# Über jenes Massenmoment eines materiellen Punktsystems, welches aus dem Trägheitsmomente und dem Deviationsmomente in Bezug auf irgend eine Axe resultirt

Dr. **Jos. Finger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. November 1892.)

Es sei $M$ ein beliebiger Punkt eines materiellen Punktsystems, $m$ die Masse dieses Punktes und $N$ dessen orthogonale Projection auf irgend eine durch den beliebigen Punkt $O$ gelegte Axe $a$, deren als positiv angenommene Richtung durch die auf irgend ein orthogonales Axensystem $xyz$ mit dem Anfangspunkte $O$ bezogenen Richtungscosinus $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ bestimmt sei. Durch $r$ sei der absolute Zahlwerth des Radius $OM$ und durch der positive, zwischen $o$ und $\pi$ gelegene Winkel bezeichnet, den die von $O$ nach $M$ gerichtete Strecke $r$ mit der positiven Richtung der Axe $a$ einschliesst.

Dreht man das bei $N$ rechtwinklige Dreieck $MNO$ in seiner Ebene um einen rechten Winkel, und zwar derart, dass durch diese Drehung die frühere Richtung $MN$ dieser Kathete in die positive Richtung der Axe $a$ gelangt, wodurch die Punkte $MNO$ in die neuen Lagen $M'N'O'$ gelangen, und multiplicirt man die Masszahlen der Dreiecksseiten unter Beibehaltung ihrer neuen Richtungen $M'N'$, $N'O'$ und $M'O'$ mit dem Massenmomente ersten Grades $m.\overline{MN} = m.\overline{M'N'}$, so erhält man folgende, nunmehr geometrisch vollkommen bestimmte Grössen von der Dimension $ml^2$, mit anderen Worten folgende Massenmomente zweiten Grades:

1. Das mit der Axe $a$ gleichgerichtete Massenmoment $m.\overline{M'N'^2} = mr^2 \sin^2 \varphi$ ist das quadratische Moment $i_a$ der Masse $m$ in Bezug auf die Axe $a$, das nach Euler allgemein als das Trägheitsmoment des materiellen Punktes $m$ bezüglich dieser Axe $a$ bezeichnet wird. Dasselbe ist als mit der Axe $a$ gleichgerichtet anzusehen.

2. Das zur Axe $a$ normale Massenmoment $m.\overline{M'N'}.\overline{N'O'}$ würde in seinem absoluten Zahlwerthe, wofern man den Punkt $O$ zum Coordinatenanfangspunkte, ferner die Dreiecksebene zur $xy$-Ebene und die Axe $a$ als eine der beiden orthogonalen Axen $xy$ wählen würde und wenn $x$ und $y$ die Coordinaten des Punktes $M$ bedeuten, mit dem Producte $mxy$ übereinstimmen, das nach Rankine das Deviationsmoment genannt wird, welcher Grösse jedoch bisher in der Mechanik eine bestimmte Richtung nicht zuerkannt wurde. Es sei in der vorliegenden Abhandlung dieses Massenmoment als das dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechende, auf die Axe $a$ bezogene Deviationsmoment $d_a^{(O)}$ des Massenpunktes $m$ bezeichnet. Nur ist hier dieses für die Geometrie der Massen wichtige Deviationsmoment $d_a^{(O)}$ als eine geometrische Grösse betrachtet, und zwar soll dessen positive Richtung bestimmt sein durch die ursprüngliche Richtung der zur Axe $a$ normalen Strecke $MN$, deren Richtung, je nachdem $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, also $\cos \varphi > 0$ ist, oder je nachdem $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, also $\cos \varphi$ negativ ist, mit der Richtung $N'O'$ übereinstimmt oder aber ihr entgegengesetzt ist. Wählt man daher die Richtung $MN$ zur positiven Richtung des Deviationsmomentes $d_a$, so ist dessen algebraischer Werth gegeben durch die Gleichung $d_a^{(O)} = mr^2 \sin \varphi \cos \varphi$.

3. Das zur ursprünglichen Richtung des Radius $\overline{OM} = r$ normale Massenmoment $m.\overline{M'N'}.\overline{M'O'} = mr^2 \sin \varphi$ ist seiner Richtung $M'O'$ und seiner Grösse nach bestimmt durch die geometrische Summe aus dem Trägheitsmomente $mr^2 \sin^2 \varphi$ und dem früheren Deviationsmomente $mr^2 \sin \varphi \cos \varphi$. Es sei diese geometrische Summe bezeichnet als das dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechende, auf die Axe $a$

bezogene (resultirende) Massenmoment $m_a^{(O)}$ des Massenpunktes $m$.

Diesen Erklärungen gemäss ist sonach

$$\left.\begin{aligned} i_a &= mr^2 \sin^2\varphi \\ d_a^{(O)} &= mr^2 \sin\varphi \cos\varphi \\ m_a^{(O)} &= mr^2 \sin\varphi \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Sind nun $xyz$ die Coordinaten des Punktes $M$ in Bezug auf das beliebige orthogonale Axensystem, dessen Anfangspunkt $O$ ist, so ist

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2+y^2+z^2, \quad r\cos\varphi = \alpha_x x+\alpha_y y+\alpha_z z \\ r^2\sin^2\varphi &= (\alpha_y z-\alpha_z y)^2+(\alpha_z x-\alpha_x z)^2+(\alpha_x y-\alpha_y x)^2 \\ &= \alpha_x^2(y^2+z^2)+\alpha_y^2(z^2+x^2)+\alpha_z^2(x^2+y^2) \\ &\quad -2\alpha_y\alpha_z.yz-2\alpha_z\alpha_x.zx-2\alpha_x\alpha_y.xy \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Für die Richtungscosinus der positiven Richtung $MN$ des Deviationsmomentes $d_a^{(O)}$ bestehen ferner die Gleichungen

$$\cos(x, d_a^{(O)}) = \frac{\alpha_x.r\cos\varphi-x}{r\sin\varphi}, \quad \cos(y, d_a^{(O)}) = \frac{\alpha_y.r\cos\varphi-y}{r\sin\varphi}$$

$$\cos(z, d_a^{(O)}) = \frac{\alpha_z.r\cos\varphi-z}{r\sin\varphi}.$$

Sonach sind die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten des Deviationsmomentes $d_a^{(O)}$ bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned} d_a^{(O)}.\cos(x, d_a^{(O)}) &= m.r\cos\varphi\,(\alpha_x.r\cos\varphi-x) \\ d_a^{(O)}.\cos(y, d_a^{(O)}) &= m.r\cos\varphi\,(\alpha_y.r\cos\varphi-y) \\ d_a^{(O)}.\cos(z, d_a^{(O)}) &= m.r\cos\varphi\,(\alpha_z.r\cos\varphi-z) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

während $i_a.\alpha_x$, $i_a.\alpha_y$, $i_a.\alpha_z$ die algebraischen Werthe der orthogonalen Componenten des Trägheitsmomentes $i_a$ sind.

Die Richtungscosinus der Richtung $M'O'$ des resultirenden Massenmomentes $m_a^{(O)}$ sind den obigen Erklärungen entsprechend

$$\cos(x, m_a^{(O)}) = \frac{\alpha_x.r-x\cos\varphi}{r\sin\varphi}, \quad \cos(y, m_a^{(O)}) = \frac{\alpha_y.r-y\cos\varphi}{r\sin\varphi},$$

$$\cos(z, m_a^{(O)}) = \frac{\alpha_z.r-z\cos\varphi}{r\sin\varphi,},$$

demnach sind die orthogonalen Componenten des Massenmomentes $m_a^{(O)} = mr^2 \sin\varphi$ folgende:

$$\left.\begin{aligned} m_a^{(O)}.\cos(x, m_a^{(O)}) &= m.[\alpha_x.r^2 - x.r\cos\varphi] \\ m_a^{(O)}.\cos(y, m_a^{(O)}) &= m.[\alpha_y.r^2 - y.r\cos\varphi] \\ m_a^{(O)}.\cos(z, m_a^{(O)}) &= m.[\alpha_z.r^2 - z.r\cos\varphi] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Da $m_a^{(O)}$ die geometrische Summe aus $i_a$ und $d_a^{(O)}$ ist, so ist, was übrigens auch aus (1), (3) und (4) zu ersehen ist,

$$\left.\begin{aligned} m_a^{(O)}.\cos(x, m_a^{(O)}) &= i_a.\alpha_x + d_a^{(O)}\cos(x, d_a^{(O)}) \\ m_a^{(O)}.\cos(y, m_a^{(O)}) &= i_a.\alpha_y + d_a^{(O)}.\cos(y, d_a^{(O)}) \\ m_a^{(O)}.\cos(z, m_a^{(O)}) &= i_a.\alpha_z + d_a^{(O)}.\cos(z, d_a^{(O)}) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Durch Einsetzung der Werthe aus (2) in (4) ergibt sich auch

$$\left.\begin{aligned} m_a^{(O)}.\cos(x, m_a^{(O)}) &= \alpha_x.m(y^2+z^2) - \alpha_y.mxy - \alpha_z.mxz \\ m_a^{(O)}.\cos(y, m_a^{(O)}) &= -\alpha_x.myx + \alpha_y.m(z^2+x^2) - \alpha_z.myz \\ m_a^{(O)}.\cos(z, m_a^{(O)}) &= -\alpha_x.mzx - \alpha_y\, mzy + \alpha_z.m(x^2+y^2) \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Bedeutet nun $J_a$ das Trägheitsmoment der Masse des ganzen Punktsystems in Bezug auf die Axe $a$, so ist bekanntlich, wie übrigens aus (1) und (2) sich unmittelbar ergibt,

$$\left.\begin{aligned} J_a = \Sigma i_a = \Sigma mr^2\sin^2\varphi = \alpha_x^2\Sigma m(y^2+z^2) + \alpha_y^2\Sigma m(z^2+x^2) + \\ + \alpha_z^2\Sigma m(x^2+y^2) - 2\alpha_y\alpha_z\Sigma myz - 2\alpha_z\alpha_x\Sigma mzx \\ - 2\alpha_x\alpha_y\Sigma mxy \end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Bildet man nun die geometrische Summe der durch die Gleichungen (6) der Richtung und Grösse nach bestimmten, dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechenden Massenmomente $m_a^{(O)} = mr^2 \sin\varphi$ sämmtlicher materieller Punkte $m$ des Punktsystems in Bezug auf die Axe $a$, so gelangt man zu jener durch diese geometrische Summe der Richtung und dem Zahlenwerthe nach bestimmten Grösse, welche wir das dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechende Massenmoment $M_a^{(O)}$ des Punktsystems in Bezug auf diese Axe $a$ nennen wollen. Dieser Definition zufolge ist den Gleichungen (6) gemäss, wenn $\mu_x \mu_y \mu_z$ nunmehr die Richtungscosinus der Richtung dieses resultirenden Massenmomentes $M_a^{(O)}$ bezeichnen,

$$\left.\begin{aligned} M_a^{(O)} . \mu_x &= \alpha_x . \Sigma m(y^2+z^2) - \alpha_y . \Sigma(mxy) - \alpha_z . \Sigma(mxz) \\ M_a^{(O)} . \mu_y &= -\alpha_x . \Sigma(myx) + \alpha_y . \Sigma m(z^2+x^2) - \alpha_z . \Sigma(myz) \\ M_a^{(O)} . \mu_z &= -\alpha_x . \Sigma(mzx) - \alpha_y . \Sigma(mzy) + \alpha_z . \Sigma m(x^2+y^2) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

oder wenn von nun an durch $a_{11} a_{22} a_{33}$ die Trägheitsmomente $J_x J_y J_z$ des Punktsystems in Bezug auf die Axen $xyz$ und durch $a_{23} a_{31} a_{12}$ die entgegengesetzten Werthe der entsprechenden gewöhnlich als Deviationsmomente — in der von Rankine gewählten Bedeutung dieses Wortes — bezeichneten Grössen bezeichnet sind, so dass

$$\left.\begin{gathered} a_{11} = J_x = \Sigma m(y^2+z^2), \quad a_{22} = J_y = \Sigma m(z^2+x^2), \\ a_{33} = J_z = \Sigma m(x^2+y^2) \\ a_{23} = a_{32} = -\Sigma(myz), \quad a_{31} = a_{13} = -\Sigma(mzx), \\ a_{12} = a_{21} = -\Sigma(mxy) \end{gathered}\right\} \quad (9)$$

ist, so sind die zu den Coordinatenaxen $xyz$ parallelen Componenten des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ zufolge (8) bestimmt durch

$$\left.\begin{aligned} M_a^{(O)} . \mu_x &= a_{11} . \alpha_x + a_{21} . \alpha_y + a_{31} . \alpha_z \\ M_a^{(O)} . \mu_y &= a_{12} \; \alpha_x + a_{22} . \alpha_y + a_{32} . \alpha_z \\ M_a^{(O)} . \mu_z &= a_{13} . \alpha_x + a_{23} . \alpha_y + a_{33} . \alpha_z \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die mit $M_a^{(O)}$ gleichgerichtete Länge $\sqrt{\frac{M_a^{(O)}}{M}}$, wo $M$ die Masse des ganzen Punktsystems bedeutet, sei als der Radius des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ und die gleichfalls in ihrer Richtung mit $M_a^{(O)}$ übereinstimmende Strecke $\frac{M_a^{(O)}}{Ml}$, wo $l$ eine beliebige Länge bedeutet, sei in der Folge als der auf die Basis $l$ reducirte Radius des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ bezeichnet.

Dieser Definition und der letzten Gleichung in (1) gemäss ist z. B. der auf die Entfernung $r \sin\varphi$ eines Massenpunktes $m$ von der Axe $a$ reducirte Radius des Massenmomentes $m_a^{(O)}$ gleich der Entfernung $r$ dieses Punktes vom Punkte $O$.

Die Übereinstimmung der Form der Gleichungen (10) sowohl mit jenen bekannten Gleichungen, die bei der astatischen Reduction der Kräfte eines auf ein starres Punktsystem einwirkenden Kräftesystems auf eine Reductionsresultante und auf drei Kräftepaare — mit orthogonalen astatischen Armen von der Länge 1 — zur Bestimmung der im Endpunkte eines dieser Arme wirkenden Seitenkraft des entsprechenden Kräftepaares dienen, als auch mit jenen Gleichungen, welche in der Kinematik homogener Deformationen die Lage und Länge einer Geraden des Körpers nach erfolgter Deformation bestimmen, und auch mit jenen Gleichungen, mittelst welcher man in der Elasticitätstheorie die Richtung und Grösse der resultirenden Spannung berechnet, springt sofort ins Auge, so dass nach der Ansicht des Verfassers diese Analogie allein schon die Einführung des oben auseinandergesetzten Begriffes des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ in die Geometrie der Massen empfehlen dürfte — ganz abgesehen von den anderen Vortheilen, die aus den folgenden Auseinandersetzungen ersichtlich sein werden.

Zunächst sei hervorgehoben, dass, wie dies aus den letzten Gleichungen (10) sofort ersichtlich ist, in derselben Weise, wie in der Elasticitätstheorie die Richtung der resultirenden Spannung durch die Normale der Reactionsfläche, so auch hier die Richtung des resultirenden Massenmomentes $M_a^{(O)}$ durch die Normale $n_a$ jener Ebene bestimmt ist, welche conjugirt ist zu dem mit der Axe $a$ gleichgerichteten Radius $r_a$ jener Fläche deren Gleichung ist:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy = M. \quad (11)$$

Diese Fläche ist nun den Werthen (9) zufolge das dem Punkte $O$ zugehörige Cauchy-Poinsot'sche Trägheitsellipsoid, dessen Radien $r_a$ bekanntlich die reciproken Werthe der Trägheitshalbmesser in Bezug auf die mit diesen Radien übereinstimmenden Axen sind, wonach

$$r_a = \sqrt{\frac{M}{J_a}} \quad (12)$$

ist. Ist ferner $B$ der Fusspunkt jener Normalen $\overline{OB} = n_a$, die vom Mittelpunkte $O$ dieses Trägheitsellipsoids auf die im Endpunkte $A$ des Radius $r_a$ an diese Fläche gelegte Berührungsebene gefällt wird, so ist, wie sich aus (10) ergibt, wenn man diese Gleichungen einzeln mit $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ multiplicirt und addirt,

$$M_a^{(O)} \cos(r_a, n_a) = J_a = \frac{M}{r_a^2},$$

sonach

$$M_a^{(O)} = \frac{M}{r_a^2 \cos(r_a, n_a)} = \frac{M}{r_a n_a}. \tag{13}$$

Bezeichnet $l_a$ den mit der Axe $a$ gleichgerichteten Radius jenes Ellipsoids, welchem das Trägheitsellipsoid (11) subjungirt[1] ist, d. i. jenes mit (11) coaxialen Ellipsoids, dessen Halbaxen den Quadraten der Halbaxen des Trägheitsellipsoids gleich sind und dessen Gleichung

$$(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)^2 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)^2 + \\ + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)^2 = M^2 \tag{14}$$

ist, so ist den Gleichungen (10) zufolge auch

$$M_a^{(O)} = \frac{M}{l_a}. \tag{14a}$$

Übrigens lässt sich auch, was sich am meisten empfiehlt, die Richtung und Grösse von $M_a^{(O)}$ mit Hilfe der dem Trägheitsellipsoid (11) adjungirten Fläche ermitteln, deren Gleichung[1]

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{23}yz + 2A_{31}zx + 2A_{12}xy = \frac{\Delta}{M} \tag{15}$$

ist, wo $A_{11}A_{12}$. die zu den mit denselben Indices behafteten Gliedern der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{16}$$

adjungirten Subdeterminanten bedeuten. Bestimmt man nämlich in diesem Ellipsoid (15), dessen Halbaxen den gleichgerichteten

---

[1] Siehe Finger, »Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung«. Diese Sitzungsberichte, Bd. CI, Abth. II. a.

Halbaxen des Trägheitsellipsoids (11) reciprok, also den Hauptträgheitshalbmessern gleich sind, jenen Radius $R_a$, der conjugirt ist zu jener Ebene, die zur Axe $a$ normal ist und der mit der positiven Richtung der Axe $a$ unter einem spitzen Winkel geneigt ist, so ist durch die Richtung dieses Radius $R_a$ auch die Richtung von $M_a^{(O)}$ bestimmt, und es ist ferner, wenn $N_a = R_a \cos(R_a, N_a) = R_a \cos(r_a, n_a)$ die orthogonale Projection dieses Radius $R_a$ auf die Axe $a$ bedeutet,[1] $R_a n_a = r_a N_a = 1$, sonach ist zufolge (12)

$$J_a = MN_a^2, \tag{17}$$

d. h. $N_a$ ist der Trägheitsradius des Punktsystems in Bezug auf die Axe $a$ und zufolge (13) ist ferner

$$M_a^{(O)} = M.N_a R_a, \tag{18}$$

d. h. $R_a$ ist der auf eine dem Trägheitsradius $N_a$ gleiche Basis reducirte Radius des Massenmomentes $M_a^{(O)}$.

Bedeuten $xyz$ nicht die Punktcoordinaten, sondern die Ebenencoordinaten, so ist umgekehrt (15) die Tangentialgleichung des Trägheitsellipsoids und (11) jene des dem letzteren adjungirten Ellipsoids.

Es sei schliesslich in Kürze bemerkt, dass man die Grösse von $M_a^{(O)}$ auch aus dem zur Fläche (14) adjungirten Ellipsoid[1] (der Reciprocalfläche in Bezug auf den Mittelpunkt)

$$(A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z)^2 + (A_{12}x + A_{22}y + A_{32}z)^2 + \\ + (A_{13}x + A_{23}y + A_{33}z)^2 = \frac{\Delta^2}{M^2}, \tag{19}$$

dessen Halbaxen den reciproken Werthen der Quadrate der gleichgerichteten Halbaxen des Trägheitsellipsoids, also auch den Quadraten der Hauptträgheitshalbmesser gleich sind, bestimmen könnte. Ist nämlich $L_a$ die Entfernung jener Ebene vom Mittelpunkte $O$, welche zur Axe $a$ normal ist und die Fläche (19) berührt, so ist infolge der Adjungirbarkeit der Flächen (14) und (19) $l_a L_a = 1$, sonach zufolge (14a) $M_a^{(O)} = ML_a$.

---

[1] Siehe Finger, »Über die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vortheil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung«. Diese Sitzungsberichte, Bd. CI, Abth. II. a.

Übrigens ist $L_a$ auch durch den in der Richtung von $M_a^{(O)}$ gelegenen Radius der Fläche (19) bestimmt, denn es ist gleichfalls $M_a^{(O)} = M.L_a$, wie dies aus (10) gefolgert werden kann, wenn man diese Gleichungen nach $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ auflöst und hierauf die erhaltenen Gleichungen quadrirt und addirt.

Die Gleichungen (15), (17) und (18) sind homogen. Will man auch die übrigen Gleichungen homogen gestalten, so hat man nur in den Gleichungen (11), (12) und (13) überall $M$ durch $Ml^4$, ferner in den Gleichungen (14) und (14a) $M$ durch $Ml^3$ und in (19) und den folgenden Gleichungen $M$ durch $Ml$ zu ersetzen, wo $l$ irgend eine constante Länge bedeutet; nur ist dann zu beachten, dass in diesem Falle für jede Hauptaxe der Fläche (19) der entsprechende Hauptträgheitsradius das geometrische Mittel aus der Länge $l$ und aus der gleichgerichteten Halbaxe dieser Fläche ist, während jeder Radius des Trägheitsellipsoids (11) dem Quotienten aus $l^2$ und dem gleichgerichteten Trägheitsradius gleicht und jede Halbaxe der Fläche (14) dem Quotienten aus $l^3$ und dem Quadrate des Hauptträgheitshalbmessers für die gleichgerichtete Hauptaxe gleichkommt.

Jene Fläche, deren von $O$ aus nach allen Richtungen des Raumes geführten Radien den Trägheitshalbmessern des gegebenen Punktsystems in Bezug auf diese Radien gleich sind, hat die mit der Gleichung (11) des Trägheitsellipsoids ähnliche Gleichung vierten Grades

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = \\ = M(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Zerlegt man das Massenmoment $M_a^{(O)}$ in zwei zu einander senkrechte Componenten, deren eine die Richtung der beliebig durch $O$ gelegten Axe $b$ hat, so ist diese Componente, wenn $\beta_x \beta_y \beta_z$ die Richtungscosinus der Axe $b$ bedeuten, bestimmt durch $M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) = M_a^{(O)}[\beta_x \mu_x + \beta_y \mu_y + \beta_z \mu_z]$, daher den Gleichungen (10) zufolge auch durch

$$M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) = a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{22}\alpha_y\beta_y + a_{33}\alpha_z\beta_z + \\ + a_{23}(\alpha_y\beta_z + \alpha_z\beta_y) + a_{31}(\alpha_z\beta_x + \alpha_x\beta_z) + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x), \quad (20)$$

während die zu $b$ senkrechte Componente $M_a^{(O)} \sin(b, M_a^{(O)})$, deren Richtungscosinus $\gamma_x \gamma_y \gamma_z$ den Gleichungen

$$\gamma_x . \sin(b, M_a^{(O)}) = \mu_x - \beta_x \cos(b, M_a^{(O)})$$
$$\gamma_y . \sin(b, M_a^{(O)}) = \mu_y - \beta_y \cos(b, M_a^{(O)})$$
$$\gamma_z . \sin(b, M_a^{(O)}) = \mu_z - \beta_z \cos(b, M_a^{(O)})$$

entsprechen, durch die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten

$$\left. \begin{array}{l} M_a^{(O)} \sin(b, M_a^{(O)}) . \gamma_x = M_a^{(O)} . \mu_x - \beta_x . M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) \\ M_a^{(O)} \sin(b, M_a^{(O)}) . \gamma_y = M_a^{(O)} . \mu_y - \beta_y . M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) \\ M_a^{(O)} \sin(b, M_a^{(O)}) . \gamma_z = M_a^{(O)} . \mu_z - \beta_z . M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) \end{array} \right\} \qquad (21)$$

bestimmt ist, wobei die Werthe aus (10) und (20) in (21) einzusetzen sind.

Die Vertauschbarkeit von $\alpha$ und $\beta$ in dem rechten Theile der Gleichung (20) lehrt, dass die zur beliebig gewählten Axe $b$ parallele Componente des auf eine zweite beliebige Axe $a$ bezogenen Massenmomentes $M_a^{(O)}$ stets gleich ist der zur Axe $a$ parallelen Componente des auf die Axe $b$ bezogenen Massenmomentes $M_b^{(O)}$, d. h.

$$M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) = M_b^{(O)} \cos(a, M_b^{(O)}). \qquad (22)$$

Die beiden anderen Componenten $M_a^{(O)} \sin(b, M_a^{(O)})$ und $M_b^{(O)} \sin(a, M_b^{(O)})$ sind jedoch nur dann einander gleich, wenn $M_a^{(O)}$ und $M_b^{(O)}$ gleich sind, also die Axen $a$ und $b$ die Richtung zweier gleichen Radien des Elllpsoids (14), etwa die Richtung zweier beliebiger Radien der Kreisschnitte dieses Ellipsoids haben.

Identificirt man die Axe $b$ mit irgend einer der drei Coordinatenaxen, so gelangt man von der allgemeinen Gleichung (20) zu den Gleichungen (10).

Der wichtigste Fall der Zerlegung des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ in zwei senkrechte Componenten ist jener, in welchem die Axe $b$ mit der Axe $a$ identisch, also $\alpha_x = \beta_x$, $\alpha_y = \beta_y$, $\alpha_z = \beta_z$ ist. In diesem Falle übergeht die Gleichung (20) in die Gleichung (7), d. i. die zur Axe $a$ parallele Componente $M_a^{(O)} \cos[a, M_a^{(O)}]$ des auf diese Axe $a$ bezogenen Massenmomentes $M_a^{(O)}$ ist das Trägheitsmoment $J_a$ des Punktsystems bezüglich dieser Axe — wofern das Trägheitsmoment, wie hier stets vorausgesetzt werden soll, als eine mit der Axe $a$ gleichgerichtete geometrische Grösse vom Zahlenwerthe $J_a$ betrachtet wird —, während die zur Axe $a$ senkrechte Componente $D_a^{(O)} = M_a^{(O)} \sin(a, M_a^{(O)})$, deren Richtungscosinus durch $\delta_x \delta_y \delta_z$ bezeichnet seien, den Gleichungen (21) zufolge der Richtung und Grösse nach bestimmt ist durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} D_a^{(O)} . \delta_x &= M_a^{(O)} \sin(a, M_a^{(O)}) . \delta_x = M_a^{(O)} . \mu_x - J_a . \alpha_x \\ D_a^{(O)} . \delta_y &= M_a^{(O)} \sin(a, M_a^{(O)}) . \delta_y = M_a^{(O)} . \mu_y - J_a . \alpha_y \\ D_a^{(O)} . \delta_z &= M_a^{(O)} \sin(a, M_a^{(O)}) . \delta_z = M_a^{(O)} . \mu_z - J_a . \alpha_z \end{aligned}\right\}, \quad (23)$$

in welche Gleichungen die Werthe aus (10), (9) und (7) einzusetzen sind.

Diese zur Axe $a$ im Punkte $O$ senkrechte Componente $D_a^{(O)}$ des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ wollen wir das dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechende Deviationsmoment des ganzen Punktsystems in Bezug auf die Axe $a$ nennen. Dasselbe ist, wie schon aus der ganzen Untersuchung, insbesondere auch unmittelbar aus der Vergleichung der Gleichung (23) und (5) hervorgeht, die geometrische Summe der früher betrachteten, dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechenden Deviationsmomente $d_a^{(O)} = mr^2 \sin\varphi \cos\varphi$ sämmtlicher materieller Punkte $m$ des Systems in Bezug auf dieselbe Axe $a$.

Die durch die Axe $a$ parallel zur Richtung des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ und des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ gelegte Ebene sei als Ebene des Deviationsmomentes bezeichnet.

Die Normale $A$ dieser Ebene, als deren Richtung die positive Richtung der Axe jener Rotation, durch welche die Richtung der Axe $a$ in die Richtung des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ auf kürzestem Wege überführt werden kann, angenommen sei, wollen wir die Axe $A$ des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ nennen. Die in die Richtung von $D_a^{(O)}$ fallende Länge $\sqrt{\frac{D_a^{(O)}}{M}}$ werde als Radius des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ oder kurzweg als Deviationsradius benannt, ferner sei, wenn $l$ irgend eine als Basis gewählte Länge bedeutet, die mit $D_a^{(O)}$ gleichgerichtete Strecke $\frac{D_a^{(O)}}{Ml}$ als der auf die Basis $l$ reducirte Radius des Deviationsmomentes bezeichnet.

Ändert die Axe $a$ für denselben Punkt $O$ ihre Richtung in die gerade entgegengesetzte, so müssen den Gleichungen (10) und (23) zufolge auch die Richtungen des Massenmomentes, des Deviationsmomentes und des Trägheitsmomentes in die den früheren entgegengesetzten übergehen, jedoch ohne Änderung des Zahlenwerthes dieser Grössen.

Zur graphischen Darstellung des Deviationsmomentes eignet sich am besten das dem Trägheitsellipsoid adjungirte Ellipsoid (15). Legt man nämlich an dieses Ellipsoid jene Berührungsebene, welche zur Richtung der Axe $a$ normal ist und diese Axe $a$ in einem auf der positiven Seite des Punktes $O$ gelegenen Punkte $P$ schneidet (so dass die Richtung $OP$ mit der positiven Richtung der Axe übereinstimmt), so ist zufolge (17) $\overline{OP} = N_a$ dem Trägheitsradius des Punktsystems bezüglich der Axe $a$ gleich, ferner besteht für den zum Berührungspunkte $Q$ dieser Tangentialebene gezogenen Radius $\overline{OQ} = R_a$, welcher mit dem Massenmomente $M_a^{(O)}$ gleichgerichtet ist, die Relation (18), und es ist demnach das Deviationsmoment $D_a^{(O)}$

$$D_a^{(O)} = \sqrt{[M_a^{(O)}]^2 - J_a^2} = MN_a \,.\, \sqrt{R_a^2 - N_a^2} = M \,.\, N_a T_a, \quad (24)$$

wenn $T_a$ die Masszahl der das Ellipsoid (15) tangirenden Kathete $PQ$ des rechtwinkligen Dreiecks $OPQ$ bedeutet. Den Relationen (17), (18) und (24) gemäss ist sonach

$$J_a \;\; D_a^{(O)} \;\; M_a^{(O)} = N_a \;\; T_a \;\; R_a = \overline{OP} : \overline{PQ} \;\; \overline{OQ}, \qquad (25)$$

d. h. es stellen die Seiten $OP$, $PQ$, $OQ$ des Dreiecks $OPQ$ der Richtung und Grösse nach das Trägheitsmoment $J_a$, das Deviationsmoment $D_a^{(O)}$ und das Massenmoment $M_a^{(O)}$ graphisch dar — und zwar sind diese drei Dreiecksseiten $OP$, $PQ$, $OQ$ die auf eine dem Trägheitsradius $N_a$ gleiche Basis reducirten Radien des Trägheitsmomentes $J_a$, des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ und des Massenmomentes $M_a^{(O)}$.

Die Analogie der Gleichungen (17), (18) und (24) mit den ursprünglichen Gleichungen (1) ist sofort in die Augen fallend.

Es lässt sich, wenn auch nicht in so einfacher Weise, die Grösse des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ auch mit Hilfe des Trägheitsellipsoids (11) darstellen. Ist nämlich, wie früher, $A$ der

Endpunkt des mit der Axe $a$ gleichgerichteten Radius $\overline{OA} = r_a$ dieses Ellipsoids und $B$ die orthogonale Projection des Mittelpunktes $O$ auf die dem Punkte $A$ zugehörige Berührungsebene, deren Abstand $\overline{OB}$ von $O$ durch $r_a$ bezeichnet wurde, ist ferner $C$ der Schnittpunkt der Geraden $AB$ mit jener Geraden $OC$, die in der Ebene $OAB$ von $O$ aus senkrecht zu $OA$ geführt werden kann, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $OAC$, in welchem vom Scheitel $O$ des rechten Winkels auf die Hypothenuse $\overline{AC} = h$ die Senkrechte $OB$ geführt ist, $r_a^2 = h.\sqrt{r_a^2 - n_a^2}$, daher den Gleichungen (12) und (13) zufolge

$$D_a^{(O)} = \sqrt{[M_a^{(O)}]^2 - J_a^2} = \frac{M}{r_a}\sqrt{\frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{r_a^2}} = \frac{M}{h.n_a} = \frac{M}{2f},$$

wo $f$ den Flächeninhalt des Dreiecks $OAC$ bedeutet.

Für die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten des dem Coordinatenanfangspunkte $O$ entsprechenden Massenmomentes $M_x^{(O)}$ in Bezug auf die $x$-Axe findet man aus (10), wenn man $\alpha_x = 1$, $\alpha_y = 0$, $\alpha_z = 0$ setzt, die Werthe $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$. Es resultirt also dieses Massenmoment $M_x^{(O)}$ aus dem Trägheitsmomente $a_{11} = J_x = \Sigma m(y^2+z^2)$ und aus den beiden zur $y$-, beziehungsweise $z$-Axe parallelen Componenten $a_{12} = -\Sigma(mxy) = a_{21}$, beziehungsweise $a_{13} = -\Sigma(mxz) = a_{31}$, aus welchen beiden Componenten wiederum das dem Punkte $O$ entsprechende Deviationsmoment $D_x^{(O)} = \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2}$ resultirt. In gleicher Weise findet man, dass die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten des auf die $y$-Axe bezogenen Deviationsmomentes $D_y^{(O)} = \sqrt{a_{21}^2 + a_{23}^2}$ bestimmt sind durch $a_{21} = -\Sigma(myx), 0, a_{23} = -\Sigma(myz) = a_{32}$ und jene des Deviationsmomentes $D_z^{(O)}$ in Bezug auf die $z$-Axe bestimmt durch $a_{31} = -\Sigma(mzx)$, $a_{32} = -\Sigma(mzy)$, 0.[1]

Die Hauptträgheitsaxen des Punktes $O$ seien kurzweg definirt als jene durch den Punkt $O$ gelegten Axen, für welche das Deviationsmoment $D_a^{(O)}$ verschwindet. Den Gleichungen (23)

---

[1] Haton de la Goupillière untersucht in seinem »Mémoire sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses«, Journal de l'école polytechnique, tome XXI, cahier 37) die geometrischen Eigenschaften der Summe $\Sigma(mxy)$, die er das »Moment der $z$-Axe« nennt, für verschiedene Axensysteme des Körpers,

und (10) gemäss ist die nothwendige und hinreichende Bedingung hiefür ausgedrückt durch die Relation

$$\frac{a_{11}\alpha_x+a_{21}\alpha_y+a_{31}\alpha_z}{\alpha_x}=\frac{a_{12}\alpha_x+a_{22}\alpha_y+a_{32}\alpha_z}{\alpha_y}=\frac{a_{13}\alpha_x+a_{23}\alpha_y+a_{33}\alpha_z}{\alpha_z},$$

welche bekanntlich nichts Anderes besagt, als die bekannte Eigenschaft, dass die Trägheitshauptaxe mit einer der drei Axen des Trägheitsellipsoides (11), also auch der Fläche (14), (15) und (19) übereinstimmen müsse. Dass für diese Axen nicht nur das Trägheitsmoment $J_a$, sondern auch das Massenmoment $M_a^{(O)}$ ein Maximum, Minimum oder ein Maximum-Minimum sei, ist sofort aus früher gesagtem ersichtlich.

Sind durch $XYZ$ diese drei Trägheitshauptaxen und durch $J_X J_Y J_Z$ die entsprechenden Hauptträgheitsmomente bezeichnet, so ist der Gleichung (20) zufolge, da für denselben Punkt $O$ und für dieselbe Axe $a$ weder die Richtung, noch die Grösse des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ von der Wahl des Axensystems abhängig ist und da für die Axen $XYZ$ die Componenten $a_{23}$, $a_{31}$, $a_{12}$ der Deviationsmomente verschwinden müssen,

$$M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) = J_X\alpha_X\beta_X+J_Y\alpha_Y\beta_Y+J_Z\alpha_Z\beta_Z. \qquad (26)$$

Durch Gleichsetzung der rechten Theile dieser Gleichung und der Gleichung (20) erhält man eine in vielen Fällen mit Vortheil anwendbare allgemeine Beziehung, die für beliebig gerichtete Axen $a$ und $b$ giltig ist. So erhält man z. B., wenn die Axe $a$ mit der $x$-Axe identificirt wird, also $\alpha_x = 1$, $\alpha_y = \alpha_z = O$ gesetzt wird, und wenn $\alpha_X\alpha_Y\alpha_Z$ nunmehr die Richtungscosinus der $x$-Axe in Bezug auf die Trägheitshauptaxen bedeuten, für jede Axe $b$ die Beziehung

$$a_{11}\beta_x+a_{12}\beta_y+a_{13}\beta_z = J_X\alpha_X\beta_X+J_Y\alpha_Y\beta_Y+J_Z\alpha_Z\beta_Z \qquad (27)$$

u. s. w. Wird demnach jede der beiden Axen $a$ und $b$ mit einer der Axen $xyz$ identificirt, so gelangt man, wenn $(\beta_X\beta_Y\beta_Z)$ und $(\gamma_X\gamma_Y\gamma_Z)$ die auf die Trägheitshauptaxen $XYZ$ bezogenen Richtungscosinus der Axen $y$ und $z$ bedeuten, der Reihe nach zu den bekannten Relationen

$$\left.\begin{aligned} a_{12} &= J_X\alpha_X\beta_X + J_Y\alpha_Y\beta_Y + J_Z\alpha_Z\beta_Z = a_{21} \\ a_{23} &= J_X\beta_X\gamma_X + J_Y\beta_Y\gamma_Y + J_Z\beta_Z\gamma_Z = a_{32} \\ a_{31} &= J_X\gamma_X\alpha_X + J_Y\gamma_Y\alpha_Y + J_Z\gamma_Z\alpha_Z = a_{13} \\ a_{11} &= J_X\alpha_X^2 + J_Y\alpha_Y^2 + J_Z\alpha_Z^2 \text{ u. s. w.} \end{aligned}\right\}. \qquad (28)$$

Bisher wurden die Beziehungen zwischen den einzelnen Massenmomenten $M_a^{(O)}$ und Deviationsmomenten $D_a^{(O)}$ für die verschiedenen Axen, die in demselben Punkte $O$ sich schneiden, in Betracht gezogen. Es sollen nun die Massenmomente $M_a^{(O)}$ und Deviationsmomente $D_a^{(O)}$, die verschiedenen Punkten paralleler Axen entsprechen, in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit untersucht werden.

Es werde zu diesem Zwecke der Massenmittelpunkt $S$ des Punktsystems, dessen Coordinaten in Bezug auf das frühere Axensystem $x_S y_S z_S$ seien, zum Anfangspunkte eines zu dem letzteren Axensystem $xyz$ parallelen und consentirenden Axensystem $\xi\eta\zeta$ gewählt. Die mit der Axe $a$ gleichgerichtete Schwerpunktsaxe sei durch $s$ und die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten der dem Schwerpunkte $S$ entsprechenden, auf die Axen $\xi\eta\zeta$ bezogenen Massenmomente $M_\xi^{(S)}$, $M_\eta^{(S)}$, $M_\zeta^{(S)}$ seien analog der Bezeichnungsweise (9) durch griechische Buchstaben bezeichnet, so dass $M_\xi^{(S)}$ die geometrische Summe (Resultante) aus den zu den Coordinatenaxen $\xi\,\eta\,\zeta$ parallelen Componenten $\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}$ ist u. s. w., also wenn $\equiv$ das Zeichen der geometrischen Gleichheit und $[\,]+[\,]$ die Bezeichnung für die geometrische Summe ist,

$$\left.\begin{gathered} [M_\xi^{(S)}] \equiv [\alpha_{11}] + [\alpha_{12}] + [\alpha_{13}] \\ [M_\eta^{(S)}] \equiv [\alpha_{21}] + [\alpha_{22}] + [\alpha_{23}] \\ [M_\zeta^{(S)}] \equiv [\alpha_{31}] + [\alpha_{32}] + [\alpha_{33}], \\ \text{wo} \\ \alpha_{11} = J_\xi = \Sigma m(\eta^2+\zeta^2),\ \alpha_{22} = J_\eta = \Sigma m(\zeta^2+\xi^2), \\ \alpha_{33} = J_\zeta = \Sigma m(\xi^2+\eta^2) \\ \alpha_{23} = -\Sigma(m\eta\zeta) = \alpha_{32},\ \alpha_{31} = -\Sigma(m\zeta\xi) = \alpha_{13}, \\ \alpha_{12} = -\Sigma(m\xi\eta) = \alpha_{21} \end{gathered}\right\} \qquad (29)$$

In diesen Gleichungen bedeuten $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten des beliebigen Massenpunktes $m$ in Bezug auf das Schwerpunktsaxensystem, für welche die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(m\xi)=\Sigma(m\eta)=\Sigma(m\zeta)=0\\ x=x_s+\xi,\ y=y_s+\eta,\ z=z_s+\zeta\end{array}\right\}. \tag{30}$$

Dementsprechend ist

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}=\Sigma m(y^2+z^2)=\Sigma m(\eta^2+\zeta^2)+M(y_s^2+z_s^2)=\\ \qquad\qquad =\alpha_{11}+M(y_s^2+z_s^2)\\ a_{22}=\alpha_{22}+M(z_s^2+x_s^2)\\ a_{33}=\alpha_{33}+M(x_s^2+y_s^2)\\ a_{23}=-\Sigma(myz)=-\Sigma(m\eta\zeta)-My_sz_s=\\ \qquad\qquad =\alpha_{23}-My_sz_s\\ a_{31}=\alpha_{31}-Mz_sx_s\\ a_{12}=\alpha_{12}-Mx_sy_s\end{array}\right\} \tag{31}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (10) ein, so findet man, wenn kürzehalber durch $\mathbf{M}_\xi\mathbf{M}_\eta\mathbf{M}_\zeta$ die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten des dem Schwerpunkte $S$ entsprechenden, auf die Schweraxe $s$ bezogenen Massenmomentes $M_s^{(S)}$, also der Gleichung (10) gemäss, die Werthe

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{M}_\xi=\alpha_{11}\alpha_x+\alpha_{21}\alpha_y+\alpha_{31}\alpha_z\\ \mathbf{M}_\eta=\alpha_{12}\alpha_x+\alpha_{22}\alpha_y+\alpha_{32}\alpha_z\\ \mathbf{M}_\zeta=\alpha_{13}\alpha_x+\alpha_{23}\alpha_y+\alpha_{33}\alpha_z\end{array}\right\} \tag{32}$$

bezeichnet werden, wenn ferner $r_s$ die Entfernung des Punktes $O$ vom Schwerpunkte $S$, d. i. $r_s=\sqrt{x_s^2+y_s^2+z_s^2}$, und wenn $\varphi_s$ den kleinsten Winkel bedeutet, den die Richtung $OS$ mit der positiven Richtung $(\alpha_x\alpha_y\alpha_z)$ der Axe $a$ einschliesst, so dass $r_s\cos\varphi_s=\alpha_xx_s+\alpha_yy_s+\alpha_zz_s$ ist und $\sin\varphi_s$ positiv ist, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}M_a^{(O)}.\mu_x=\mathbf{M}_\xi+M[\alpha_x.r_s^2-x_s.r_s\cos\varphi_s]\\ M_a^{(O)}.\mu_y=\mathbf{M}_\eta+M[\alpha_y.r_s^2-y_s.r_s\cos\varphi_s]\\ M_a^{(O)}.\mu_z=\mathbf{M}_\zeta+M[\alpha_z.r_s^2-z_s.r_s\cos\varphi_s]\end{array}\right\} \tag{33}$$

Die letzten Summanden dieser drei Gleichungen sind aber den Gleichungen (4) zufolge die zu den Axen $xyz$ parallelen Componenten des dem Punkte $O$ entsprechenden, auf die Axe $a$ bezogenen Massenmomentes $m_a^{(O)}=Mr_s^2\sin\varphi_s$ jenes fingirten materiellen Punktes, dessen Masse $M$ der gesammten Masse des Punktsystems gleich ist und der sich an der Stelle des Massenmittelpunktes $S$ befindet. Die Gleichungen (33) drücken sonach folgendes Gesetz aus:

Das irgend einem Punkte $O$ einer Axe $a$ entsprechende Massenmoment $M_a^{(O)}$ des Punktsystems in Bezug auf die Axe $a$ ist die geometrische Summe aus dem dem Schwerpunkte $S$ entsprechenden Massenmomente $M_s^{(S)}$ bezüglich der zur Axe $a$ parallelen Schweraxe $s$ und aus dem dem ersteren Punkte $O$ entsprechenden, auf die Axe $a$ bezogenen Massenmomente $m_a^{(O)} = Mr_s^2 \sin \varphi_s$ der im Schwerpunkte concentrirt gedachten Masse $M$ des ganzen Punktsystems, was in Kürze ausgedrückt sei durch

$$[M_a^{(O)}] \equiv [M_s^{(S)}] + [m_a^{(O)}]. \tag{34}$$

Da nun bekanntlich auch $J_a = J_s + M.r_s^2 \sin^2 \varphi_s = J_s + i_a$ ist, wo $J_s$ das Trägheitsmoment des Punktsystems bezüglich der Axe $s$ und $i_a$ das Trägheitsmoment $M.r_s^2 \sin^2 \varphi_s$ der im Schwerpunkte $S$ fingirten Masse $M$ bezüglich der Axe $a$ bedeutet, so führt die geometrische Subtraction dieser beiden letzten Gleichungen, da nach Früherem

$$[M_a^{(O)}] \equiv [D_a^O] + [J_a], \quad [M_s^S] \equiv [D_s^{(S)}] + [J_s]$$

und $[m_a^{(O)}] \equiv [d_a^{(O)}] + [i_a]$ ist, zu dem Resultate:

$$[D_a^{(O)}] \equiv [D_s^{(S)}] + [d_a^{(O)}], \tag{35}$$

wo der Gleichung (1) gemäss $d_a^{(O)} = M.r_s^2 \sin \varphi_s \cos \varphi_s$ ist.

Dieser Gleichung (35) zufolge ist das durch die Gleichung (34) ausgedrückte frühere Gesetz nicht nur für die Massenmomente $M_a^{(O)}$, sondern im vollen Wortlaute auch für die Deviationsmomente $D_a^{(O)}$ giltig.

Liegt der Punkt $O$ in der Schwerpunktsaxe $s$, so ist die Axe $a$ mit der Axe $s$ identisch und der Winkel $\varphi_s$ entweder $o$ oder $\pi$, je nachdem der Schwerpunkt $S$ auf der positiven oder negativen Seite des Punktes $O$ gelegen ist, also $\overline{OS}$ mit der Richtung der Axe übereinstimmt oder entgegengesetzt gerichtet ist. Es ist daher in diesem Falle $\sin \varphi_s = 0$, daher auch

$m_a^{(O)} = i_a = d_a^{(O)} = 0$, sonach zufolge (34) und (35) $[M_s^{(O)}] \equiv \equiv [M_s^{(S)}]$, $[D_s^{(O)}] \equiv [D_s^{(S)}]$, d. h. für alle Punkte derselben Schweraxe sind sowohl die auf diese Axe bezogenen Deviationsmomente, als auch die Massenmomente geometrisch gleich. Ist z. B. $D_s^{(S)} = 0$, d. h. ist diese Schweraxe eine Hauptcentralaxe, so ist auch $D_s^{(O)} = 0$, d. h. diese Axe dann auch, wie bekannt, eine Trägheitshauptaxe für jeden ihrer Punkte.

Für alle Punkte $N$, die in derselben Schwerebene gelegen sind, ist bei allen zu dieser Ebene normalen Axen $a$ der Winkel $\varphi_s = \frac{\pi}{2}$, also $\cos \varphi_s = 0$, daher $d_a^{(N)} = M . r_s^2 \sin \varphi_s \cos \varphi_s = 0$, somit nach (35) $[D_a^{(N)}] \equiv [D_s^{(S)}]$, d. h. die den einzelnen Punkten $N$ derselben Schwerebene entsprechenden Deviationsmomente in Bezug auf die zu dieser Ebene in diesen Punkten normalen Axen $a$ sind geometrisch gleich. Ist z. B. $D_s^{(S)} = 0$, so ist auch $D_a^{(N)} = 0$, d. h. die Axe $a$ eine Trägheitshauptaxe des Punktes $N$ u. s. w.

Um nun die gegenseitigen Beziehungen der den verschiedenen Punkten $O$ der Axe $a$ entsprechenden, auf diese Axe bezogenen Deviationsmomente und Massenmomente in einfachster Weise festzustellen, empfiehlt es sich, die mit den letzteren als gleichgerichtet vorauszusetzenden Radien dieser quadratischen Momente, wie auch jene der Trägheitsmomente auf die Basis $s_a = r_s \sin \varphi_s$, d. i. auf die senkrechte Entfernung der beiden parallelen Axen $a$ und $s$ zu reduciren. Es seien die auf diese Basis $s_a$ reducirten Radien der Momente $J_s$, $D_s^{(S)}$, $M_s^{(S)}$, $J_a$, $D_a^{(O)}$, $M_a^{(O)}$ durch die analogen Zeichen $\iota_s$, $\delta_s^{(S)}$, $\mu_s^{(S)}$, $\iota_a$, $\delta_a^{(O)}$, $\mu_a^{(O)}$ bezeichnet, so dass $J_s = M s_a \iota_s$, $J_a = M s_a \iota_a$, $D_s^{(S)} = M s_a \delta_s^{(S)}$, $D_a^{(O)} = M s_a \delta_a^{(O)}$ u. s. w. ist, und die Längen $s_a$, $\iota_s$ und $\delta_s^{(S)}$ seien als gegeben vorausgesetzt. $N$ sei die orthogonale Projection des Schwerpunktes $S$ auf die gegebene Axe $a$ und die variable Entfernung $u = \overline{NO}$ des beliebigen Punktes $O$ dieser Axe sei positiv oder negativ in Rechnung gezogen, je nachdem die Richtung vom Punkte $N$ nach $O$ mit der positiven Richtung der Axe $a$ übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist, so dass $u = -r_s \cos \varphi_s$ ist. Zufolge des letzten Lehrsatzes sind $D_a^{(N)}$ und $D_s^{(S)}$ geometrisch gleich, sonach ist zufolge (35) $[D_a^{(O)}] \equiv$

$\equiv [D_a^{(N)}]+[d_a^{(O)}]$. Dieselbe Beziehung besteht auch für die mit diesen Deviationsmomenten gleichgerichteten, auf die Basis $s_a$ reducirten Radien derselben, nämlich für $\delta_a^{(O)}$, $\delta_s^{(S)}$ und für den Radius des Deviationsmomentes $d_a^{(O)} = Mr_s^2 \sin\varphi_s \cos\varphi_s = -Ms_a u$, dessen Länge der Entfernung $NO$ gleich ist und dessen Richtung, wie aus den gleich zu Anfang gegebenen Erklärungen, beziehungsweise aus der Drehung des Dreiecks $SNO$ in seiner Ebene um einen rechten Winkel sofort ersichtlich ist, mit der nach dem Schwerpunkte hinzielenden Richtung $NS$ übereinstimmt, wofern $u$ positiv ist, dagegen bei negativem $u$ ihr entgegengesetzt ist. Um daher der Richtung und Grösse nach die auf die Basis $s_a$ reducirten Radien $\delta_a^{(O)}$ der einzelnen Deviationsmomente $D_a^{(O)}$, die den einzelnen Punkten $O$ der Axe $a$ entsprechen, zu bestimmen, hat man nur in der zur Axe $a$ senkrechten Schwerebene — vom Punkte $N$ dieser Axe aus — den Radius $\delta_s^{(S)}$ in der Richtung von $D_s^{(S)}$ aufzutragen und durch den Endpunkt $P$ desselben eine Gerade $g$ parallel zu jener Geraden zu führen, welche den von der positiven Richtung der Axe $a$ und der Richtung $NS$ eingeschlossenen rechten Winkel halbirt. Legt man nun durch den beliebigen Punkt $O$ der Axe $a$ eine Ebene senkrecht zu dieser Axe, so schneidet diese die Gerade $g$ in jenem Punkte $D$, dessen Verbindungslinie $OD$ der Richtung und Grösse nach den auf die Basis $s_a$ reducirten Radius $\delta_a^{(O)}$ des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ den beiden letzten Gleichungen zufolge bestimmt.

Um auch den auf die Basis $s_a$ reducirten Radius $\mu_a^{(O)}$ des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ zu bestimmen, der die geometrische Summe aus $[\delta_a^{(O)}]$ und $[\iota_a]$ ist, hat man bloss zu beachten, dass $J_a = J_s + Ms_a^2$, also auch $Ms_a\iota_a = Ms_a\iota_s + Ms_a^2$, daher $\iota_a = \iota_s + s_a$ ist, d. h. dass der auf $s_a$ reducirte Radius des Trägheitsmomentes $J_a$ bezüglich der Axe $a$ (die sogenannte reducirte Länge des Punktsystems für die Axe $a$) dem um die Basis $s_a$ vergrösserten gegebenen Radius $\iota_s$ gleich ist. Man hat daher nur in der positiven Richtung der Axe $a$ vom früher bestimmten Punkte $D$ aus diesen um $s_a$ verlängerten Radius aufzutragen und den Endpunkt $E$ dieser Strecke mit $O$ zu verbinden, und es ist dann $[OE] \equiv [\mu_a^{(O)}]$. Auch die so erhaltenen Punkte $E$ liegen in einer zur Geraden $g$ parallelen Geraden.

Um nun wenigstens in einigen wenigen Fällen zu zeigen, welche geometrische Anschaulichkeit die in dieser Abhandlung behandelten geometrischen Begriffe des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ und Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ in manchen wichtigen Untersuchungen der Mechanik ermöglichen, stellen wir uns zunächst die Aufgabe, mittelst dieser Grössen die Winkelbeschleunigung $\beta$ und die Lage der Axe $b$ derselben bei einem um einen fixen Punkt $O$ rotirenden unveränderlichen Punktsystem geometrisch zu bestimmen, wenn die äusseren Kräfte, die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und die Momentanaxe gegeben sind. Zu diesem Zwecke werde ausser dem bisher angewendeten, mit dem Punktsystem in unveränderlicher Verbindung stehenden beweglichen Axensystem $xyz$ ein zweites consentirendes fixes System orthogonaler Axen $XYZ$ mit demselben Anfangspunkt $O$ zu Grunde gelegt. Sind durch $x_X = X_x$, $x_Y = Y_x$ u. s. w. die Cosinus der Neigungswinkel der entsprechenden Axen, ferner durch $v_x v_y v_z$, beziehungsweise $v_X v_Y v_Z$ die entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit $v$ jenes materiellen Punktes von der Masse $m$ bezeichnet, dessen Coordinaten $xyz$ unveränderlich, dessen Coordinaten $XYZ$ dagegen variabel sind, und bedeutet ferner durchwegs $u'$ den ersten und $u''$ den zweiten Differentialquotienten der beliebigen Function $u$ nach der Zeit $t$, so ist

$$\left.\begin{aligned} v_X &= X' = x_X v_x + y_X v_y + z_X v_z \\ v_Y &= Y' = x_Y v_x + y_Y v_y + z_Y v_z \\ v_Z &= Z' = x_Z v_x + y_Z v_y + z_Z v_z \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= x_X X' + x_Y Y' + x_Z Z' \\ v_y &= y_X X' + y_Y Y' + y_Z Z' \\ v_z &= z_X X' + z_Y Y' + z_Z Z' \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

und wenn $pqr$ die zu $xyz$ parallelen Componenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit $\omega$ zur Zeit $t$ bedeuten, so ist

$$\left.\begin{aligned} p &= z_X y'_X + z_Y y'_Y + z_Z y'_Z = -(y_X z'_X + y_Y z'_Y + y_Z z'_Z) \\ q &= x_X z'_X + x_Y z'_Y + x_Z z'_Z = -(z_X x'_X + z_Y x'_Y + z_Z x'_Z) \\ r &= y_X x'_X + y_Y x'_Y + y_Z x'_Z = -(x_X y'_X + x_Y y'_Y + x_Z y'_Z) \end{aligned}\right\}. \quad (38)$$

Substituirt man in den Ausdruck $x'_X X' + x'_Y Y' + x'_Z Z'$ die Werthe aus (36), so findet man demnach

$$x'_X X' + x'_Y Y' + x'_Z Z' = r v_y - q v_z \tag{39}$$

Substituirt man dagegen den durch Differentiation von $X = x_X x + y_X y + z_X z$ sich ergebenden Werth $X' = x'_X x + y'_X y + z'_X z$ und die analogen Werthe von $Y'$ und $Z'$ in die Gleichungen (37), so ergeben sich bei Anwendung derselben Relationen (38) die bekannten Gleichungen

$$v_x = qz - ry,\ v_y = rx - pz,\ v_z = py - qx. \tag{40}$$

Durch Differentiation der Gleichung (37) findet man, wenn man aus (39) den Werth einsetzt

$$v'_x = (x_X X'' + x_Y Y'' + x_Z Z'') + r v_y - q v_z.$$

Die eingeklammerte Summe bedeutet aber die $x$-Componente der Beschleunigung des Punktes $m$. Sind sonach $P_x P_y P_z$ die zu den Axen $xyz$ parallelen Componenten der Resultanten sämmtlicher Kräfte, die auf den Punkt $m$ einwirken, so ist $P_x = m[v'_x + q v_z - r v_y]$ oder zufolge (40)

$$\left.\begin{aligned} P_x &= m[q'z - r'y - (q^2+r^2)x + pqy + prz] \\ P_y &= m[r'x - p'z + qpx - (r^2+p^2)y + qrz] \\ P_z &= m[p'y - q'x + rpx + rqy - (p^2+q^2)z] \end{aligned}\right\}. \tag{41}$$

Bildet man demnach die Summen $\mathrm{M}_x = \Sigma(yP_z - zP_y)$, $\mathrm{M}_y = \Sigma(zP_x - xP_z)$, $\mathrm{M}_z = \Sigma(xP_y - yP_x)$ für sämmtliche Punkte des Körpers, wobei $\mathrm{M}_x \mathrm{M}_y \mathrm{M}_z$ die Componenten des resultirenden Drehungsmomentes des Systems sämmtlicher auf das starre Punktsystem einwirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf den fixen Punkt $O$ oder, was dasselbe besagt, die Summen der Drehungsmomente sämmtlicher äusseren Kräfte in Bezug auf die Axen $xyz$ bedeuten, so findet man, wenn man die Bezeichnung (9) beibehält,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}_x &= [a_{11}p' + a_{21}q' + a_{31}r'] + [q(a_{13}p + a_{23}q + a_{33}r) - \\ &\qquad - r(a_{12}p + a_{22}q + a_{32}r)] \\ \mathrm{M}_y &= [a_{12}p' + a_{22}q' + a_{32}r'] + [r(a_{11}p + a_{21}q + a_{31}r) - \\ &\qquad - p(a_{13}p + a_{23}q + a_{33}r)] \\ \mathrm{M}_z &= [a_{13}p' + a_{23}q' + a_{33}r'] + [p(a_{12}p + a_{22}q + a_{32}r) - \\ &\qquad - q(a_{11}p + a_{21}q + a_{31}r)] \end{aligned}\right\}. \tag{42}$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich unmittelbar die Euler'schen Gleichungen, wenn man die Axen $xyz$ mit den Trägheitshauptaxen des Punktes $O$ identificirt. Bedeutet nun $\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$ die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit, $a$ die Momentanaxe, für deren positive Richtung die Richtungscosinus $\alpha_x \alpha_y \alpha_z$ den Gleichungen $p = \omega . \alpha_x$, $q = \omega \alpha_y$, $r = \omega \alpha_z$ genügen müssen, ist ferner durch $\beta = \sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}$ die augenblickliche Winkelbeschleunigung zur Zeit $t$, durch $b$ die Axe dieser Winkelbeschleunigung $\beta$ und durch $\beta_x \beta_y \beta_z$ die Richtungscosinus der positiven Richtung dieser Axe $b$ bezeichnet, so dass $p' = \beta . \beta_x$, $q' = \beta . \beta_y$, $r' = \beta . \beta_z$ ist, so nehmen die Gleichungen (42) durch diese Substitutionen den Gleichungen (10) zufolge die einfachere Form an:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}_x &= \beta . M_b^{(O)} \cos [x, \ M_b^{(O)}] + \omega^2 M_a^{(O)} [\alpha_y . \mu_z - \alpha_z \mu_y] \\ \mathrm{M}_y &= \beta . M_b^{(O)} \cos [y, \ M_a^{(O)}] + \omega^2 M_a^{(O)} [\alpha_z . \mu_x - \alpha_x \mu_z] \\ \mathrm{M}_z &= \beta . M_b^{(O)} \cos [z, \ M_b^{(O)}] + \bar{\omega}^2 M_a^{(O)} [\alpha_x . \mu_y - \alpha_y \mu_x] \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Sind nun $A_x A_y A_z$ die Richtungscosinus der positiven Richtung der Axe $A$ des dem Punkte $O$ entsprechenden, auf die Axe $a$ bezogenen Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$, so ist, da diese Axe $A$ auf den Richtungen $(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)$ und $(\mu_x \mu_y \mu_z)$ senkrecht steht, $A_x . \sin (a, M_a^{(O)}) = \alpha_y \mu_z - \alpha_z \mu_y$, $A_y . \sin (a, M_a^{(O)}) = \alpha_z \mu_x - \alpha_x \mu_z$ u. s. w. und $M_a^{(O)} . \sin (a, M_a^{(O)}) = D_a^{(O)}$, sonach ist den Gleichungen (43) gemäss

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}_x &= \beta . M_b^{(O)} . \cos (x, \ M_b^{(O)}) + \omega^2 D_a^{(O)} . A_x \\ \mathrm{M}_y &= \beta . M_b^{(O)} . \cos (y, \ M_b^{(O)}) + \omega^2 D_a^{(O)} . A_y \\ \mathrm{M}_z &= \beta . M_b^{(O)} . \cos (z, \ M_b^{(O)}) + \omega^2 D_a^{(O)} . A_z \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Trägt man daher in der Richtung der Axe $A$ des auf die Momentanaxe $a$ bezogenen Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$, d. i. längs der Normalen der Ebene des Deviationsmomentes die Strecke $\omega^2 . D_a^{(O)}$, ferner in der Richtung des auf die Axe $b$ der Winkelbeschleunigung $\beta$ bezogenen Massenmomentes $M_b^{(O)}$ die Strecke $\beta . M_b^{(O)}$ und in der Axenrichtung des resultirenden Drehungsmomentes $\mathrm{M}$ der äusseren Kräfte die Länge $\mathrm{M} = \sqrt{\mathrm{M}_x^2 + \mathrm{M}_y^2 + \mathrm{M}_z^2}$ auf, so ist den Gleichungen (44) gemäss $[\mathrm{M}]$ die geometrische Summe aus $[\beta . M_b^{(O)}]$ und $[\omega^2 . D_a^{(O)}]$, also

$$[\mathrm{M}] \equiv [\beta . M_b^{(O)}] + [\omega^2 D_a^{(O)}]. \quad (45)$$

Dies ist der einfachste Ausdruck des durch die Gleichungen (42) in einer minder concisen Form ausgedrückten Gesetzes.

Da aus der gegebenen Winkelgeschwindigkeit und der Lage der Momentanaxe $a$ die Richtung und Grösse des letzten geometrischen Summanden $[\omega^2 D_a^{(O)}]$, und zwar am besten, wie früher gezeigt wurde, mit Hilfe der Reciprocalfläche (15) des Trägheitsellipsoids, construirt werden kann, so lässt sich auch der Gleichung (45) gemäss durch Zusammensetzung von $[\mathrm{M}]$ mit der dem eben betrachteten Summanden $[\omega^2 D_a^{(O)}]$ entgegengesetzt gleichen geometrischen Grösse die Richtung und Grösse von $[\beta M_b^{(O)}]$ bestimmen. Bestimmt man nun weiterhin den in dieser Richtung gelegenen Radius $R_b$ des Ellipsoids (15), legt im Endpunkte desselben an die Fläche (15) die Berührungsebene, so hat die von $O$ zu dieser geführte Normale $N_b$ die positive Richtung der gesuchten Axe $b$ der Winkelbeschleunigung $\beta$ und da zufolge (18) $M_b^{(O)} = M.N_b R_b$ nunmehr bestimmbar ist, so lässt sich nun auch das Verhältniss der nunmehr bekannten Grössen $\beta M_b^{(O)} : M_b^{(O)}$, d. i. die Grösse der Winkelbeschleunigung $\beta$ leicht ermitteln. Würde man weiterhin die mit der Axe $b$ gleichgerichtete Grösse $\beta$ in zwei Componenten, deren eine in die Richtung der Momentanaxe $a$ fällt, während die zweite zu $a$ normal ist, zerlegen, so würde durch die erstere die Derivirte $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$ der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und durch die letztere das Product aus der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und der Wechselgeschwindigkeit $w$ der Momentanaxe bestimmt sein u. s. w. Findet eine Rotation um eine fixe Axe $a$ statt, so dass die Wechselgeschwindigkeit Null ist, so ist $\beta = \omega'$ und die Axe $b$ identisch mit der Axe $a$, wodurch sich die Untersuchung bedeutend vereinfacht. Wie man in diesem Falle, z. B. den Druck auf die Axe $a$, indem man $[\mathrm{M}]$ in das Moment $[\mathrm{M}_1]$, welches von dem dem Drucke auf $a$ entgegengesetzt gleichen Gegendrucke seitens der Axenlager herrührt, und dessen Axe zu $a$ senkrecht ist und in das gegebene Moment $[\mathrm{M}_2]$ der anderen äusseren Kräfte sich zerlegt denken kann, auf Grund der Gleichung (45) in sehr einfacher Weise bestimmen kann, dies bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung. Um unmittelbar aus der Gleichung (45) die zu drei orthogonalen Axen parallelen Componenten von $\mathrm{M}_1$

zu erhalten, empfiehlt es sich, die Richtung der Momentanaxe $a$ etwa zur $z$-Axe, ferner die Richtung von $[\omega^2 D_a^{(O)}]$ etwa zur $x'$-Axe zu wählen und $[\beta . M_a^{(O)}]$ in ihre $Z$-Componente $\beta . M_a^{(O)} \cos (a, M_a^{(O)} = \omega' . J_a$ und ihre $X$-Componente $\beta . M_a^{(O)} \sin [a, M_a^{(O)}] = \omega' D_a^{(O)}$ zu zerlegen.—Wirken auf einen um einen fixen Punkt drehbaren starren Körper keine äusseren Kräfte ein, so ist $\mathrm{M} = 0$, sonach ist dann der Gleichung (45) zufolge $[\beta . M_b^{(O)}] + [\omega^2 D_a^{(O)}] = 0$, wodurch ausgedrückt ist, dass in diesem Falle stets die Axe $b$ der Winkelbeschleunigung der Axe des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ entgegengesetzt gerichtet ist und die Producte $\beta M_b^{(O)}$ und $\omega^2 D_a^{(O)}$ stets einander gleich sind.

Auch die mechanische Arbeit $A_P$ und der Effect $E_P = \frac{dA_P}{dt}$ des Systems sämmtlicher äusserer Kräfte, welche auf das um den fixen Punkt $O$ drehbare unveränderliche Punktsystem einwirken, lassen sich mit Hilfe des Massenmomentes $M_a^{(O)}$, beziehungsweise $M_b^{(O)}$ oder mit Hilfe des entsprechenden Trägheitsmomentes, beziehungsweise Deviationsmomentes leicht ausdrücken. Projicirt man nämlich die Axe $[\mathrm{M}]$ des resultirenden Drehungsmomentes dieses Kräftesystems einerseits und die diesem Kräftemomente $[\mathrm{M}]$ identische geometrische Summe (45) anderseits orthogonal auf die Momentanaxe $a$ und bezeichnet durch $\mathrm{M}_a$ die so erhaltene Componente von $\mathrm{M}$, d. i. die Summe der Drehungsmomente sämmtlicher äusserer Kräfte in Bezug auf die Momentanaxe $a$, so ergibt sich, da die Projection des in die Richtung der Axe des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$ fallenden zweiten Summanden in (45) Null ist, und wenn man zugleich (22) berücksichtigt, folgende Gleichung:

$$\mathrm{M}_a = \beta . M_b^{(O)} \cos (a, M_b^{(O)}) = \beta . M_a^{(O)} . \cos (b, M_a^{(O)}). \quad (46)$$

Der Werth von $\mathrm{M}_a$ ist demgemäss auch durch das Product aus der Winkelbeschleunigung $\beta$ und aus der Summe (20) oder (26) bestimmt.

Da nun bekanntlich stets $E_P = \frac{dA_P}{dt} = \Sigma [P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z]$ ist, so findet man, wenn man die Werthe aus (40) und (41) substituirt und, wie früher, $p = \omega . \alpha_x$, $q = \omega . \alpha_y$, $r = \omega . \alpha_z$,

$p' = \beta . \beta_x$, $q' = \beta . \beta_y$, $r' = \beta . \beta_z$ setzt oder einfacher, wenn man die dem Gesammteffect $\frac{dA_P}{dt}$ gleiche Derivation $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} J_a \omega^2\right]$ der kinetischen Energie $\frac{1}{2} J_a \omega^2$ durch Differentiation der mit $\frac{\omega^2}{2}$ multiplicirten Gleichung (7) bestimmt und die Gleichung (20) und (46) beachtet,

$$E_P = \frac{dA_P}{dt} = \omega\beta . M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) = \omega\beta . M_b^{(O)} \cos(a, M_b^{(O)}) = \\ = \omega . \mathrm{M}_a. \qquad (47)$$

Der Gesammteffect $E_P$ der äusseren Kräfte wird sonach bei einem unveränderlichen, um einen fixen Punkt $O$ drehbaren Punktsystem bestimmt, indem man entweder die zur Axe $b$ der Winkelbeschleunigung parallele Componente des auf die Momentanaxe $a$ bezogenen Massenmomentes $M_a^{(O)}$ oder die zur Momentanaxe $a$ parallele Componente des auf die Axe $b$ der Winkelbeschleunigung bezogenen Massenmomentes $M_b^{(O)}$ mit dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und per Winkelbeschleunigung $\beta$ multiplicirt. Projicirt man das Massenmoment $[M_a^{(O)}]$ einerseits und die demselben gleiche, — aus seiner zur Momentanaxe $a$ parallelen und der zur letzteren normalen Componente, nämlich aus $[J_a]$ und $[D_a^{(O)}]$ gebildete — geometrische Summe anderseits orthogonal auf die Axe $b$ der Winkelbeschleunigung $\beta$, so ergibt sich die Beziehung $M_a^{(O)} \cos(b, M_a^{(O)}) = J_a \cos(b, a) + D_a^{(O)} \cos(b, D_a^{(O)})$ und in ähnlicher Weise die analoge Gleichung $M_b^{(O)} \cos(a, M_b^{(O)}) = J_b \cos(a, b) + D_b^{(O)} \cos(a, D_b^{(O)})$. Setzt man diese Werthe in (46) ein und beachtet, dass $\beta . \cos(ab)$ bekanntlich die tangentiale Componente $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$ der Winkelbeschleunigung $\beta$ bestimmt, dass ferner, wie sich leicht zeigen lässt, wenn $A$ die Richtung der Axe des Deviationsmomentes $D_a^{(O)}$, $B$ jene der Axe des Deviationsmomentes $D_b^{(O)}$ und $W$ jene der Axe der positiven Wechselgeschwindigkeit $w$ bezeichnet, $\cos(b, D_a^{(O)}) = \sin(a, b) . \cos(A, W)$ und $\cos(a, D_b^{(O)}) = \sin(a, b) . \cos(B, W)$ ist und dass schliesslich die normale Componente der Winkelbeschleunigung $\beta \sin(a, b) = w . \omega$ ist, so findet man für die

Summe der Drehungsmomente der äusseren Kräfte in Bezug auf die augenblickliche Drehungsaxe $a$ die Werthe

$$\mathrm{M}_a = \frac{d\omega}{dt} \; J_a + w \,.\, \omega \,.\, D_a^{(O)} \cos (A, W)$$

$$= \frac{d\omega}{dt} \; J_b + w \,.\, \omega \,.\, D_b^{(O)} \cos (B, W)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$, so erhält man zufolge (47) den Gesammteffect $E_P$ des einwirkenden Kräftesystems.

---

Die geometrische Bedeutung der in (46, 47) und auch früher wiederholt betrachteten Componenten $M_a^{(O)} \cos (b\, M_a^{(O)})$ des Massenmoments $M_a^{(O)}$ lässt sich leicht mit Zuhilfnahme des Trägheitsellipsoids (11) feststellen. Ist nämlich, wie früher, $A$ der Endpunkt des mit der Axe $a$ gleichgerichteten Radius $r_a$ dieser Fläche, ist ferner $B_a$ jener Punkt, in welchem die Verlängerung des mit der Axe $b$ gleichgerichteten Radius $r_b$ derselben Fläche die an diese Fläche im Punkte $A$ gelegte Berührungsebene schneidet und wird die Strecke $OB_a = b_a$ und auch der Flächeninhalt $f_{ab}$ des Dreieckes $AOB_a$ positiv oder negativ in Rechnung gezogen, je nachdem $OB_a$ mit der Axe $b$ gleich- oder entgegengesetzt gerichtet ist, so ist $M_a^{(O)} \cos (b\, M_a^{(O)}) = \dfrac{M}{r_a b_a} = \dfrac{M \sin (a\, b)}{2 f_{ab}}$, denn es bestehen, $n_a$, wie früher, das vom Mittelpunkte $O$ der Fläche (11) auf die erwähnte Berührungsebene gefällte Loth und $p_a$ die Länge der orthogonalen Projection der Strecke $OB_a$ in die Ebene des der Axe $a$ zugehörigen Devitationsmomentes bedeutet, ausser der Gleichung (13), derzufolge $M_a^{(O)} r_a\, n_a = M$ ist, offenbar folgende Beziehungen: $p_a \cos (p_a, n_a) = n_a$, $b_a \cos (b, p_a) = p_a$, $\cos (b, M_a^{(O)}) = \cos (b, n_a) = \cos (b, p_a) . \cos (p_a\, n_a)$, welche, wie dies die Multiplication dieser 4 Gleichungen lehrt, unmittelbar zu der früheren Behauptung führen. Haben $r_b$ und $a_b$ für die Axe $b$ dieselbe Bedeutung, wie $r_a\, b_a$ für die Axe $a$, so ist auch $M_a^{(O)} \cos (b, M_a^{(O)}) = M_b^{(O)} \cos (a, M_b^{(O)}) = \dfrac{M}{r_b a_b} = \dfrac{M \sin (ab)}{2 f_{ab}}$

---