

# Über das Gleichgewicht der Elektrizität auf einer Scheibe und einem Ellipsoid

J. Stefan,

M. k. Akad.

Die Vertheilung einer elektrischen Ladung auf einer unendlich dünnen, kreisförmigen Scheibe wird aus jener auf einem abgeplatteten Rotationsellipsoide abgeleitet, indem die Scheibe als ein Ellipsoid von unendlich kurzer Rotationsaxe betrachtet wird. Die gesuchte Vertheilung lässt sich aber in einfacherer Weise aus jener auf einer Kugelfläche bestimmen. Es genügt dazu der einfache Satz, dass zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ , welche auf einen in ihrer Verbindungslinie zwischen ihnen liegenden Punkt gleich grosse Kräfte ausüben, also in diesem Punkte sich das Gleichgewicht halten, dies auch dann noch thun, wenn ihre Distanzen von dem Punkte in gleichem Verhältnisse verändert werden und ihre Orte mit dem zwischen ihnen gelegenen Punkte in einer geraden Linie bleiben.

Die gleichförmige Vertheilung einer Masse, welche auf einer Kugelfläche sich im Gleichgewichte befindet, hat bekanntlich die Eigenschaft, dass ein Doppelkegel von unendlich kleiner Öffnung, den man durch einen Punkt im Innern der Kugelfläche als Spitze legt, auf der Kugelfläche Massen ausscheidet, deren Kräfte sich in dem angenommenen Punkte für sich das Gleichgewicht halten. Die Kräfte dieser Massen werden sich in diesem Punkte auch das Gleichgewicht halten, wenn man diese Massen auf eine durch den Punkt und durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Ebene projicirt, weil dadurch ihre Distanzen von dem betrachteten Punkte in gleichem Verhältnisse verkleinert

werden und ihre Verbindungslinie wieder durch diesen Punkt hindurchgeht.

Projicirt mán die ganze auf der Kugelfläche befindliche elektrische Belegung in der angegebenen Weise auf die durch den gewählten Punkt gehende Diametralebene, so halten sich die Kräfte der projecirten Massen in diesem Punkte das Gleichgewicht und gilt dies auch für jeden anderen Punkt innerhalb der kreisförmigen Diametralebene, weil die durch die Projection erzielte Vertheilung der Ladung auf der Ebene von der Wahl dieses Punktes unabhängig ist.

Die Dichte der Elektricität in irgend einem Punkte der Ebene verhält sich zu der ursprünglichen Dichte  $\sigma_0$  auf der Kugel, wie ein Oberflächenelement der letzteren zu seiner Projection auf die Ebene. Bildet der Radius vector zu einem Oberflächenelement der Kugel mit dem auf der Ebene senkrechten Durchmesser den Winkel  $\varphi$ , so verhält sich

$$\sigma : \sigma_0 = 1 : \cos \varphi$$

wenn  $\sigma$  die Dichte der Elektricität in einem zum Winkel  $\varphi$  gehörigen Projectionspunkte bedeutet. Ist  $r$  die Distanz dieses Punktes vom Mittelpunkte der Kugel oder der Scheibe und  $h$  der Radius derselben, so ist

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{h^2 - r^2}}{h}$$

somit

$$\sigma = \frac{h \sigma_0}{\sqrt{h^2 - r^2}}$$

Die gesammte Ladung  $E$  auf der Kugel ist ebenso gross, als jene auf der Scheibe und durch

$$E = 4\pi h^2 \sigma_0$$

bestimmt. Es ist also

$$\sigma = \frac{E}{4\pi h \sqrt{h^2 - r^2}}$$

Diese Formel gibt die Dichte der Ladung auf der einen Seite der ebenen Scheibe, ebenso gross ist die Dichte auf der anderen Seite derselben.

Um die Capacität der Scheibe zu bestimmen, genügt es, das Potential ihrer Ladung für den Mittelpunkt zu bestimmen. Dieses Potential findet man auch, wenn man jedes Massenelement auf der Kugelfläche dividirt durch seinen Abstand von dem auf der Scheibe senkrecht stehenden Durchmesser der Kugel. Zieht man einen Radius der Kugel, der mit diesem Durchmesser den Winkel  $\varphi$  bildet, beschreibt eine Kugelzone von der Breite  $hd\varphi$ , so gibt  $h \sin \varphi$  den Abstand der in der Zone enthaltenen Massen  $2\pi h^2 \sigma_0 \sin \varphi d\varphi$  von der Axe; also  $2\pi \sigma_0 h d\varphi$  das diesen Massen entsprechende Element des gesuchten Potentials. Dieser Ausdruck gibt nach  $\varphi$  von 0 bis  $\pi$  summiert das ganze Potential

$$P = 2\pi^2 h \sigma_0 = \frac{\pi E}{2h},$$

woraus die Capacität der Scheibe  $= \frac{2h}{\pi}$  folgt.

Der im Eingange aufgestellte Satz genügt auch, um aus der dem Gleichgewichte entsprechenden Vertheilung der Elektrizität auf einer Kugel, jene auf einem Ellipsoide abzuleiten. Eine Kugel lässt sich durch drei aufeinander senkrechte ungleiche Dilatationen des von ihr umschlossenen Raumes in ein Ellipsoid verwandeln. Ändert man die Coordinaten eines Punktes  $x, y, z$  im ursprünglichen Raume in  $\xi, \eta, \zeta$  nach den Gesetzen

$$\xi = \alpha x, \eta = \beta y, \zeta = \gamma z$$

so werden die Coordinaten eines Punktes, der auf der Kugeloberfläche vom Radius  $h$  sich befindet, der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2$$

genügen, nach der Transformation die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = h^2$$

befriedigen, oder die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

wenn

$$a = \alpha h, \quad b = \beta h, \quad c = \gamma h$$

gesetzt wird.

Die angegebene Transformation des Raumes hat die leicht nachzuweisende Eigenschaft, dass drei Punkte, welche ursprünglich in einer geraden Linie lagen auch nach der Transformation in einer solchen sich befinden und dass die Distanzen der beiden äusseren Punkte von dem mittleren in gleichem Verhältnisse geändert sind. Zwei in den äusseren Punkten gelegene Massen, deren Kräfte sich in dem mittleren Punkte im ursprünglichen Raume das Gleichgewicht hielten, werden auch nach dem Transporte in ihre neuen Lagen im transformirten Raume in dem mittleren Punkte mit gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräften wirken.

Die Eigenschaft der gleichförmigen Vertheilung einer Ladung auf einer Kugel, dass ein Doppelkegel von unendlich kleiner Öffnung aus der Oberfläche Massen aussticht, deren Kräfte sich in der Spitze des Kegels das Gleichgewicht halten, bleibt also auch für die Vertheilung der Ladung auf einem Ellipsoide bestehen, wenn diese Vertheilung so getroffen wird, dass die auf ein Flächenelement der Kugel entfallende Masse jenes Flächenelementes des Ellipsoides bedeckt, welches bei der Transformation des Raumes aus dem ersteren Elemente entstanden ist.

Die Dichte der Ladung in einem Punkte des Ellipsoides ergibt sich demnach in folgender Weise. Ist  $\omega_0$  ein Flächenelement der Kugel,  $\omega$  das correspondirende auf dem Ellipsoide, so ist

$$\omega_0 \sigma_0 = \omega \sigma$$

wenn  $\sigma_0$  und  $\sigma$  die Dichten in den beiden Elementen  $\omega_0$  und  $\omega$  bedeuten.

Das Verhältniss von  $\omega_0$  zu  $\omega$  ergibt sich am einfachsten durch folgende Betrachtung. Ein Kegel, dessen Spitze in der Mitte der Kugel sich befindet, dessen Basis  $\omega_0$  ist, hat den Rauminhalt

$$v_0 = \frac{h\omega_0}{3}$$

Im transformirten Raume hat dieser Kegel die Basis  $\omega$ . Bezeichnet  $p$  das vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die mit  $\omega$  zusammenfallende Tangentialebene gefällte Perpendikel, so ist das Volumen des transformirten Kegels

$$v = \frac{p\omega}{3}$$

Es ist aber der Natur der vorgenommenen Transformation entsprechend

$$v = \alpha\beta\gamma v_0$$

somit

$$\sigma = \frac{p\sigma_0}{\alpha\beta\gamma h}$$

Ersetzt man  $\sigma_0$  durch  $\frac{E}{4\pi h^2}$ , so dass  $E$  die gesammte Ladung auf der Kugel oder auf dem Ellipsoide bezeichnet und führt statt  $\alpha, \beta, \gamma$  die Halbaxen  $a, b, c$  des Ellipsoides ein, so erhält man

$$\sigma = \frac{Ep}{4\pi abc}$$

Gewöhnlich leitet man diese Formel mit Hilfe des Satzes ab, dass eine unendlich dünne von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte Schale im Innern der Höhlung keine Kraft ausübt, wenn sie von Masse, welche nach dem Newton'schen Gesetze wirkt, in gleichförmiger Dichte erfüllt ist. Ich bemerke, dass auch dieser Satz über die ellipsoidische Schale sich aus demselben Satze für die von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzte Schale ergibt, wenn man die Kugelschale durch drei orthogonale ungleiche Dilatationen in die ellipsoidische verwandelt.

Theilt man den Durchmesser einer Kugelfläche in gleiche Theile und legt durch die Theilpunkte Ebenen, welche auf dem Durchmesser senkrecht stehen, so theilen diese Ebenen die Kugelfläche in Zonen, welche alle gleiche Oberflächen haben. Ist die Kugelschale mit einer gleichförmigen Ladung von Elektrizität bedeckt, so theilen die Ebenen diese Ladung in gleich grosse Massen. Verwandelt man die Kugel durch drei Dila-

tationen, von denen eine in die Richtung des gewählten Durchmessers fällt, in ein Ellipsoid, so bleiben die Ebenen äquidistant und senkrecht auf der entsprechenden Axe. Sie theilen die Oberfläche des Ellipsoides in Zonen, welche von der auf dieser Fläche im Gleichgewichte befindlichen Ladung gleiche Theile enthalten. Bezeichnet man mit  $E$  die Ladung, mit  $a$  eine Halbaxe des Ellipsoides, so liegt auf der Zone, welche zwei auf der Axe senkrechte, in der Distanz  $\Delta$  befindliche Ebenen aus dem Ellipsoide ausschneiden, die Masse  $\frac{\Delta}{2a} E$ . Diese Eigenschaft der Ladung kann bei der Berechnung der Capacitäten eines Rotationsellipsoides verwerthet werden.

Die Vertheilung einer Ladung, welche auf einer elliptisch begrenzten Scheibe im Gleichgewichte sich befindet, kann aus jener auf einem Ellipsoide abgeleitet werden, wenn man die auf diesem befindlichen Massen auf eine seiner Hauptebenen projicirt. Man kann dieselbe aber auch aus der Vertheilung derselben Ladung auf einer kreisförmigen Scheibe ableiten, wenn man diese durch zwei ungleiche orthogonale Dilatationen in eine elliptische Scheibe verwandelt. Ändert man die Coordinaten  $x, y$  eines Punktes der Kreisscheibe in  $\xi = \alpha x, \eta = \beta y$ , so geht das Flächenelement  $dx dy$  in  $d\xi d\eta = \alpha\beta dx dy$  über.

Die Dichte  $\sigma'$  im Punkte  $\xi, \eta$  verhält sich demnach zur Dichte  $\sigma$  in  $x, y$  wie 1 zu  $\alpha\beta$ , es ist also

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\alpha\beta} = \frac{E}{4\pi h \alpha\beta \sqrt{h^2 - x^2 - y^2}},$$

wenn  $h$  den Radius der kreisförmigen Scheibe bezeichnet. Ersetzt man  $\alpha h$  und  $\beta h$  durch die Halbachsen der Ellipse  $a$  und  $b$ , ebenso  $x$  und  $y$  durch  $\frac{\xi}{\alpha}$  und  $\frac{\eta}{\beta}$ , so ist

$$\sigma' = \frac{E}{4\pi ab \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}}}$$

die Dichte im Punkte  $\xi, \eta$  auf der einen Seite der elliptischen Platte.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1892

Band/Volume: [101\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Stefan Josef

Artikel/Article: [Über das Gleichgewicht der Elektrizität auf einer Scheibe und einem Ellipsoid. 1583-1588](#)