

Die Dichte der Erde, berechnet aus der Schwerebeschleunigung und der Abplattung

Dr. O. Tumlirz,

Professor an der k. k. Universität in Czernowitz.

Aus den Messungen der mittleren Dichte der Erde und aus den Untersuchungen über die Abplattung derselben geht mit Sicherheit hervor, dass die Dichte der Erde von der Oberfläche gegen das Centrum hin zunimmt, doch ist das Gesetz dieser Zunahme noch nicht bekannt. Um dieses Gesetz zu finden, betrachten wir die Oberfläche der Erde als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid und nehmen an, dass der ganze Erdkörper durch Ellipsoide, welche mit dem genannten Rotationsellipsoid ähnlich, ähnlich liegend und concentrisch sind, in unendlich dünne Schichten getheilt ist von der Beschaffenheit, dass die Dichte in einer und derselben Schichte constant, von Schichte zu Schichte aber veränderlich ist.

Ist A die halbe grosse und C die halbe kleine Axe der Erdoberfläche und sind a, c die analogen Werthe eines zu dieser Fläche homothetischen Ellipsoides, so können wir die Dichte im Innern der Erde als eine Function von a oder c ansehen. Wir setzen sie gleich $\varphi(a)$. Bezeichnen wir ferner den Abstand eines äusseren Punktes von der Rotationsaxe mit r und den Abstand desselben Punktes von der Äquatorebene mit z (positiv in der Richtung zum Nordpol) und bedeutet V das Potential der Erde in dem genannten Punkte, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi r \int_0^\infty \varphi(a) \frac{dt}{(1+t)D}$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi n^2 z \int_{t_1}^{\infty} \varphi(a) \frac{dt}{(1+n^2 t)D},$$

wo

$$\frac{A}{C} = a = n, \quad D = (1+t) \sqrt{1+n^2 t}$$

ist und t_1 in der Gleichung

$$\frac{r^2}{1+t} + \frac{n^2 z^2}{1+n^2 t} = a^2$$

denjenigen Werth von t darstellt, welcher $a = A$ entspricht.

Wenn wir die Function $\varphi(a)$ durch eine unendliche Reihe von der Form

$$\varphi(a) = \rho_0 - M \frac{a^2}{A^2} - N \frac{a^4}{A^4} -$$

ausdrücken, dann können wir sowohl für jeden Punkt des Äquators, als auch für beide Pole die Kraft $\frac{\partial V}{\partial r}$, beziehungsweise $\frac{\partial V}{\partial z}$ sehr leicht berechnen. Wir wollen im Folgenden die Rechnung in der Weise durchführen, dass wir zunächst nur die ersten zwei Glieder nehmen, also

$$\varphi(a) = \rho_0 - M \frac{a^2}{A^2}$$

setzen und zur Bestimmung der beiden Constanten ρ_0, M

1. die Schwerebeschleunigung am Äquator und
2. die Schwerebeschleunigung am Pol

benützen.

Es ist nämlich am Äquator

$$= 0, \quad r = A,$$

also

$$\frac{A^2}{1+t} = a^2, \quad t_1 = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= -2\pi A \int_0^\infty \left(\rho_0 - M \frac{a^2}{A^2} \right) \frac{dt}{(1+t)^2 \sqrt{1+n^2 t}} \\ &= -2\pi A \left(\rho_0 \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2 \sqrt{1+n^2 t}} - M \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^3 \sqrt{1+n^2 t}} \right).\end{aligned}$$

Setzen wir nach Bessel

$$\begin{aligned}A &= 6377397 \cdot 156 \text{ m} \\ C &= 6356079 \cdot 175 \text{ m},\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$n^2 - 1 = \Lambda^2 = 0.0067191$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2 \sqrt{1+n^2 t}} &= \frac{1+\Lambda^2}{\Lambda^2} \left(\frac{\arctan \Lambda}{\Lambda} - \frac{1}{1+\Lambda^2} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{15} \Lambda^2 + \frac{2}{35} \Lambda^4 - \dots \\ &= 0.6657734.\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^3 \sqrt{1+n^2 t}} &= \\ &= \frac{(1+\Lambda^2)^2}{\Lambda^2} \left[\frac{3}{4\Lambda^3} \arctan \Lambda - \frac{1}{2(1+\Lambda^2)^2} - \frac{3}{4\Lambda^2(1+\Lambda^2)} \right] \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{35} \Lambda^2 + \frac{2}{105} \Lambda^4 - \dots \\ &= 0.3996170.\end{aligned}$$

Unsere Gleichung erhält somit die Form

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -2\pi A (0.6657734 \rho_0 - 0.3996170 M). \quad (1)$$

Ganz ebenso erhalten wir für den Nordpol

$$r = 0, z = C$$

also

$$\frac{n^2 C^2}{1+n^2 t} = a^2, \quad t_1 = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial z} &= -2 \pi n^2 C \int_0^\infty \left(\rho_0 - M \frac{a^2}{A^2} \right) \frac{dt}{(1+t) \sqrt{(1+n^2 t)^3}} \\ &= -2 \pi n^2 C \left[\rho_0 \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t) \sqrt{(1+n^2 t)^3}} - \right. \\ &\quad \left. - M \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t) \sqrt{(1+n^2 t)^5}} \right]\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t) \sqrt{(1+n^2 t)^3}} &= \frac{2}{\Lambda^2} \left(1 - \frac{\arctan \Lambda}{\Lambda} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \Lambda^2 + \frac{2}{7} \Lambda^4 - \dots \\ &= 0.6639920\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t) \sqrt{(1+n^2 t)^5}} &= \frac{2}{\Lambda^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\Lambda^2} + \frac{\arctan \Lambda}{\Lambda^3} \right) \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{7} \Lambda^2 + \frac{2}{9} \Lambda^4 - \dots \\ &= 0.3980903,\end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2 \pi n^2 C (0.6639920 \rho_0 - 0.3980903 M), \quad (2)$$

wo

$$n^2 = 1 + \Lambda^2 = 1.0067191.$$

Wir wählen jetzt für die beiden Schwerebeschleunigungen jene Werthe, welche Pouillet angegeben hat, nämlich

$$\begin{aligned}g_0 &= 9.781029 \text{ m} \\ g_{90} &= 9.831085 \text{ m}\end{aligned}$$

und können demnach setzen:
für den Nordpol

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -9.831085$$

und für den Äquator

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial r} &= -9.781029 - \frac{4\pi^2 A}{(24 \times 60 \times 60)^2} \\ &= -9.814756.\end{aligned}$$

Dies führt zu dem Resultate:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 6.839461 \times 10^{-7} \\ M &= 5.265660 \times 10^{-7}\end{aligned}$$

Es ist somit die Dichte in der Oberflächenschichte ($a = A$) gleich

$$\rho_0 - M = 1.573801 \times 10^{-7}$$

und die mittlere Dichte der Erde gleich

$$\rho_0 - 0.6 M = 3.680065 \times 10^{-7},$$

oder es verhält sich die mittlere Dichte der Erde zur Dichte in der Oberflächenschichte wie

$$2.3383 \quad 1$$

und die Dichte im Mittelpunkt zur Dichte in der Oberflächenschichte wie

$$4.3458 \quad 1.$$

Die Dichte in der Oberflächenschichte der Erde wird gewöhnlich im Verhältniss zum Wasser als 2.5 angenommen; demnach erhalten wir

$$\begin{aligned}\text{die Dichte im Mittelpunkt} &= 10.864 \\ \text{und die mittlere Dichte der Erde} &= 5.846.\end{aligned}$$

Die letztere Zahl ist etwas grösser als die Zahl 5.692, welche v. Jolly mit der Wage gefunden hat.

Die Zahlen für die Dichte im Mittelpunkt und die mittlere Dichte der Erde sind wesentlich abhängig von den Werthen für g_0 und g_{90} . Wählen wir z. B. die Werthe, welche Listing angegeben hat, nämlich

$$\begin{aligned}g_0 &= 9.780728 \, m \\ g_{90} &= 9.831603 \, m,\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\rho_0 = 7.1317 \times 10^{-7}$$

$$M = 5.7526 \times 10^5$$

$$p_0 - M = 1.3791 \times 10^{-7}$$

$$\rho_0 - 0.6 M = 3.6801 \times 10^{-7}$$

Setzen wir wieder die Dichte in der Oberflächenschichte der Erde im Vergleich zum Wasser $= 2.5$, dann erhalten wir für die Dichte im Mittelpunkt die Zahl

12.929

und für die mittlere Dichte der Erde die Zahl

6·672.

Die letztere Zahl ist etwas grösser als die Zahl 6·566, welche Airy erhalten hat.

Für die Grössen g_0 und g_{90} hat man bisher infolge der localen Einflüsse und der Unregelmässigkeiten der Gestalt der Erde noch keineswegs ganz sichere Mittelwerthe erhalten, und diese Unsicherheit überträgt sich bei dieser Methode auch auf das Resultat. Aber wir können bereits aus dem gewonnenen Resultate einen Schluss ziehen, und zwar den, dass unser Dichtigkeitsgesetz

$$\varphi(a) = \rho_0 - M \frac{a^2}{a^2}$$

zwei Gruppen von Messungen, nämlich die Messungen der Schwerebeschleunigung an den verschiedenen Stellen der Erdoberfläche und die Messungen der mittleren Dichte der Erde, welche bisher in keinerlei Beziehung zu einander standen, mit einander in einfacher und, man kann auch sagen, befriedigender Weise verbindet, so dass dieses Gesetz den Anspruch erhält, als Ausdruck der thatsächlichen Verhältnisse zu gelten.

Theilen wir den Radius des Äquators in zehn gleiche Theile und legen wir die früheren Werthe von ρ_0 und M , nämlich $\rho_0 = 6.839461 \times 10^{-7}$ und $M = 5.265660 \times 10^{-7}$, zu Grunde, so erhalten wir nach diesem Dichtigkeitsgesetze

$$\frac{a}{A} = 1, \quad 0.9, \quad 0.8, \quad 0.7, \quad 0.6, \quad 0.5,$$

$$\text{Dichte} = 2.5, \quad 4.089, \quad 5.511, \quad 6.766, \quad 7.853, \quad 8.773,$$

$$\frac{a}{A} = 0.4, \quad 0.3, \quad 0.2, \quad 0.1, \quad 0,$$

$$\text{Dichte} = 9.526, \quad 10.112, \quad 10.530, \quad 10.781, \quad 10.864.$$

Wenn wir die Anziehungskraft auf einen Punkt bestimmen wollen, der im Innern auf einem Äquatorialhalbmesser im Abstand α vom Mittelpunkt liegt, so werden wir dieselbe gleich jener Kraft zu setzen haben, welche von demjenigen Ellipsoide ausgeht, das von der durch den Punkt gehenden und mit der Erdoberfläche homothetischen Ellipsoidenfläche begrenzt wird. Denn der übrige Theil übt nach einem bekannten Satze keine Wirkung aus. Die Dichte in dem betreffenden Punkt ist

$$\rho_0 - M \frac{\alpha^2}{A^2}$$

Dieselbe setzen wir gleich

$$\rho_0 - M', \text{ wo } M' = M \frac{\alpha^2}{A^2}.$$

Anderseits ist die Dichte innerhalb des Ellipsoides auf dem Halbmesser im Abstände a

$$\rho_0 - M \frac{a^2}{A^2} = \rho_0 - M' \frac{a^2}{A^2}.$$

Da nun ausserdem n denselben Werth hat, so können wir die früheren Formeln ohneweiters anwenden, nur müssen wir darin A durch α und M durch M' ersetzen. Wir erhalten also für $z = 0$, $r = \alpha$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= -2\pi\alpha(0.6657734 \rho_0 - 0.3996170 M') \\ &= -2\pi\alpha \left(0.6657734 \rho_0 - 0.3996170 M \frac{\alpha^2}{A^2} \right) \\ &= -2\pi\alpha \cdot 10^{-7} \left(4.55353 - 2.10425 \times \frac{\alpha^2}{A^2} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{A} \left(18.2462 - 8.4318 \frac{\alpha^2}{A^2} \right). \end{aligned}$$

Nennen wir die Schwerebeschleunigung in dem betreffenden Punkte g , so ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial r} &= -g - \frac{4\pi^2\alpha}{(24 \times 60 \times 60)^2} \\ &= -g - 0.033727 \frac{\alpha}{A}\end{aligned}$$

und daher

$$g = \frac{\alpha}{A} \left(18.212473 - 8.4318 \frac{\alpha^2}{A^2} \right).$$

$$\frac{\alpha}{A} = 1, \quad 0.9, \quad 0.8, \quad 0.7, \quad 0.6,$$

$$g = 9.781029, \quad 10.245, \quad 10.253, \quad 9.857, \quad 9.106$$

$$\frac{\alpha}{A} = 0.5, \quad 0.4, \quad 0.3, \quad 0.2, \quad 0.1, \quad 0$$

$$g = 8.052, \quad 6.745, \quad 5.236, \quad 3.575, \quad 1.813, \quad 0.$$

Den grössten Werth hat g für

$$\frac{\alpha}{A} = 0.84852,$$

und zwar

$$g_{\max} = 10.302299 \, m.$$

Für $\alpha = A$ ist

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = -1.1106 \times 10^{-6} \, m,$$

d. h. steigen wir am Äquator $1 \, m$ tief in die Erde, dann nimmt die Beschleunigung der Schwere um

$$1.1106 \times 10^{-6} \, m$$

zu.

Airy beobachtete in der Kohlengrube Harton bei Newcastle in einer Tiefe von $383 \, m$ eine Zunahme der Schwerebeschleunigung von $\frac{1}{19190}$ des Betrages an der Oberfläche,

d. i. um

$$5.1073 \cdot 10^{-4} \, m,$$

also für 1 m eine Zunahme von

$$1 \cdot 3335 \quad 10 \quad m.$$

Major v Sterneck hat dagegen in dem Bergwerke von Příbram bei einer Tiefe von 1000 m die Beobachtung gemacht, dass eine Uhr, welche an der Oberfläche richtig ging, unter der Erde um 3·88 Secunden pro Tag vorauseilte. Diesem Betrage entspricht eine Zunahme der Schwerebeschleunigung von

$$8 \cdot 8074 \quad 10^{-4} \quad m,$$

also für 1 m

$$0 \cdot 88074 \quad 10^{-6}.$$

Bilden wir das Mittel aus dem Airy'schen und dem Sterneck'schen Werthe, so ergibt sich

$$1 \cdot 1021 \times 10^{-6} \quad m,$$

also eine Zahl, welche mit dem von uns berechneten Werthe sehr nahe übereinstimmt.

Zum Schlusse habe ich noch den Druck berechnet, welchen die Massen der Erde bei dem oben ausgesprochenen Dichtigkeitsgesetz im Mittelpunkte ausüben würden, wenn die Erde ganz flüssig wäre. Indem ich dabei die Erde als eine Kugel vom Radius A ansah, erhielt ich einen Druck von

$$132 \quad 000 \text{ Atmosphären.}$$

Die Wassersäule, welche bei constantem Gewichte denselben Bodendruck ausübt, ist 5·0746 mal grösser als der Erdradius. Durch diesen ungeheueren Druck würde ein Stück Eisen — vorausgesetzt, dass die Zusammendrückbarkeit vom Drucke unabhängig ist — auf das 2·373fache verdichtet werden, d. h. es würde die Dichte von 7·76 auf 18·41 erhöht werden. Freilich können wir mit Sicherheit annehmen, dass die genannte Voraussetzung nicht richtig ist. H. Amagat hat gefunden, dass die Compressibilität des Wassers mit dem Drucke abnimmt, so dass bei 3000 Atmosphären der Compressibilitätscoefficient halb so gross ist wie bei 1 Atmosphäre, und wir können daraus vermuthen, dass die anderen Stoffe sich ähnlich verhalten.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: [101_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Tumlirz Otto

Artikel/Article: [Die Dichte der Erde, berechnet aus der Schwerebeschleunigung \$\hat{A}\$ ' und der Abplattung. 1528-1536](#)