der dritte Schnittpunkt α von $\overline{aa}$ mit C_3 aufzusuchen, dann müssen sich $\overline{\alpha d}$ und $\overline{a'\delta}$ in einem Punkte von C_3 schneiden. Nun ist aber α identisch mit o und da od die C_3 zum drittenmale in d schneidet, so trifft δd die C_3 in a'; aber δd trifft C_3 in a, also ist $a' \equiv a$ und folglich ist a in der That dreifacher Punkt der J^3.

Aus dem bewiesenen Satze folgt:

»Sind $abcd$ vier Punkte von C_3, welche einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt besitzen und schneidet ein durch bcd gehender Kegelschnitt die C_3 in den drei Punkten $o_1 o_2 o_3$, so wird der durch $o_1 o_2 o_3$ gehende, die C_3 in a berührende Kegelschnitt die Curve in a osculiren.«

Der Satz, dass die Berührungspunkte der drei durch einen Inflexionspunkt von C_3 gehenden Tangenten in gerader Linie liegen, ist ebenfalls eine Folge des obigen Satzes, denn sie müssen ja ein Tripel jener J^3 bilden, für welche der Inflexionspunkt ein dreifacher Punkt ist. Diese J^3 ist jedoch die Fundamentale J^3 gerader Tripel.

Durch die vorhergehenden Betrachtungen ist auch die Frage erledigt:

»Wie viele Tripel einer gegebenen J^3 auf C_3 gibt es von der Beschaffenheit, dass alle drei Punkte eines solchen Tripels einen gemeinsamen Tangentialpunkt besitzen?«

Es gibt neun solche Tripel, denn nach dem Früheren muss der vierte Punkt, welcher denselben Tangentialpunkt, wie die drei Punkte des Tripels hat, ein dreifacher Punkt der J^3 sein. Nun hat die J^3 neun dreifache Punkte; legt man aus ihren Tangentialpunkten die Tripel der weiteren Tangenten an C_3, so bilden deren Berührungspunkte die fraglichen neun Tripel.

Legt man durch eine R_4 eine Fläche zweiter Ordnung, so bestimmen die Erzeugenden einer Schaar auf R_4 Punktepaare einer J^2; vier Erzeugende der Schaar sind Tangenten von R_4, ihre Berührungspunkte $abcd$ sind die Doppelelemente. Ist α der

---

[1] Siehe: Sitzungsber., Bd. LXXXVIII, S. 437

vierte Schnittpunkt von R_4 mit der Ebene bcd, so bestimmen die Ebenen durch α auf R_4 die Tripel der durch bcd bestimmten J^3, und da a ein dreifacher Punkt dieser J^3 ist, so muss die Schmiegungsebene von a durch α gehen. Es schneiden also die Ebenen des Tetraeders $abcd$ die R_4 in vier Punkten $\alpha\beta\gamma\delta$, in denen die R_4 auch von den Schmiegungsebenen der R_4 in $abcd$ getroffen wird.[1]

Dass die vier Punkte $\alpha\beta\gamma\delta$ ein ebensolches Quadrupel wie $abcd$ bilden, d. h. dass die Tangenten von R_4 in $\alpha\beta\gamma\delta$ einer Regelschaar angehören, folgt daraus, dass $\alpha\beta\gamma\delta$ die Doppelpunkte einer J'^2 sind, nämlich jener, welche aus der J^2, deren Doppelelemente $abcd$ sind, durch die Fundamentale J^4 ebener Quadrupel der R_4 abgeleitet erscheint (l. c. S. 67).

Bezüglich einer C_3 kann man dieses letzte Resultat folgendermassen ausdrücken:

»Haben $abcd$ denselben Tangentialpunkt, und besitzen die Vierecke $abcd'$, $abc'd$, $ab'cd$, $a'bcd$ einen und denselben Gegenpunkt o, so haben auch $a'b'c'd'$ einen und denselben Gegenpunkt o'

Auf einer Raumcurve fünfter Ordnung R_5 vom Geschlechte Eins sind vier Punkte $abcd$, welche Doppelpunkte einer J^2 sind, vier solche Punkte, deren Tangenten eine und dieselbe Trisecante von R_5 schneiden.[2] Da nun bcd und a^3 Tripel derselben J^3 sind, so müssen die beiden letzten Schnittpunkte der Ebene bcd mit R_5, und die zwei Schnittpunkte von R_5 mit der Schmiegungsebene von a zwei Punktepaare einer Paarinvolution sein, weil sie ja jene zwei Tripel bcd, a^3 zu Quintupeln der fundamentalen J^5, welcher auch die ebenen Quintupel angehören, ergänzen. Wir haben also den Satz:

»Sind $abcd$ die Berührungspunkte der vier durch eine Trisecante von R_5 hindurchgehenden Tangentialebenen, und schneidet die Ebene bcd die R_0 noch in den Punkten mm', und schneidet die Schmiegungsebene von a die Curve R_5 noch in nn', so werden die

---

[1] Siehe: Grundzüge einer rein geom. Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Species. Von Dr. H. Schröter, Leipzig 1890, S. 68.

[2] Siehe: Sitzungsber. Bd. XC, S. 220.

beiden Geraden mm', nn' von einer und derselben Trisecante von R_5 getroffen.«

8. Wir haben an einem anderen Orte[1] gezeigt, dass es k^2 Involutionen beliebigen Grades gibt, welche eine gegebene J^k in sich selbst überführen. Es wird also vier Involutionen beliebigen, z. B. n^{ten} Grades [$(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe] geben, welche eine J^2 in sich überführen. Die vier Involutionen J^3, welche die J^2 in sich überführen, haben wir schon kennen gelernt; es sind jene vier J^3, die man erhält, wenn man jedes der vier Doppelelemente a, b, c, d von J^2 als dreifaches Element einer J^3 betrachtet. Wir könnten wohl noch J^3 herstellen, welche die J^2 in sich überführen, wenn wir unter den a, b, c, d zwei, z. B. $a\ b$, wählen, eines davon, z. B. a, als Doppelelement und b als einfaches Element eines Tripels einer J^3 betrachten; durch diese J^3 muss die J^2 nach Früherem ebenfalls in sich selbst übergeführt werden. Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass diese J^3 identisch ist mit jener, welche durch b als dreifaches Element bestimmt erscheint. In der J^3, in welcher das Doppelelement a doppelt gezählt, mit b als einfachem Element ein Tripel bildet, bildet b mit jedem Paare jener J^2, die a zum Doppelelemente hat, ein Tripel; aber ein solches Paar ist auch durch das doppelt gezählte b dargestellt, so dass also b als dreifaches Element der J^3 auftritt, w. z. b. w.

Sollen die vier J^k angegeben werden, von denen jede die J^2 in sich selbst überführt, so hat man die beiden Fälle zu unterscheiden, ob k eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Ist k eine ungerade Zahl, so erhält man die vier fraglichen J^k als jene, welche durch a, b, c, d, respective als k-fache Elemente bestimmt erscheinen.

Diese letztgenannten vier J^k sind identisch, wenn k eine gerade Zahl ist; in diesem Falle erhält man die übrigen drei J^k, indem man a als k-faches Element mit b (respective c, d) als einfachen Element zu einer k-elementigen Gruppe verbindet, durch welche die fragliche J^k bestimmt erscheint.

Man hat allgemein:

»Sind k und p relative Primzahlen, so erhält man die k^2 J^p, welche eine J^k in sich selbst überführen,

[1] Sitzungsber. Dieser Band: Über Vervollständigung von Involutionen Art. 14.

indem man jedes der k^2 k-fachen Elemente der J^k als p-faches Element einer J^p betrachtet, durch welches dann die J^p bestimmt erscheint.«

Wenn k in p enthalten ist, etwa $p = \lambda . k$, so werden die letztgenannten k^2 Involutionen alle identisch, und zwar mit jener J^p, die man erhält, wenn man irgend λ Gruppen der J^k zu einer $\lambda . k = p$-elementigen Gruppe vereinigt.

Ist hingegen p in k enthalten, also $k = \mu . p$, so reduciren sich die obigen k^2 Involutionen auf die μ^2 aus der J^k abgeleiteten J^p.

Um in jedem Falle alle k^2 J^p zu erhalten, welche die gegebene J^k in sich überführen, kann man so vorgehen. Es seien $a b c \ldots l$ die k^2 k-fachen Elemente der J^k; wenn wir eines, z. B. a als $(p-1)$-faches Element mit einem zweiten, z. B. mit b, als einfachem Element zu einer p-elementigen Gruppe verknüpfen, so wird durch diese Gruppe eine J^p bestimmt, durch welche J^k in sich selbst übergeführt wird. Lassen wir c an Stelle von b treten, so erhalten wir eine zweite solche J^p, welche von der ersten nothwendigerweise verschieden sein muss, weil ja die $(p-1)$-elementige Gruppe a nur in verschiedenen J^p von verschiedenen Elementen ergänzt wird. Wenn wir also das $(p-1)$-fach gezählte a der Reihe nach mit $b, c \ldots l$ und endlich auch mit a zu je einer p-elementigen Gruppe verknüpfen, so erhalten wir k^2 solche Gruppen, von denen jede eine J^p bestimmt und alle diese J^p sind von einander verschieden, und durch jede wird die J^k in sich selbst übergeführt:

»Wenn man eines der k^2 k-fachen Elemente einer J^k als p-faches Element einer J^p betrachtet, so ist diese (so bestimmte) J^p eine der k^2 J^p, durch welche die J^k in sich selbst überführt wird. Die sämmtlichen übrigen (k^2-1) dieser J^p erhält, wenn man jenes Element als $(p-1)$-faches, mit jedem der übrigen k-fachen Elemente als einfachen Elementen zu p-elementigen Gruppen vereinigt und durch jede solche Gruppe eine J^p als gegeben betrachtet«.