

Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale

(II. Theil)

von

Max Margules.

(Mit 6 Tafeln.)

Die mannigfachen Luftbewegungen, welche in einer rotirenden, von der Kugelgestalt wenig abweichenden Schale vorkommen können, lassen sich in eine Reihe einfacher Bewegungen auflösen, wenn man annimmt: Die relative Geschwindigkeit der Luft bleibe innerhalb solcher Grenzen, dass es genügt, in den Differentialgleichungen der Bewegung nur die in Beziehung auf alle Veränderlichen linearen Glieder zu behalten. Es wird auch vorausgesetzt, dass die Temperatur constant ist, und dass die Wände der Schale sehr nahe und geschlossene Niveauflächen sind.

Die Zahl der einfachen Bewegungen, in welche jedwede aus gegebenen Anfangsbedingungen entstehende Bewegung zerfällt, ist unendlich gross. Wenn man sie jedoch classificirt und für einige Classen die Rechnung durchgeführt hat, so kann man auch die bei den übrigen Bewegungsformen eintretenden Verhältnisse einigermassen überblicken. Eine Classe — die zonale — haben wir schon im ersten Theil behandelt. Die nun folgenden wollen wir numeriren.

Die erste Classe umfasst jene Bewegungen, bei denen diametrale Punkte eines Parallelkreises gleich grosse (geo-

graphisch) entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit haben; in dem einen ist der Druck ebensoviel über dem Mittel, als in dem andern unter demselben.

In der zweiten Classe haben diametrale Punkte eines Breitenkreises gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit und gleichen Druck. In zwei Punkten aber, welche auf einem Breitenkreis um die Länge $\pi/2$ abstehen, herrschen entgegengesetzte Geschwindigkeiten, in dem einen Überdruck, in dem andern eben so grosser Minderdruck.

Ähnlich verhält es sich in der dritten Classe mit zwei Punkten, welche in der Länge um $\pi/3$ verschieden sind.

Im Allgemeinen erhält man, wenn eine der relativen Geschwindigkeit der Luft proportionale Reibung eingeführt wird, eine Lösung der Bewegungsgleichungen in folgender Form:

$$\begin{aligned} b &= e^{-\alpha t} [\cos(h\lambda + \beta t) \varphi_1(\omega) - \sin(h\lambda + \beta t) \varphi_2(\omega)] \\ c &= e^{-\alpha t} [\sin(h\lambda + \beta t) \psi_1(\omega) + \cos(h\lambda + \beta t) \psi_2(\omega)] \\ \varepsilon &= e^{-\alpha t} [\sin(h\lambda + \beta t) E_1(\omega) + \cos(h\lambda + \beta t) E_2(\omega)]. \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen sind wie im ersten Theil, t die Zeit, ω Polabstand, λ Länge (ostwärts), b meridionale Geschwindigkeit (südwärts), c zonale Geschwindigkeit (ostwärts), ε relativer Überdruck, α , β Constante; hiezu kommt noch h eine ganze positive Zahl (oder Null), welche die Classe der particulären Lösung bestimmt. $h = 0$ gehört zu der zonalen Classe.

Jede solche Lösung stellt eine Wellenbewegung dar, und zwar eine nach Osten oder nach Westen fortschreitende Welle, je nachdem β negativ oder positiv ist. Für die ruhende Kugelschale besteht kein Unterschied zwischen ostwärts und westwärts wandernden Wellen; es gibt stets zwei Lösungen, welche sich nur durch das Vorzeichen von β unterscheiden. Diese lassen sich zu einer stehenden Schwingung vereinigen. Gibt man jedoch der Schale eine geringe Rotationsgeschwindigkeit (wobei man auch ihre Gestalt so zu ändern hat, dass die Begrenzungen Niveauflächen bleiben), so gehen jene zwei Lösungen in andere über, welche sich nicht allein durch das Vorzeichen, sondern auch durch die Grösse von β , also in der Schwingungsdauer, überdies noch in der Form der Druckvertheilung und des Windsystems unterscheiden. Der Unter-

schied wächst mit der Rotationsgeschwindigkeit. Demnach gibt es auch in der rotirenden Schale keine stehenden Schwingungen ausser der zonalen Classe.

In jeder Classe gibt es wieder zwei Gruppen von Bewegungen, die paren und imparen Formen, und in jeder Gruppe unendlich viele Typen, wie man sich nach den Beispielen für $h = 0$ leicht vorstellen kann.

Für das reibungslose System der rotirenden Schale (und in allen Fällen der ruhenden Schale) vereinfachen sich die Lösungen dadurch, dass die φ_2, ψ_2, E_2 beziehungsweise den φ_1, ψ_1, E_1 proportional sind. In diesen Fällen sind die Classen durch die Zahl der Doppelmeridiane oder axialen Schnitte bestimmt, welche von jedem Breitenkreise die Theile mit Überdruck abgrenzen gegen die Theile mit Minderdruck. Also gibt es in der ersten Classe eine solche Schnittebene, welche mit der Welle wandert, in der zweiten Classe zwei senkrechte Ebenen, in der dritten Classe drei Ebenen, welche die Schale in sechs gleiche Theile trennen.

In allen diesen Fällen hat man Meridiane als Linien mittleren Druckes. Wenn nun $E(\omega)$ mehrmals durch Null hindurchgeht, so ergeben sich noch die entsprechenden Breitenkreise als Mitteldrucklinien. Ein Gebiet hohen oder niedrigen Druckes liegt in einem von Meridianen und Parallelkreisen begrenzten Viereck oder Dreieck, im einfachsten Fall in einem ganzen Sector der Schale.

Bei Annahme der Reibung werden aber für die rotirende Schale in den einfachen Wellen die Mitteldrucklinien Curven von anderer Form.

Zur Ausführung der Rechnungen dient, wie im ersten Theil, das von Laplace erfundene, von Lord Kelvin¹ erläuterte und erweiterte Verfahren.

Die Entwicklungen werden noch weitläufiger, besonders aber die Ausrechnung der Wurzeln jener Kettenbruchgleichungen, welche die Schwingungsdauern der einzelnen Wellen liefern,

Sir William Thomson: On an alleged error in Laplace's theory of tides. Phil. Mag. (4) 50 (1875), p. 227. Note on the »Oscillations of the first species« in Laplace's theory of tides, daselbst p. 279. General integration of Laplace's differential equation of tides, p. 388.

viel mühsamer, wenn man die zonale Classe verlässt. Zwischen den folgenden Classen findet man in dieser Beziehung keinen grossen Unterschied mehr.

Die langathmigen Rechnungen haben den Zweck, alle in einer rotirenden Schale von constanter Temperatur möglichen Luftbewegungen zu beschreiben, für welche die linearen Glieder der aërodynamischen Gleichungen ausreichen. Es ist darum wichtig nachzuweisen, dass die hier behandelten einfachen Bewegungen jede aus gegebenen Anfangsbedingungen abgeleitete freie Luftbewegung zusammensetzen. Der Nachweis wird dadurch geführt, dass man zunächst die in der ruhenden Schale möglichen Bewegungsformen aufsucht, das sind Wellen und stationäre Strömungen; dann zeigt, wie sich jede derselben ändert, wenn man die Schale rotiren lässt. Die Wellen der ruhenden Schale verwandeln sich dabei in solche, die der Rotationsrichtung entgegen (sehr rasch) wandern, und in Wellen, welche in der Rotationsrichtung (langsamer) fortschreiten; die stationären Bewegungen gehen auch in Wellen über, welche (sehr langsam) gegen die Rotationsrichtung sich fortpflanzen. Die letzteren werden westliche Wellen zweiter Art genannt.

Für eine Schale von der Grösse und Rotationsgeschwindigkeit der Erde besteht, wenn die Luftbewegung bei beträchtlicher Reibung stattfindet, ein sehr wichtiger Unterschied zwischen den Wellen verschiedener Art. Die östlich wandernden und die westlichen Wellen zweiter Art erlöschen bei grosser Reibung viel langsamer als die westlichen Wellen erster Art. In jenen beiden folgt die Bewegung der Buys-Ballot'schen Regel fast vollständig, in den rasch gedämpften ist sie grossentheils der Regel entgegengesetzt. Ähnlich wie in der zonalen Classe zeigt sich auch allgemein, dass bei grossen Werthen der Reibungsconstante diejenigen Bewegungen die beständigsten sind, welche überwiegend im Sinne des Druckgefälles und der genannten Regel verlaufen. Luftbewegungen anderer Art sind nicht ausgeschlossen. Dass sie auf der Erde nicht beobachtet werden, ist leicht erklärlich. Da man es hier immer mit verwickelten Bewegungen zu thun hat, welche aus der Übereinanderlagerung vieler einfachen Formen entstehen, so werden die beständigen zumeist die rasch erlöschenden Formen überdecken.

Unter den Umständen, welche darauf hinweisen, dass die Luftbewegungen auf der Erde bei sehr grosser Reibung stattfinden, ist noch einer, welchen ich hervorheben will; die Beobachtung, dass, wenn ein Druckminimum über einen Ort wandert, Windstille gleichzeitig mit dem niedrigsten Drucke eintritt. Das ist bei einer fortschreitenden Welle im reibungslosen Mittel ganz anders. Die Druckextreme treten zugleich mit dem stärksten Wind ein, und zwar bläst der Wind beim Druckmaximum in der Fortpflanzungsrichtung, beim Druckminimum entgegengesetzt.

In einer langen, geraden Röhre bewege sich die Luft in der Richtung der Axe (x -Axe) mit der Geschwindigkeit u und erleide dabei eine Reibung lu . (Man vergleiche den dritten Abschnitt des ersten Theils). Fig. 1 stellt die bekannten Verhältnisse einer im reibungslosen Mittel fortschreitenden einfachen Luftwelle dar. Die Werthe des Überdrucks als Ordinaten auf die x -Axe aufgetragen (positiv aufwärts) sind zu jeder Zeit durch eine Sinuslinie dargestellt; die kleinen Pfeile geben die Windrichtung an, die Punkte Orte stärksten Windes, die Ringe \circ Orte der Windstille, der grosse Pfeil die Fortpflanzungsrichtung.

Bei einem von Null verschiedenen Werthe des l ändern sich die Verhältnisse in dem Sinne, dass die Bewegung vorwiegend in der Richtung des Druckgefälles verläuft (während sie im reibungslosen Mittel gerade zur Hälfte mit dem Gefälle, zur Hälfte gegen dasselbe geschieht).

In Fig. 2 für gleiche Wellenlänge sieht man, dass in diesem Falle die Windstillen näher an die Orte der Druckextreme herandrücken, doch dürfen sie mit denselben nicht zusammenfallen, wenn die Welle überhaupt fortschreiten soll. Mit wachsendem Werth von l kommt es schliesslich dazu, dass die Druckvertheilung gegen das Windsystem um ein Viertel Wellenlänge verschoben ist. Von da ab sind bei der gegebenen Wellenlänge nur stehende Schwingungen möglich.

Die Bewegungsgleichung und die Continuitätsgleichung sind:

$$-c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

eine particuläre Lösung derselben:

$$\varepsilon = Ce^{-at} \sin(\beta t + ax), \quad u = -cCe^{-at} \sin(\beta t + ax + \eta)$$

(c Fortpflanzungsgeschwindigkeit im reibungslosen Mittel, α, β, a, η Constante)

$$\alpha = \frac{l}{2}, \quad \beta = \sqrt{c^2 a^2 - \frac{l^2}{4}}, \quad \sin \eta = \frac{\alpha}{ca}, \quad \cos \eta = \frac{\beta}{ca}$$

Ein anderes Beispiel, welches fortschreitende Wellen in einer ebenen Luftschicht, bei schachbrettartiger Vertheilung der Gebiete hohen und niedrigen Druckes darstellt, will ich hier anschliessen. Die Bewegungsgleichungen (u, v Geschwindigkeiten nach der x - beziehungsweise y -Axe)

$$-c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \quad -c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + lv, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

lassen diese Lösung zu:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= Ce^{-at} \sin(\beta t + ax) \cos by \\ u &= \frac{-acC}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-at} \sin(\beta t + ax + \eta) \cos by \\ v &= \frac{-bcC}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-at} \cos(\beta t + ax + \eta) \sin by \end{aligned} \right\} \left[\begin{aligned} \alpha &= \frac{l}{2}, \\ \beta &= \sqrt{c^2(a^2 + b^2) - \frac{l^2}{4}} \\ \sin \eta &= \frac{\alpha}{c\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos \eta &= \frac{\beta}{c\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \right].$$

Fig. 3 gilt für den Fall $l = 0$. Die Gebiete hohen und niedrigen Druckes sind in Rechtecke eingeschlossen, deren Seiten den mittleren Druck haben. Die Orte hohen Druckes sind durch ausgezogene Curven, die des niedrigen Druckes durch gestrichelte angedeutet. Man hat hier eine Combination fortschreitender und stehender Schwingungen, welche eine gute Analogie bietet zu den Luftbewegungen in einer ruhenden Kugelschale.

Fig. 4 gilt für einen Werth von l , welcher noch das Fortschreiten der Welle gestattet. Es ist eine Bedingung der Fortpflanzung, dass der Wind im Druckmaximum in der Richtung des Fortschreitens, im Druckminimum entgegengesetzt weht, so dass die Windstillen hinter den Druckextremen wandern.

Ogleich die Verhältnisse der relativen Bewegung in der rotirenden Schale verwickelter sind, ergibt sich auch hier, dass bei einer reibungslos fortschreitenden Welle der Wind im Druckmaximum die Richtung der Fortpflanzung hat, im Minimum die entgegengesetzte, und die Windstillen gerade in Punkten mittleren Druckes liegen; und ebenso wie in den angeführten Beispielen kommen bei grosser Reibung die Windstillen nahe an die Orte höchsten und niedrigsten Druckes heran, ohne sie ganz zu erreichen. Der Wind in diesen Orten ist dann aber sehr schwach im Vergleich mit den Winden an den Orten grossen Druckgefälles. (In Betreff der westlichen Wellen zweiter Art ist hier für das reibungslose System eine Einschränkung zu machen.)

Die erwähnte Beobachtung, dass Druckminimum und Windstille bei einer über die Erde wandernden Welle nahezu mit einander fortschreiten, hängt mit der Thatsache zusammen, dass die Luft von Orten höheren Drucks zu Orten niedrigeren Drucks im gleichen Niveau fliesst, und in beiden Beobachtungen kann man ein sicheres Merkmal dafür sehen, dass die Luftbewegung auf der Erde unter grosser Reibung stattfindet.

In der ruhenden Schale verwandelt sich bei einem gewissen Werth der Reibung jede fortschreitende Welle in zwei stehende Schwingungen. Jener Grenzwert ist durch die Schwingungsdauer des Wellentypus im reibungslosen System bestimmt.

In der rotirenden Schale gibt es dagegen (ausser der zonalen Classe) auch bei grosser Reibung nur fortschreitende Wellen. Es ist demnach sicher, dass schon die Rotation allein die Ortsveränderung der Gebiete hohen und niedrigen Druckes auf der Erde bedingt. Ausserdem können zahlreiche Umstände, welche aus den Prämissen unserer Rechnung ausgeschlossen sind, auf die Fortpflanzung Einfluss haben.

Nach Ferrel's Ansicht hat man die allgemeinen Strömungen der Atmosphäre (Passatwinde) als die wichtigste Ursache des Fortschreitens der Cyklonen anzusehen. Sie führen die Luftwirbel mit, wie ein Wasserstrom die kleinen Wirbel fortträgt, welche in ihm entstehen. Damit soll es zusammenhängen, dass die Fortpflanzungsrichtung der Gebiete niedrigen Druckes in den Tropen vorwiegend westlich, in höheren Breiten östlich ist.

Unsere Rechnung kann diese Meinung nicht genauer prüfen. Beschränkt man sich, wie es hier geschieht, auf die Glieder der Bewegungsgleichungen, welche in Beziehung auf alle Veränderlichen linear sind, so superponiren sich die Bewegungen verschiedener Art, ohne einander zu stören. Eine constante Strömung könnte unter solcher Annahme die Fortpflanzung der Wellen nicht beeinflussen. Wenn beispielsweise ein Druckminimum östlich fortschreitet, so muss der Säule über dem Orte, wo jetzt das Minimum liegt, binnen der folgenden Stunde mehr Luft zugeführt als entzogen werden, dagegen der Säule über einem östlich davon gelegenen Punkte mehr entzogen als zugeführt werden; das könnte eine stationäre Strömung nicht leisten, wenn sich ihre Geschwindigkeit zu den in der Welle vorhandenen Geschwindigkeiten addirt. Ähnlich darf man auch in den oben angeführten einfachen Beispielen eine Strömung in der Richtung des Fortschreitens oder gegen dieselbe zu den Wellenbewegungen hinzufügen, ohne an deren Fortpflanzung etwas zu ändern.

Die Bemerkung kann kein entscheidendes Argument gegen Ferrel's Ansicht sein; es wäre wohl möglich, dass man diese Meinung bestätigt findet, wenn man, wie es für die stationären Bewegungen wohl nothwendig ist, die quadratischen Glieder berücksichtigt.

6. Reibungsloses System. Wandernde Wellen in der rotirenden und in der ruhenden Schale.

Die Differentialgleichungen der relativen Bewegung reibungsloser Luft in einer rotirenden Niveauschale, welche nur wenig von der Kugelgestalt abweicht, sind

$$\left. \begin{aligned} -\frac{RT}{S} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial b}{\partial t} - 2v \cos \omega \cdot c, \\ -\frac{RT}{S} \frac{\partial \varepsilon}{\sin \omega \partial \lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t} + 2v \cos \omega \cdot b, \\ -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{1}{S \sin \omega} \left(\frac{\partial (b \sin \omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial c}{\partial \lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

bei gleicher Bezeichnung wie im ersten Theil. Es sei nur erinnert, dass die Länge λ ostwärts wachsend gezählt wird und

dass ein positives ν zu einem nach Osten rotirenden Sphäroid gehört.

Lösungen der Gleichungen (1) suchen wir in der Form:

$$\left. \begin{aligned} b &= \varphi(\omega) \cos(h\lambda + nt), & c &= \psi(\omega) \sin(h\lambda + nt), \\ \varepsilon &= E(\omega) \sin(h\lambda + nt) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

h soll Null oder eine positive ganze Zahl sein. $h = 0$ entspricht der zonalen Classe. Wenn $h = 1$, wollen wir die Bewegungen als solche erster Classe bezeichnen; wenn $h = 2$, als Bewegungen zweiter Classe u. s. f.

Die den Lösungen zugeschriebene Form stellt Wellenbewegungen dar. Ist h von Null verschieden, so hat man es mit wandernden Wellen zu thun, mit westwärts oder ostwärts fortschreitenden, je nachdem n positiv oder negativ ist.

$T = 2\pi/n$ ist die Schwingungsdauer in jedem Punkte der Schale, hT die Umlaufsdauer der Welle.

Als neue Bezeichnungen sollen noch angeführt werden:

$$q = \frac{2\nu}{n}, \quad z = \frac{n^2 S^2}{RT}$$

Diese sind mit den im ersten Theil angewandten Zeichen p und x verbunden durch die Gleichungen $q = p^{-1/2}$ und:

$$q^2 z = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = x.$$

Durch die Entwicklungen, welche aus der Annahme (2) folgen, wird man zu Kettenbruchgleichungen $F(x, q) = 0$ geführt, deren Wurzeln q die bei einem gegebenen Werth von x möglichen Schwingungsdauern bestimmen. Solcher Gleichungen hat man in jeder Classe zwei, eine für die paren Lösungen, eine andere für die imparen Lösungen. Als pare bezeichnen wir die Bewegungen, für welche der Äquator Symmetrieebene ist.

Jede der erwähnten Kettenbruchgleichungen hat unendlich viele Wurzeln q ; die dazu gehörenden Wellen sind als Typus I, II, III. der Classe h bezeichnet.

Die Bewegungsgleichungen gehen durch die Annahmen (2) über in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{RT}{nS} \frac{dE}{d\omega} &= \varphi + q \cos \omega \cdot \psi, & -\frac{RT}{nS} \frac{hE}{\sin \omega} &= q \cos \omega \cdot \varphi + \psi \\ nS \cdot \sin \omega \cdot E &+ \frac{d(\varphi \sin \omega)}{d\omega} + h\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Setzt man in die letzte dieser Gleichungen den Werth von ψ aus der zweiten ein, so erhält man:

$$E = \frac{nS}{RT} \frac{\sin \omega}{h^2 - z \sin^2 \omega} \left(\frac{d(\varphi \sin \omega)}{d\omega} - hq \cos \omega \cdot \varphi \right). \quad (A)$$

Ferner hat man aus (3):

$$\varphi = \frac{RT}{nS} \cdot \frac{\frac{dE}{d\omega} + q \cos \omega \cdot \frac{hE}{\sin \omega}}{1 - q^2 \cos^2 \omega}, \quad \psi = -\frac{RT}{nS} \cdot \frac{q \cos \omega \cdot \frac{dE}{d\omega} + \frac{hE}{\sin \omega}}{1 - q^2 \cos^2 \omega}.$$

Die Gleichung für φ kann man auch so schreiben:

$$\sin^{-hq} \omega \frac{d}{d\omega} (\sin^{hq} \omega \cdot E) = \frac{nS}{RT} (1 - q^2 + q^2 \sin^2 \omega) \cdot \varphi. \quad (B)$$

Aus (A) und (B) liesse sich φ oder E eliminiren, wodurch man eine einzige Differentialgleichung erhielte. Doch sind die Gleichungen in der angeführten Form für die Rechnung bequemer.

Es gelingt leicht, Lösungen der Gleichungen (A), (B) zu finden, wenn man setzt:

$$\varphi = \cos \omega \Sigma a_j \sin^j \omega, \quad E = \frac{nS}{RT} \Sigma A_j \sin^j \omega$$

oder

$$\varphi = \Sigma a_j \sin^j \omega, \quad E = \frac{nS}{RT} \cos \omega \Sigma \mathfrak{A}_j \sin^j \omega,$$

wobei j , mit Null beginnend, die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft. Die erste Annahme führt zu paren, die andere zu imparen Bewegungen. Es entfallen die ungeraden a_j , \mathfrak{a}_j und die geraden A_j , \mathfrak{A}_j , wenn die Classenzahl h ungerade ist, andernfalls die geraden a_j , \mathfrak{a}_j und die ungeraden A_j , \mathfrak{A}_j .

Man trennt demnach die Rechnung zweckmässigerweise in vier Theile: Pare und impare Lösungen ungerader und gerader Classen.

Pare Lösungen ungerader Classen. Setzt man die Reihen

$$\varphi = \cos \omega (a_0 + a_2 \sin^2 \omega + \dots), \quad E = \frac{nS}{RT} (A_1 \sin \omega + A_3 \sin^3 \omega + \dots)$$

in die Gleichungen (A) (B) ein, so folgen zwei Systeme von Beziehungen zwischen den Coëfficienten

$$\begin{array}{l|l} h^2 A_1 = (1-hq) a_0 & (1+hq) A_1 = (1-q^2) a_0 \\ h^2 A_3 - z A_1 = (3-hq) a_2 - (2-hq) a_0 & (3+hq) A_3 = (1-q^2) a_2 + q^2 a_0 \\ h^2 A_5 - z A_3 = (5-hq) a_4 - (4-hq) a_2 & (5+hq) A_5 = (1-q^2) a_4 + q^2 a_2 \end{array}$$

aus (A) aus (B)

und nach Elimination der A_1, A_3, \dots

$$\begin{aligned} h^2 \frac{(1-q^2) a_0}{1+hq} &= (1-hq) a_0 \\ h^2 \frac{(1-q^2) a_2 + q^2 a_0}{3+hq} - z \frac{(1-q^2) a_0}{1+hq} &= (3-hq) a_2 - (2-hq) a_0 \\ h^2 \frac{(1-q^2) a_{j+2} + q^2 a_j}{j+3+hq} - z \frac{(1-q^2) a_j + q^2 a_{j-2}}{j+1+hq} &= (j+3-hq) a_{j+2} - (j+2-hq) a_j, \\ & j = 2, 4, 6 \dots \end{aligned}$$

Wenn $h = 1$, ist die erste der Gleichungen eine Identität und a_0 bleibt unbestimmt. Für $h = 3$ ist $a_0 = 0$ und a_2 unbestimmt. Im Allgemeinen ist a_{h-1} der erste Coëfficient, welcher nicht verschwindet. Die erste nicht identische Gleichung gibt eine Relation zwischen a_{h-1} und a_{h+1} ,

$$\frac{a_{h+1}}{a_{h-1}} = \frac{(h+hq)[(h+1)(h+2)-hq] - (2+h+hq)(1-q^2)z}{2(2+2h)(h+hq)}.$$

Die folgende Gleichung enthält drei Coëfficienten $a_{h-1}, a_{h+1}, a_{h+3}$, die nächste wieder drei, deren Indices um 2 erhöht sind u. s. f. Die allgemeine Gleichung des Systems bringen wir in die Form

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{(j+3+hq)q^2z}{N_{j+1} - (j+1+hq)(j+3-h)(j+3+h) \frac{a_{j+2}}{a_j}},$$

worin

$$N_{j+1} = (j+1+hq)[(j+2)(j+3)-hq] - (j+3+hq)(1-q^2)z.$$

Ersetzt man a_{j+2}/a_j wieder durch einen Bruch, welcher aus der folgenden Gleichung des Systems berechnet ist und sich von dem vorhergehenden nur durch Erhöhung der Indices um 2 unterscheidet, setzt in diesen auf ähnliche Art den Werth für a_{j+4}/a_{j+2} ein, u. s. f., so erhält man einen unendlichen Kettenbruch.

Das Verhältniss der zwei ersten Coëfficienten ist nun gegeben durch

$$\frac{a_{h+1}}{a_{h-1}} = \frac{(h+4+hq)q^2z}{N_{h+2} - \frac{Z_{h+4}}{N_{h+4}}}$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem vorhin aus der ersten nichtidentischen Gleichung berechneten, so folgt

$$0 = N_h - \frac{Z_{h+2}}{N_{h+2}} - \frac{Z_{h+4}}{N_{h+4}} - \dots \quad (P)$$

wenn man noch die Bezeichnung einführt

$$Z_{j+3} = (j+3-h)(j+3+h)(j+1+hq)(j+5+hq)q^2z.$$

Für die erste Classe $h = 1$ hat man

$$\left. \begin{array}{l} N_1 = (1+q)(2.3-q)-(3+q)(1-q^2)z \\ N_3 = (3+q)(4.5-q)-(5+q)(1-q^2)z \\ N_5 = (5+q)(6.7-q)-(7+q)(1-q^2)z \end{array} \right\} \begin{array}{l} Z_3 = 2.4(1+q)(5+q)q^2z \\ Z_5 = 4.6(3+q)(7+q)q^2z \end{array} \quad (P_1)^1$$

Für die dritte Classe $h = 3$

$$\left. \begin{array}{l} N_3 = (3+3q)(4.5-3q)-(5+3q)(1-q^2)z \\ N_5 = (5+3q)(6.7-3q)-(7+3q)(1-q^2)z \\ N_7 = (7+3q)(8.9-3q)-(9+3q)(1-q^2)z \end{array} \right\} \begin{array}{l} Z_5 = 2.8(3+3q)(7+3q)q^2z \\ Z_7 = 4.10(5+3q)(9+3q)q^2z \end{array} \quad (P_3)$$

Ersetzt man z durch $x \cdot q^{-2}$, so erscheint (P) als die zur Bestimmung von q für einen gegebenen Werth von x dienende

¹ In N_1 und Z_3 kommt der gemeinschaftliche Factor $1+q$ vor. Die Wurzel $q = -1$ der Gleichung (P, P_1) ist für unsere Aufgabe bedeutungslos. Die Werthe N_1 und Z_3 sind nur der Symmetrie wegen nicht durch $1+q$ dividirt worden.

Gleichung. Hat man eine Wurzel q dieser Gleichung, beispielsweise für $h = 1$ gefunden, so erhält man daraus zunächst die Schwingungsdauer einer Welle erster Classe, man berechnet die Verhältnisse $a_2/a_0, a_4/a_2, \dots$ hat also φ , dann auch ψ und E , also eine particuläre Lösung der Gleichungen (3).

Pare Lösungen gerader Classen. Mit den Reihen

$$\varphi = \cos \omega (a_1 \sin \omega + a_3 \sin^3 \omega + \dots), \quad E = \frac{nS}{RT} (A_0 + A_2 \sin^2 \omega + \dots)$$

verläuft die Rechnung ganz ähnlich, wie im vorigen Falle. Nur die zonalen Bewegungen $h = 0$ erfordern eine abgesonderte Rechnung. Für alle anderen ist a_{h-1} , beziehungsweise A_h der erste Coëfficient, welcher nicht verschwindet. Das Verhältniss a_j/a_{j-2} ist durch dieselbe Gleichung wie vorhin bestimmt, nun sind für j ungerade Zahlen einzusetzen. Der Quotient der zwei ersten Coëfficienten ist wieder durch zwei Ausdrücke gegeben, voraus zur Bestimmung von Q eine Gleichung der Form (P) folgt, in welcher jetzt $h = 0, 2, 4, \dots$ zu setzen ist.

Für die zonalen Bewegungen wurde die Rechnung im ersten Theil geführt. Doch ist dort die Entwicklung von φ nach Potenzen von $\cos \omega$ vorgenommen. Mit der hier gewählten Form erhält man auch die Kettenbruchgleichung in anderer Gestalt. Dass die neue Gleichung mit (11a) des ersten Theils identisch ist, erweist sich durch die Gleichheit der Wurzeln.

Für $h = 0$ erhält man

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{2.3 - (1 - q^2)z}{2.4} = \frac{q^2 z}{4.5 - (1 - q^2)z} - \frac{4.6 q^2 z}{6.7 - (1 - q^2)z} - \dots$$

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= 2.3 - (1 - q^2)z \\ N_2 &= 4.5 - (1 - q^2)z \\ N_4 &= 6.7 - (1 - q^2)z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Z_2 &= 2.4 q^2 z \\ Z_4 &= 4.6 q^2 z \end{aligned} \quad (P_0)$$

Für die zweite, vierte. Classe lassen sich die Werthe der N und Z in (P) unmittelbar aus den vorhin für N_{j+1} und Z_{j+3} gegebenen Gleichungen berechnen.

Man hat für $h = 2$

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= (2+2q)(3 \cdot 4 - 2q) - (4+2q)(1-q^2)z \\ N_4 &= (4+2q)(5 \cdot 6 - 2q) - (6+2q)(1-q^2)z \\ N_6 &= (6+2q)(7 \cdot 8 - 2q) - (8+2q)(1-q^2)z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Z_4 &= 2 \cdot 6(2+2q)(6+2q)q^2z \\ Z_6 &= 4 \cdot 8(4+2q)(8+2q)q^2z \end{aligned} (P_2).$$

Impare Lösungen ungerader Classen. Aus den Annahmen

$$\varphi = a_0 + a_2 \sin^2 \omega + a_4 \sin^4 \omega + \dots, \quad E = \frac{nS}{RT} \cos \omega (\mathfrak{A}_1 \sin \omega + \mathfrak{A}_3 \sin^3 \omega + \dots)$$

ergeben sich die Relationen

$$\left. \begin{aligned} h^2 \mathfrak{A}_1 &= (1-hq) a_0 \\ h^2 \mathfrak{A}_3 - z \mathfrak{A}_1 &= (3-hq) a_2 \\ h^2 \mathfrak{A}_5 - z \mathfrak{A}_3 &= (5-hq) a_4 \end{aligned} \right| \begin{aligned} (1+hq) \mathfrak{A}_1 &= (1-q^2) a_0 \\ (3+hq) \mathfrak{A}_3 - (2+hq) \mathfrak{A}_1 &= (1-q^2) a_2 + q^2 a_0 \\ (5+hq) \mathfrak{A}_5 - (4+hq) \mathfrak{A}_3 &= (1-q^2) a_4 + q^2 a_2 \end{aligned}$$

aus (A) aus (B)

dann durch Elimination der a_0, a_2 . ein System von Gleichungen zwischen den Coëfficienten \mathfrak{A} .

$$\begin{aligned} (1+hq) \mathfrak{A}_1 &= (1-q^2) \frac{h^2 \mathfrak{A}_1}{1-hq} \\ (3+hq) \mathfrak{A}_3 - (2+hq) \mathfrak{A}_1 &= (1-q^2) \frac{h^2 \mathfrak{A}_3 - z \mathfrak{A}_1}{3-hq} + q^2 \frac{h^2 \mathfrak{A}_1}{1-hq} \\ (j+2+hq) \mathfrak{A}_{j+2} - (j+1+hq) \mathfrak{A}_j &= (1-q^2) \frac{h^2 \mathfrak{A}_{j+2} - z \mathfrak{A}_j}{j+2-hq} + q^2 \frac{h^2 \mathfrak{A}_j - z \mathfrak{A}_{j-2}}{j-hq} \\ & \qquad \qquad \qquad j = 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Setzt man noch

$$\mathfrak{A}_j = (j+2-hq)[j(j+1)-hq] - (j-hq)(1-q^2)z,$$

so lässt sich die letzte Gleichung so schreiben:

$$\frac{\mathfrak{A}_j}{\mathfrak{A}_{j-2}} = \frac{(j+2-hq)q^2z}{\mathfrak{A}_j - (j-hq)(j+2-h)(j+2+h) \frac{\mathfrak{A}_{j+2}}{\mathfrak{A}_j}},$$

woraus man einen Kettenbruch zur Bestimmung des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Coëfficienten \mathfrak{A} erhält.

Für $h = 1$ bleibt \mathfrak{A}_1 unbestimmt, für $h = 3$ ist $\mathfrak{A}_1 = 0$, \mathfrak{A}_3 unbestimmt. Der erste Coëfficient, welcher nicht verschwindet, ist \mathfrak{A}_h .

Die Gleichung, in welcher \mathfrak{A}_h und \mathfrak{A}_{h+2} allein vorkommen, bringt man in diese Form

$$\frac{\mathfrak{A}_{h+2}}{\mathfrak{A}_h} = \frac{(h+2-hq)[h(h+1)-hq]-(h-hq)(1-q^2)z}{2(2+2h)(h-hq)}.$$

Aus allen folgenden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{A}_{h+2}}{\mathfrak{A}_h} = \frac{(h+4-hq)q^2z}{\mathfrak{N}_{h+2} - \frac{\mathfrak{B}_{h+4}}{\mathfrak{N}_{h+4}} - \dots}$$

worin

$$\mathfrak{B}_{j+2} = (j+2-h)(j+2+h)(j-hq)(j+4-hq)q^2z.$$

Man erhält nun zur Bestimmung von q die Gleichung

$$0 = \mathfrak{N}_h - \frac{\mathfrak{B}_{h+2}}{\mathfrak{N}_{h+2}} - \frac{\mathfrak{B}_{h+4}}{\mathfrak{N}_{h+4}} - \dots \quad (J)$$

Für die erste Classe, $h = 1$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= (3-q)(1.2-q)-(1-q)(1-q^2)z \\ \mathfrak{N}_3 &= (5-q)(3.4-q)-(3-q)(1-q^2)z \\ \mathfrak{N}_5 &= (7-q)(5.6-q)-(5-q)(1-q^2)z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathfrak{B}_3 &= 2.4(1-q)(5-q)q^2z \\ \mathfrak{B}_5 &= 4.6(3-q)(7-q)q^2z \end{aligned} \quad (J_1)$$

Für die dritte Classe, $h = 3$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_3 &= (5-3q)(3.4-3q)-(3-3q)(1-q^2)z \\ \mathfrak{N}_5 &= (7-3q)(5.6-3q)-(5-3q)(1-q^2)z \\ \mathfrak{N}_7 &= (9-3q)(7.8-3q)-(7-3q)(1-q^2)z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathfrak{B}_5 &= 2 \quad 8(3-3q)(7-3q)q^2z \\ \mathfrak{B}_7 &= 4.10(5-3q)(7-3q)q^2z \end{aligned} \quad (J_3)$$

Bei den ungeraden Lösungen erhält man zuerst E und leitet daraus φ und ψ ab.

Ungerade Lösungen gerader Classen.

$$\varphi = a_1 \sin \omega + a_3 \sin^3 \omega + \dots, \quad E = \frac{nS}{RT} \cos \omega (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_2 \sin^2 \omega + \dots).$$

Die Entwicklung ist ganz ähnlich derjenigen für die ungeraden Classen, nur hat man auch hier die zonale Classe von den übrigen geraden Classen gesondert zu behandeln.

Die Gleichung (J) zur Bestimmung von q hat dieselbe Form wie zuvor.

Man erhält für zonale Bewegungen, $h = 0$, \mathfrak{A}_0 unbestimmt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_0 &= 1.2 - (1 - q^2)z \\ \mathfrak{N}_2 &= 3.4 - (1 - q^2)z & \mathfrak{B}_2 &= 2.4 q^2 z \\ \mathfrak{N}_4 &= 5.6 - (1 - q^2)z & \mathfrak{B}_4 &= 4.6 q^2 z \end{aligned} \right\} \quad (J_0)$$

für die zweite Classe, $h = 2$, $\mathfrak{A}_0 = 0$, \mathfrak{A}_2 unbestimmt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N}_2 &= (4-2q)(2.3-2q) - (2-2q)(1-q^2)z \\ \mathfrak{N}_4 &= (6-2q)(4.5-2q) - (4-2q)(1-q^2)z \\ \mathfrak{N}_6 &= (8-2q)(6.7-2q) - (6-2q)(1-q^2)z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathfrak{B}_4 &= 2.6(2-2q)(6-2q)q^2z \\ \mathfrak{B}_6 &= 4.8(4-2q)(8-2q)q^2z \end{aligned} \quad (J_2)$$

Luftbewegungen in der ruhenden Kugelschale. Die einfachen Bewegungsformen, aus denen sich jede Bewegung der Luft in einer ruhenden Schale von constanter Temperatur zusammensetzt, lassen sich, sofern sie Wellen sind, zwar aus den für die rotirende Schale geltenden Gleichungen leicht ableiten, wenn in jeder Gruppe, die aus (A) und (B) entstehenden Beziehungen benützt werden, mit dem Werthe $q = 0$. Man findet sie jedoch ebenso schnell durch directe Rechnung.

Setzt man in (1) $v = 0$, und eliminirt dann b und c , so folgt

$$\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \sin \omega \right) + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \lambda^2} - \frac{S^2}{RT} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 0.$$

Führt man ferner ein

$$\varepsilon = E(\omega, \lambda) \sin (nt + \delta), \quad \delta \text{ constant}, \quad \frac{n^2 S^2}{RT} = j(j+1),$$

so erhält man

$$\frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial E}{\partial \omega} \sin \omega \right) + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} + j(j+1)E = 0,$$

die Gleichung der Kugelflächenfunctionen; wenn man die Lösungen auf die ganze Kugelfläche zu erstrecken wünscht, nimmt man die j als ganze positive Zahlen an.

Mit dem Werthe

$$E(\omega, \lambda) = E(\omega) \sin (h\lambda + \zeta), \quad \zeta \text{ constant},$$

worin auch h wieder als ganze positive Zahl (oder Null) zu nehmen ist, geht die letzte Differentialgleichung über in

$$\frac{1}{\sin \omega} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dE}{d\omega} \sin \omega \right) - \frac{h^2 E}{\sin^2 \omega} + j(j+1)E = 0.$$

Vermöge aller Substitutionen und des Umstandes, dass eine lineare Function möglicher Lösungen wieder eine Lösung gibt, können wir schreiben

$$\varepsilon = E(\omega) \sin (h\lambda \pm nt) \quad \text{oder} \quad \varepsilon = E(\omega) \sin h\lambda \cdot \sin nt.$$

Die erste Form stellt eine ostwärts oder westwärts wandernde Welle dar, die andere eine stehende Schwingung.

Will man nicht für E oder E unmittelbar die aus den Entwicklungen der Kugelfunctionen bekannten Formen anschreiben so kann man setzen

$$\frac{RT}{nS} E(\omega) = A_0 + A_1 \sin \omega + A_2 \sin^2 \omega + \dots \quad (\text{pare Lösungen})$$

oder

$$\frac{RT}{nS} E(\omega) = \cos \omega (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \sin \omega + \mathfrak{A}_2 \sin^2 \omega + \dots) \quad (\text{impare Lösungen})$$

und von jeder dieser Reihen bleiben nur gerade oder ungerade Glieder, je nachdem die Classenzahl h gerade oder ungerade ist.

$$\begin{array}{l|l} h^2 A_0 = 0 & (1-h^2) A_1 = 0 \\ (2^2-h^2) A_2 + [j(j+1)-1.2] A_1 = 0 & (3^2-h^2) A_3 + [j(j+1)-2.3] A_1 = 0 \\ (4^2-h^2) A_4 + [j(j+1)-2.3] A_2 = 0 & (5^2-h^2) A_5 + [j(j+1)-3.4] A_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -h^2 \mathfrak{A}_0 = 0 & (1-h^2) \mathfrak{A}_1 = 0 \\ (2^2-h^2) \mathfrak{A}_2 + [j(j+1)-1.2] \mathfrak{A}_0 = 0 & (3^2-h^2) \mathfrak{A}_3 + [j(j+1)-2.3] \mathfrak{A}_1 = 0 \\ (4^2-h^2) \mathfrak{A}_4 + [j(j+1)-3.4] \mathfrak{A}_2 = 0 & (5^2-h^2) \mathfrak{A}_5 + [j(j+1)-4.5] \mathfrak{A}_3 = 0 \end{array}$$

Der erste von Null verschiedene Coëfficient ist in jedem Falle A_h , beziehungsweise \mathfrak{A}_h . Wenn h gerade ist, so muss man für die pare Lösungen auch j als gerade Zahl nehmen, bei den ungeraden zu geraden h ungerade j . Die Reihen bleiben immer

endlich und haben im ersten Fall $\frac{1}{2}(j-h)+1$, im andern Fall $\frac{1}{2}(j+1-h)$ Glieder.

Einige Lösungen, die man zum Vergleich mit den analogen für die rotierende Schale brauchen wird, will ich anführen.

Nimmt man

$$\varepsilon = \frac{nS}{RT} E(\omega) \sin(h\lambda + nt),$$

so folgt aus den Bewegungsgleichungen (1) für die ruhende Schale ($\nu = 0$)

$$b = \frac{dE}{d\omega} \cos(h\lambda + nt), \quad c = -\frac{hE}{\sin \omega} \sin(h\lambda + nt).$$

Die Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \cdot \frac{2\pi S}{\sqrt{RT}}.$$

Wellen erster Classe, $h = 1$

$$^1 j=1, \quad \varepsilon = A_1 \sin \omega \sin(\lambda + nt), \quad nS = \sqrt{1.2RT}$$

$$^2 j=3, \quad \varepsilon = A_1(\sin \omega - \frac{5}{4} \sin^3 \omega) \sin(\lambda + nt), \quad nS = \sqrt{3.4RT}$$

$$^3 j=2, \quad \varepsilon = \mathfrak{A}_1 \cos \omega \sin \omega \sin(\lambda + nt), \quad nS = \sqrt{2.3RT}$$

$$j=4, \quad \varepsilon = \mathfrak{A}_1 \cos \omega (\sin \omega - \frac{7}{4} \sin^3 \omega) \sin(\lambda + nt), \quad nS = \sqrt{4.5RT}$$

Wellen der zweiten Classe, $h = 2$

$$j=2, \quad \varepsilon = A_2 \sin^2 \omega \sin(2\lambda + nt), \quad nS = \sqrt{2.3RT}$$

$$j=4, \quad \varepsilon = A_2(\sin^2 \omega - \frac{7}{6} \sin^4 \omega) \sin(2\lambda + nt), \quad nS = \sqrt{4.5RT}$$

$$j=3, \quad \varepsilon = \mathfrak{A}_2 \cos \omega \sin^2 \omega \sin(2\lambda + nt), \quad nS = \sqrt{3.4RT}$$

$$j=5, \quad \varepsilon = \mathfrak{A}_2 \cos \omega (\sin^2 \omega - \frac{3}{2} \sin^4 \omega) \sin(2\lambda + nt), \quad nS = \sqrt{5.6RT}$$

¹ Fig. 5.

Fig. 6.

³ Fig. 7

Es hat keine Schwierigkeit, die Lösung für jeden Typus irgend einer Classe zu finden.¹ Aber die so dargestellten einfachen Bewegungen genügen nicht, um eine aus gegebenen Anfangsbedingungen entstehende Bewegung im reibungslosen System der ruhenden Schale darzustellen. Es kommen noch diejenigen Lösungen hinzu, welche zu stationären Bewegungen gehören, nämlich

$$\varepsilon = 0, \quad b = \Phi(\omega, \lambda), \quad c = \Psi(\omega, \lambda),$$

wobei Φ und Ψ nur durch die Continuitätsgleichung gebunden sind

$$\frac{\partial(\Phi \sin \omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = 0.$$

Eine der Functionen bleibt willkürlich. Wir wollen auch die stätionären Bewegungen in Classen eintheilen, indem wir setzen

$$\Phi(\omega, \lambda) = \Phi^{(0)}(\omega) + \Phi^{(1)}(\omega) \cos \lambda + \Phi_1(\omega) \sin \lambda + \Phi^{(2)}(\omega) \cos 2\lambda +$$

womit statt der willkürlichen Function zweier Veränderlichen eine Reihe willkürlicher Functionen von ω eingeführt wird.

Wenn nun Druck und Geschwindigkeit für die Zeit $t = 0$ als Functionen von ω, λ gegeben sind, so werden sich die Amplituden und Phasen der einzelnen Wellen, ferner die $\Phi(\omega)$ den Anfangsbedingungen gemäss bestimmen lassen. Obgleich man zu diesem Zwecke eine Menge von Formeln anschreiben muss, welche in der Folge keine Anwendung finden, soll doch der Weg, auf welchem die Bestimmung zu geschehen hat, deutlich bezeichnet werden.

[Der Beweis dafür, dass sich jede Luftbewegung in der rotirenden Schale aus den Elementarformen zusammensetzt, für welche die Gleichungen vorhin abgeleitet wurden, beruht auf dieser Überlegung: Jede in der rotirenden Schale mögliche Bewegung muss, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit stufenweise herabsetzt, auf eine analoge Bewegung in der ruhenden Schale übergeführt werden. Hat man also alle

Lord Rayleigh, Theorie des Schalles (Braunschweig 1880). Bd. Cap. 18.

elementaren Bewegungsformen für den Fall $\nu = 0$ gefunden, und kann man zeigen, wie sie sich ändern, wenn ν zu einem gegebenen Werth ansteigt, so ist man sicher, alle einfachen Formen beschrieben oder angedeutet zu haben, aus denen sich jedwede Bewegung in der rotirenden Schale zusammensetzen lässt.]

Wenn ε für $t = 0$ als Function von ω , λ gegeben ist, kann man es folgendermassen zerlegen

$$\varepsilon = e^{(0)}(\omega) + e^{(1)}(\omega) \cos \lambda + e_1(\omega) \sin \lambda + e^{(2)}(\omega) \cos 2\lambda + \dots$$

Ähnlich verfährt man mit den Anfangswerthen von b , c . Wären die von λ freien Glieder allein vorhanden, so entstünde eine zonale Bewegung. Aus den Gliedern, welche $\cos \lambda$ und $\sin \lambda$ enthalten, eine Bewegung erster Classe, aus den zunächst folgenden eine Bewegung zweiter Classe u. s. f.

Man wird also die einzelnen Classen gesondert behandeln können. Es sei gegeben für $t = 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= e_1(\omega) \sin \lambda + e^{(1)}(\omega) \cos \lambda, \\ b &= f_1(\omega) \sin \lambda + f^{(1)}(\omega) \cos \lambda, \quad c = g_1(\omega) \sin \lambda + g^{(1)}(\omega) \cos \lambda. \end{aligned}$$

Dann wird für jeden folgenden Theil die Druckvertheilung und die Bewegung der Luft in der ruhenden Schale dargestellt sein durch

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum (A_j \sin \xi_j + B_j \sin \zeta_j) E_j(\omega) \\ b &= \frac{RT}{S} \sum \left(\frac{A_j}{n_j} \cos \xi_j - \frac{B_j}{n_j} \cos \zeta_j \right) \frac{dE_j}{d\omega} + \Phi^{(1)}(\omega) \cos \lambda + \Phi_1(\omega) \sin \lambda \\ c &= \frac{RT}{S} \sum \left(-\frac{A_j}{n_j} \sin \xi_j + \frac{B_j}{n_j} \sin \zeta_j \right) \frac{E_j}{\sin \omega} \\ &\quad + \frac{d(\Phi_1 \sin \omega)}{d\omega} \cos \lambda - \frac{d(\Phi^{(1)} \sin \omega)}{d\omega} \sin \lambda \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\xi_j = \lambda + n_j t + \delta_j, \quad \zeta_j = \lambda - n_j t + \vartheta_j.$$

Die $E_j(\omega)$ sind die zur ersten Classe gehörenden, vorhin abgeleiteten Functionen, also mit dem Factor $\sin \lambda$ oder $\cos \lambda$ versehen, Kugelflächenfunctionen.

Zur Bestimmung der Constanten A_j , B_j , δ_j , ϑ_j und der Functionen $\Phi^{(1)}$, Φ_1 dienen sechs Gleichungen, von denen wir nur drei notiren

$$e_1(\omega) = \sum (A_j \cos \delta_j + B_j \cos \vartheta_j) E_j(\omega)$$

$$f_1(\omega) = \frac{RT}{S} \sum \left(-\frac{A_j}{n_j} \sin \delta_j + \frac{B_j}{n_j} \sin \vartheta_j \right) \frac{dE_j}{d\omega} + \Phi_1(\omega)$$

$$g_1(\omega) = \frac{RT}{S} \sum \left(-\frac{A_j}{n_j} \cos \delta_j + \frac{B_j}{n_j} \cos \vartheta_j \right) \frac{E_j}{\sin \omega} - \frac{d(\Phi^{(1)} \sin \omega)}{d\omega}$$

Man hat vier unendliche Reihen von Constanten und zwei willkürliche Functionen zur Darstellung der sechs gegebenen Functionen von ω . Φ_1 und $\Phi^{(1)}$ kann man noch in eine Summe von Functionen zerlegen, welche aus Kugelfunctionen so abgeleitet sind, wie die Werthe $dE_j/d\omega$, d. h. man kann die stationären Bewegungen der ersten Classe nach Typen zerlegen, statt der zwei willkürlichen Functionen unendlich viele Functionen von gegebener Form, jedoch mit zwei Reihen unbestimmter Constanten einführen und danach die Bestimmung aller Constanten mittels des Laplace'schen Verfahrens durchführen.

In ganz gleicher Weise ist die Aufgabe für die zweite und jede folgende Classe, also auch für den allgemeinsten Fall, zu lösen.

Die Figuren 5, 6, 7, 8 stellen Bewegungen der ersten Classe in der ruhenden Kugelschale dar, wobei die Kugel in Mercator's Projection gezeichnet ist. Die drei ersten gelten für westwärts wandernde Wellen. Man braucht nur das Blatt von oben nach unten zu kehren, um die entsprechenden Figuren für ostwärts fortschreitende Wellen zu sehen. Die Curven Fig. 5, 6, 7 stellen Linien gleichen Druckes dar; die beigeschriebenen Zahlen geben den Druck $p_0(1 + \varepsilon)$ an, wenn der mittlere Druck p_0 mit 1000 bezeichnet ist. Die kleinen Pfeile bezeichnen die Windrichtung, die daneben eingeklammerten Zahlen die Windgeschwindigkeit ($m \cdot sec^{-1}$). Die unten angeführte Umlaufsdauer gilt für eine Schale von der Grösse der Erde und für trockene Luft von der absoluten Temperatur 273°

Die Curven in Fig. 8, welche eine stationäre Bewegung bei constantem Druck darstellt, sind Strömungslinien.

7. Reibungsloses System. Beispiele von Wellen erster und zweiter Classe in der rotirenden Schale.

Wir wollen zunächst die paren Lösungen der ersten Classe für Sphäroide von verschiedener Rotationsgeschwindigkeit ν berechnen und die Rechnung an diejenige für die ruhende Schale anschliessen. Der mittlere Radius der Schale S , die Gasconstante R und die Temperatur T sollen in allen Fällen gleich angenommen werden, nur ν bestimmt den Werth von κ . Für die folgenden Beispiele ist

$$2\pi S = 4 \cdot 10^7 \text{ m} \quad RT = 287.273 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2}$$

gesetzt.

Die erste Aufgabe ist die Berechnung der Wurzeln q, z aus der Gleichung (P) mit den Werthen (P_1). Für die ruhende Schale $q = 0$ wurde gefunden $z = 1.2$ Typus I, $z = 3.4$ Typus II,. Geht man zu einer langsam rotirenden Schale über, so wird man eine sehr wenig verschiedene Umlaufdauer der Welle, also einen wenig veränderten Werth von $z = n^2 S^2 / (RT)$ bei einem kleinen Werth von q zu erwarten haben. Man kann zuerst für den Typus I zu einem kleinen q den zugehörigen Werth von κ aus (P, P_1) in der Nähe von 2 durch Versuche finden, für den Typus II in der Nähe von 12. Oder man kann sich auch eines Näherungsverfahrens bedienen, ähnlich dem im ersten Theil beschriebenen. (Genauere Angaben über das Näherungsverfahren im folgenden Abschnitt.) — Da S, R, T gegeben sind, so bestimmen sich aus q und z die Werthe von ν und n , also die Rotationsdauer der Schale und die Umlaufdauer der Welle. Diese geben wir im folgenden immer in Stunden an.

$$\frac{1}{60.60} \frac{2\pi}{\nu} \quad \text{und} \quad h \cdot \frac{1}{60.60} \frac{2\pi}{n}.$$

Haben wir erst für einen kleinen Werth q das zugehörige z gefunden, so gehen wir stufenweise zu grösseren Werthen der Rotationsgeschwindigkeit über. So ist der Theil A) der folgenden Tabelle berechnet für positive q , also für westwärts fortschreitende Wellen der ersten Classe.

Bei allen Typen dieser westwärts wandernden Wellen nimmt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit wachsender Rotations-

geschwindigkeit der Schale zu. Es ändert sich aber nicht nur die Umlaufsdauer der Welle, sondern auch die Druckvertheilung und das Windsystem mit dem Werthe von ν . Das System, welches für die ruhende Schale eine einfache Bewegungsform, eine unveränderliche fortschreitende Welle darstellt, ist für eine rotirende Schale schon eine sehr complicirte Form, welche in eine unendliche Zahl von Wellen zerfällt, deren jede mit einer anderen Geschwindigkeit wandert.

Sehr auffallend tritt dies hervor, wenn man die allereinfachste Welle Typus I par der ersten Classe verfolgt von $\nu = 0$ bis zu dem Werthe ν , welcher einer Rotationsdauer der Schale von 24 Stunden angehört. In der ruhenden Schale ist die Welle so beschaffen, dass zu jeder Zeit auf einer Halbkugel der Druck über dem Mittelwerth, auf der andern unter demselben liegt; es gibt nur ein Druckmaximum und ein Minimum und die Extreme fallen in diametrale Punkte des Äquators. In einer langsam rotirenden Schale wird die Druckvertheilung noch nicht viel geändert, aber wenn ν zu dem angeführten Werthe gewachsen ist, hat $E(\omega)$ ein Maximum und zwei Minima; auf jener Sphäroidhälfte, wo am Äquator der Druck über dem Mittel ist, haben die höheren Breiten Druck unter dem Mittel. Die Parallelkreise von 47° Breite sind Linien mittleren Druckes. Betrachtet man die Fig. 9, so möchte man meinen, dass sie eine Bewegung vom Typus II darstellt.

Um in jedem einzelnen Falle die Form der Wellen und das Windsystem kennen zu lernen, muss man die Formeln für φ , ψ , E ausrechnen, dann die Zahlenwerthe dieser Grössen für mehrere ω , schliesslich b , c , ε für mehrere Werthepaare ω , λ .

Ebenso wie die positiven q für die westwärts fortschreitenden Wellen rechnet man die negativen Wurzeln q , welche für ostwärts wandernde Wellen gelten, zu einem gegebenen Werthe von \varkappa aus der Gleichung (P, P_1) . (Man vergleiche Theil B) der Tabelle.)

Innerhalb der Grenzen der Tabelle nimmt die Umlaufsdauer dieser Wellen Typus I mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit zu. Es scheint, dass in allen Typen der östlichen Wellen die Umlaufsdauer anfangs (bei kleinem \varkappa) zunimmt, dann wieder abnimmt. Im zweiten Typus tritt dies deutlicher hervor.

Pare Wellen erster Classe.¹

Rotations- dauer der Schale (Stunden)	A) Westwärts wandernde Wellen erster Art			B) Ostwärts wandernde Wellen			C) Westwärts wandernde Wellen zweiter Art			
	$q = \frac{2v}{n}$	$z = \frac{n^2 S^2}{RT}$	Umlauf- dauer der Welle (Stunden)	q		Umlauf- dauer der Welle (Stunden)	q		Umlauf- dauer der Welle (Stunden)	
Typus I.										
0	∞	0	2·000	28·07	0	2·000	28·07	6·000	0	∞
0·1	251·0	0·2107	2·2504	26·45	-0·2356	1·802	29·57	6·055	0·002728	760·0
0·2	177·5	0·2902	2·375	25·76	-0·3395	1·735	30·13			
1·0	79·38	0·574	3·035	22·78	-0·812	1·517	32·23			
1·905	57·52							7·000	0·03887	201·3
2·0	56·13	0·737	3·682	20·68	-1·191	1·410	33·43			
5·0	35·50	0·965	5·369	17·13	-1·985	1·269	35·23			
10·0	25·10	1·135	7·76	14·25						
10·94	24·00	1·156	8·187	13·87 ²	-3·047	1·178	36·57 ³	10·89	0·09225	130·7 ⁴
13·06	21·97	1·200	9·07	13·18						

Typus II.

0	∞	0	12·000	11·46	0	12·000	11·46	20·00	0	∞
0·1	251·0	0·09075	12·142	11·39	-0·09149	11·947	11·48			
1·0	79·38	0·280	12·75	11·12	-0·2872	12·124	11·40			
5·0	35·50	0·575	15·10	10·21	-0·613	13·3	10·88			
10·94	24·00	0·7686	18·52	9·22	-0·8518	15·09	10·22	25·79	0·01645	309·5

Typus III.

0	∞	0	30·0	7·25	0	30·0	7·25	42·0	0	∞
10·94	24·00	0·553	35·8	6·63	-0·564	34·4	6·77	47·68	0·004812	572·2

¹ q, z Wurzelpaare der Gleichung (P, P_1) ² Fig. 9.³ Fig. 10.⁴ Fig. 11.

Bei sehr geringer Rotationsgeschwindigkeit der Schale wird die Form der Wellen nur sehr wenig von derjenigen in der ruhenden Schale verschieden. Man darf erwarten, dass die der Rotationsrichtung entgegen wandernden Wellen eine kleinere, die in der Rotationsrichtung fortschreitenden eine grössere Umlaufsdauer haben. Könnte die Welle Typus I in einer Schale von der Rotationsdauer 251 Stunden noch die gleiche absolute Umlaufsdauer behalten wie bei $\nu = 0$, nämlich 28·07 Stunden, so wäre die relative Umlaufsdauer der westwärts wandernden Welle 25·25, die der ostwärts wandernden 31·60 Stunden. Statt dessen findet man 26·45 und 29·57 Stunden.

Wenn ν zu grösseren Werthen anwächst, so wird die Form der Welle eine ganz andere, und es lässt sich ohne Berechnung der Wurzeln q auch nicht annäherungsweise voraussehen, wie sich die Umlaufsdauer ändert.

Für einen gegebenen Werth von α ist bei negativem q das zum Typus I gehörende q die absolut grösste Wurzel der Gleichung (P, P_1) . Für $\alpha = 10\cdot94$ ist es $q = -3\cdot047$. Man kann mit dem α unendlich viele kleinere q finden, die zu den folgenden Typen parer östlicher Wellen gehören, aber kein grösseres negatives q . Anders bei den positiven q . Hier ist bei $\alpha = 10\cdot94$ das dem Typus I angehörende $q = 1\cdot156$ nicht die grösste Wurzel von (P, P_1) , sondern es gibt noch unendlich viele grössere, so $q = 10\cdot89, 25\cdot79, 47\cdot68, \dots$. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Wurzeln zu Wellen gehören, welche aus den stationären Bewegungen der ruhenden Schale hervorgehen. Wir wollen sie als westwärts wandernde Wellen zweiter Art bezeichnen.

Könnte eine solche Welle Typus I in der Schale von der Rotationsdauer 251 Stunden dieselbe absolute Umlaufsdauer haben wie die analoge Bewegung in der ruhenden Schale, nämlich eine unendlich grosse, so wäre die relative Umlaufsdauer 251 Stunden. Man findet sie jedoch dreimal so gross. Diese Wellen unterscheiden sich von den übrigen nicht allein durch die sehr grosse Umlaufsdauer, sondern auch durch die Art, wie sich diese Dauer mit dem Typus ändert. Während alle anderen Wellen desto schneller fortschreiten, je höher bei

gegebener Classe der Typus (d. h. je grösser die Zahl der Mittel-drucklinien, welche mit Breitekreisen zusammenfallen), verhalten sich die Wellen zweiter Art umgekehrt.

Zur Auffindung der vollständigen paren Lösungen erster Classe der Gleichungen (1), beziehungsweise der Gleichungen (3), dienen, wenn die zu α gehörenden q bekannt sind, die Formeln

$$\varphi = \cos \omega (a_0 + a_2 \sin^2 \omega + \dots), \quad \psi = \alpha_0 + \alpha_2 \sin^2 \omega + \dots,$$

$$E = \frac{nS}{RT} (A_1 \sin \omega + A_3 \sin^3 \omega + \dots), \quad a_0 \text{ willkürlich,}$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{(\bar{5}+q)\alpha}{N_3 - \frac{Z_3}{N_5} - \dots}, \quad \frac{a_4}{a_2} = \frac{(7+q)\alpha}{N_5 - \frac{Z_7}{N_7} - \dots}, \quad \dots [N, Z \text{ aus } (P_1)]$$

$$\alpha_0 = -a_0, \quad \alpha_2 = -\frac{3q(a_2 - a_0) + a_2}{3+q}, \quad \alpha_4 = -\frac{\bar{5}q(a_4 - a_2) + a_4}{\bar{5}+q}, \dots \quad (P_1)$$

$$A_1 = \frac{(1-q^2)a_0}{1+q}, \quad A_3 = \frac{(1-q^2)a_2 + q^2 a_0}{3+q}, \quad A_5 = \frac{(1-q^2)a_4 + q^2 a_2}{\bar{5}+q}$$

Danach kann man für alle Fälle, in denen vorhin q angegeben wurde, die Druckvertheilung und das Windsystem berechnen. Sowohl die Anführung der φ, ψ, E für viele Einzelfälle, als auch deren Zusammenstellung in tabellarischer Form würde zu grossen Raum einnehmen. Ich habe es darum vorgezogen, durch graphische Darstellung einige Formen der Wellen vorzuführen.

Die Figuren 9, 10, 11 stellen die paren Wellen erster Classe Typus I in einer reibungslosen Schale von der Rotationsdauer 24 Stunden dar. Man vergleiche sie mit den analogen Figuren 5 und 8, welche die entsprechenden Bewegungen in der ruhenden Schale darstellen.

Nur in einem Fall halte ich es für nützlich, die Formeln vollständig hierherzusetzen, damit die Änderung der Lösungen anschaulich werde, welche eintritt, wenn man von der ruhenden Schale zu einer sehr langsam rotirenden übergeht. In den folgenden Formeln sind die drei Arten von Wellen Typus I der ersten Classe par für $\alpha=0$ und $\alpha=0.1$ nebeneinander gestellt.

Pare Wellen erster Classe Typus I in der ruhenden Schale und in einer Schale von der Rotationsdauer 251 Stunden.

Westliche Wellen erster Art.

$$z = 0, \quad \varphi = a_0 \cos \omega, \quad \psi = -a_0, \quad 10^3 E = a_0 \cdot 5 \cdot 052 \sin \omega, \quad T = 28 \cdot 07 \text{ St.}$$

$$z = 0 \cdot 1 \left\{ \begin{array}{l} \varphi = a_0 \cos \omega (1 + 0 \cdot 010012 \sin^2 \omega + 0 \cdot 000036 \sin^4 \omega), \\ \psi = a_0 (-1 + 0 \cdot 1918 \sin^2 \omega + 0 \cdot 0020 \sin^4 \omega) \\ 10^3 E = a_0 (4 \cdot 232 \sin \omega + 0 \cdot 090 \sin^3 \omega), \quad T = 26 \cdot 45 \text{ Stunden.} \end{array} \right.$$

Östliche Wellen.

$$z = 0, \quad \varphi = a_0 \cos \omega, \quad \psi = -a_0, \quad 10^3 E = -a_0 \cdot 5 \cdot 052 \sin \omega, \quad T = 28 \cdot 07 \text{ St.}$$

$$z = 0 \cdot 1 \left\{ \begin{array}{l} \varphi = a_0 \cos \omega (1 + 0 \cdot 010010 \sin^2 \omega + 0 \cdot 000036 \sin^4 \omega) \\ \psi = a_0 (-1 - 0 \cdot 2561 \sin^2 \omega - 0 \cdot 0025 \sin^4 \omega) \\ 10^3 E = -a_0 (5 \cdot 926 \sin \omega + 0 \cdot 113 \sin^3 \omega + 0 \cdot 001 \sin^5 \omega), \quad T = 29 \cdot 57 \\ \text{Stunden.} \end{array} \right.$$

Stationäre Bewegung,¹ bez. westliche Welle zweiter Art.

$$z = 0, \quad \varphi = a_0 \cos \omega, \quad \psi = a_0 (-1 + 2 \sin^2 \omega), \quad E = 0, \quad T = \infty$$

$$z = 0 \cdot 1 \left\{ \begin{array}{l} \varphi = a_0 \cos \omega (1 + 0 \cdot 008730 \sin^2 \omega + 0 \cdot 000029 \sin^4 \omega) \\ \psi = a_0 (-1 + 1 \cdot 9875 \sin^2 \omega + 0 \cdot 0238 \sin^4 \omega) \\ 10^3 E = a_0 (-0 \cdot 9432 \sin \omega + 0 \cdot 7491 \sin^3 \omega + 0 \cdot 0054 \sin^5 \omega), \quad T = 760 \cdot 0 \\ \text{Stunden.} \end{array} \right.$$

Wir haben nun eine Übersicht aller paren Bewegungen erster Classe in der rotirenden Schale. Der Überblick über die Rechnung wird noch vollständiger, wenn man in der Gleichung $(P, P_1) z$ als Function von q auffasst. Lässt man q alle positiven und negativen Werthe durchlaufen, so bilden die zugehörigen eines jeden Typus eine zusammenhängende Reihe von Werthen. Wenn man die q als Abscissen, die z des Typus I als Ordinaten aufträgt, so erhält man für die negativen und positiven q eine stetig verlaufende Curve; diese reicht von $q = -\infty$ bis etwa $q = 1 \cdot 5$ und gehört zu den östlichen und westlichen Wellen erster Art, für Schalen von jeder Rotationsgeschwindigkeit von

Null bis ∞ ; in der Nähe des angegebenen q wird z unendlich gross und geht zu einem unendlichen negativen Werth über; dann nimmt z ab, bleibt aber negativ, bis es bei $q = 6$ durch Null hindurchgeht. Für grössere q hat z durchwegs positive Werthe, welche zu den Wellen zweiter Art Typus I gehören. Ähnlich verlaufen die Curven für die anderen Typen. Die negativen z bei reellem q haben keine Bedeutung für unsere Aufgabe. Sie würden nämlich ein imaginäres v fordern.

Für impare Wellen erster Classe, Gleichung (J, J_1) habe ich nur zu Typus I die Wurzelpaare q, z berechnet, welche zu $z = 0.1$ gehören. Für die westwärts wandernde Welle erster Art $q = 0.1273, z = 6.171$, Umlaufsdauer der Welle 15.98 Stunden; für die östliche Welle $q = -0.13012, z = 5.906$, Umlaufsdauer 16.33 Stunden; für die westliche zweiter Art $q = 2.007, z = 0.02483$, Umlaufsdauer 251.9 Stunden, beinahe gleich der Rotationsdauer der Schale. Auf ein im Raume festes Coordinatensystem bezogen, würde sich die letztgenannte Bewegung als nahezu stationär erweisen.

Für eine ruhende Schale ist in den entsprechenden Fällen die Umlaufsdauer 16.20 Stunden ($q = 0, z = 6$), beziehungsweise ∞ ($q = 2, z = 0$).

Die Bewegungen erster Classe sind die einzigen, bei denen Wind an den Polen anzutreffen ist. In der zonalen Classe erscheinen die Pole als Knoten, in der zweiten und in jeder folgenden Classe kann schon wegen des Umstandes, dass mehrere Richtungen am Pol gleiche Bedeutung haben, ein Wind nicht vorkommen. Nur in der ersten Classe gibt es am Pole eine einzige bevorzugte Richtung, in der Linie mittleren Druckes.

Ich habe auch für die zweite Classe pare Wellen, Gleichung (P, P_2), einige Rechnungen ausgeführt, jedoch nur für den Typus I. Beachtenswerth ist es, dass für $z = 10.94$ die westlichen Wellen erster und zweiter Art hier eine viel grössere, die ostwärts fortschreitenden beinahe gleiche Umlaufsdauer haben wie die entsprechenden Typen I der ersten Classe. Eine Welle der zweiten Classe, die westliche zweiter Art, ist in Fig. 12 dargestellt.

Pare Wellen zweiter Classe,¹ Typus I.

	Rotations- dauer der Schale (Stunden)	$q = \frac{2\gamma}{n}$	$z = \frac{n^2 S^2}{RT}$	Schwin- gungsdauer	Umlauf- dauer der Welle
				Stunden	
A) Westwärts wandernde Wellen erster Art.					
0	∞	0	6·000	16·20	32·4
0·2586	156·1	0·2	6·465	15·61	31·2
10·94	24·00	0·9944	11·06	11·94	23·9
11·13	23·79	1·0	11·13	11·90	23·8
B) Ostwärts wandernde Wellen.					
0	∞	0	6·000	16·20	32·4
0·2260	167·0	-0·2	5·651	16·70	33·4
1·318	69·15	-0·5	5·274	17·28	34·6
4·880	35·93	-1·0	4·880	17·97	35·9
10·48	24·52	-1·5	4·66	18·39	36·8
10·94	24·00	-1·535	4·643	18·42	36·8
C) Westwärts wandernde Wellen zweiter Art.					
0	∞	6·0	0	∞	∞
0·5562	106·4	6·1	0·01495	324·6	649·2
8·921	26·58	7·5	0·1586	99·67	199·3
10·94	24·00	7·811	0·1793	93·74	187·5²

¹ q, z Wurzelfaare der Gleichung (P, P_2).

Fig. 12.

8. Reibung. Erlöschende wandernde Wellen in der rotirenden Schale.

Nimmt man an, dass die Luft in der rotirenden Schale eine der relativen Geschwindigkeit proportionale Reibung erfährt, so sind die Bewegungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} -\frac{RT}{S} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} + lb - 2\gamma \cos \omega \cdot c, \\ -\frac{RT}{S} \frac{\partial \varepsilon}{\sin \omega \partial \lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t} + lc + 2\gamma \cos \omega \cdot b \\ -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{1}{S \sin \omega} \left(\frac{\partial (b \sin \omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial c}{\partial \lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Reibungsconstante l ist im dritten Abschnitt definiert. Als neue Bezeichnungen werden eingeführt ($i = \sqrt{-1}$)

$$n - li = r, \quad \frac{2\gamma}{r} = q, \quad \frac{nrS^2}{RT} = z,$$

so dass q und r für $l = 0$ dieselbe Bedeutung haben, welche ihnen im reibungslosen System gegeben wurde. Wir setzen

$$b = i e^{i(h\lambda + nt)} \varphi(\omega), \quad c = e^{i(h\lambda + nt)} \psi(\omega), \quad \varepsilon = e^{i(h\lambda + nt)} E(\omega), \quad (5)$$

worin h eine positive ganze Zahl (oder Null für zonale Bewegungen) sein soll. n, φ, ψ, E werden im Allgemeinen complexe Grössen sein; die reellen Theile von b, c, ε und die Factoren von i werden zwei Lösungen der Bewegungsgleichungen darstellen, welche sich nur in der Phase unterscheiden.

Man erhält zunächst

$$\left. \begin{aligned} \frac{RT}{rS} \frac{dE}{d\omega} &= \varphi + q \cos \omega \cdot \psi, & -\frac{RT}{rS} \frac{hE}{\sin \omega} &= q \cos \omega \cdot \varphi + \psi \\ nS \sin \omega \cdot E &+ \frac{d(\varphi \sin \omega)}{d\omega} + h\psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

daraus ebenso wie im sechsten Abschnitt zwei Beziehungen zwischen φ, E

$$E = \frac{rS}{RT} \frac{\sin \omega}{h^2 - z \sin^2 \omega} \left(\frac{d(\varphi \sin \omega)}{d\omega} - hq \cos \omega \cdot \varphi \right) \quad (A)$$

$$\sin^{-hq} \omega \frac{d}{d\omega} (\sin^{hq} \omega E) = \frac{rS}{RT} (1 - q^2 + q^2 \sin^2 \omega) \varphi. \quad (B)$$

Die weitere Rechnung wird sich zunächst von der für das reibungslose System geführten in nichts unterscheiden, als dass r in der Formel für E an Stelle von n tritt. Um die paren Lösungen ungerader Classen zu erhalten, wird man

$$\varphi = \cos \omega (a_0 + a_2 \sin^2 \omega + \dots), \quad E = \frac{rS}{RT} (A_1 \sin \omega + A_3 \sin^3 \omega + \dots)$$

zu setzen haben, wodurch man zur Gleichung (P, P_1) für die erste Classe, (P, P_3) für die dritte Classe. gelangt.

Der wesentliche Unterschied gegen den früher behandelten Fall besteht darin, dass man nicht die Wurzeln q einer der Gleichungen (P) oder (J) unmittelbar zu einem gegebenen Werth von z suchen kann.

Führt man die Bezeichnungen ein

$$q = X e^{zi}, \quad z = Z e^{zi}, \quad \frac{n}{2\nu} = \frac{\beta + zi}{2\nu} = N e^{i}$$

($X, Z, N, z, \beta, \gamma, \xi, \zeta$ reell), so wird

$$\begin{aligned} \frac{r}{2\nu} &= \frac{l}{q} = X^{-1} e^{-zi} = \frac{\beta + (z-l)i}{2\nu} \\ z &= \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = \frac{2\nu}{n} qz = \frac{XZ}{N} e^{(\xi + \zeta - \gamma)i}. \end{aligned}$$

Da z reell sein muss, so folgt $\xi + \zeta - \gamma = 0$. Man hat ferner

$$X^{-1} \cos \xi = N \cos \gamma = \frac{\beta}{2\nu}, \quad X^{-1} \sin \xi = \frac{l - z}{2\nu}, \quad N \sin \gamma = \frac{z}{2\nu}$$

Ist ein Werthpaar q, z gefunden worden, welches eine der Gleichungen (P) oder (J) erfüllt, so erhält man für z, l, β, z aus den eben abgeleiteten Beziehungen die Werthe:

$$\left. \begin{aligned} z &= X^2 Z \frac{\cos(\xi + \zeta)}{\cos \xi}, \quad \frac{l}{2\nu} = X^{-1} \frac{\sin(2\xi + \zeta)}{\cos(\xi + \zeta)} \\ \frac{\beta}{2\nu} &= X^{-1} \cos \xi, \quad \frac{z}{2\nu} = X^{-1} \cos \xi \tan(\xi + \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

[Diese ersetzen den geänderten Bezeichnungen gemäss die Gleichungen (29) des ersten Theiles.] Jedes Werthpaar, welches zu einem positiven z führt, liefert eine brauchbare Lösung. Man

kann aber nicht errathen, wie q zu wählen ist, damit es sammt dem zugehörigen eine Lösung mit gegebenen Werthen α, l herbeiführe. Es müssten also für jede der Gleichungen (P) oder (J) sehr umfangreiche Tabellen der Wurzelpaare gerechnet werden, aus denen man diejenigen, welche man braucht, heraus-suchen könnte.

Die Aufgabe fordert, dass l positiv sei. Hätte man ein Paar q , gefunden, welches zu einem positiven α , aber zu negativem l führt, so könnte man daraus unmittelbar eine Lösung für das-selbe α und ein positives l ableiten durch Umkehrung der Vor-zeichen von ξ und ν . Da in den Gleichungen (P), (J) ausser q und α nur reelle Grössen vorkommen, so müssen $Xe^{-\beta i}$ und $Ze^{-\beta i}$ ein Wurzelpaar sein, wenn $Xe^{\beta i}$ und $Ze^{\beta i}$ eines sind.

Während mit ξ, ν auch l, α das Zeichen ändern, bleiben α und β ungeändert.

Die Berechnung von ψ, E wird ebenso wie bei reellen Wurzeln zu geschehen haben. Hat man beispielsweise ein complexes Wurzelpaar q, z der Gleichung (P, P_1) gefunden, so lässt sich daraus eine particuläre Lösung der Gleichungen (4), beziehungsweise (6) ableiten, mittels der Formeln:

$$\varphi = \cos \omega (a_0 + a_2 \sin^2 \omega + \dots)$$

$$a_0 \text{ willkürlich, } \frac{a_2}{a_0} = \frac{(\bar{5} + q) q^2 z}{N_3 - \frac{Z_5}{N_5} - \dots}, \frac{a_4}{a_2} = \frac{(7 + q) q^2 z}{N_5 - \frac{Z_7}{N_7} - \dots},$$

wobei die Werthe N, Z aus (P_1) zu entnehmen sind. Für die Berechnung von ψ und E ist auch ganz ähnlich wie bei den Lösungen für das reibungslose System zu verfahren. Die Coëfficien-ten α und A bestimmen sich aus (p_1), und der gemeinsame Factor der A ist $rS/(RT)$.

Setzt man schliesslich

$$\varphi = \varphi_1(\omega) + i \varphi_2(\omega), \quad \psi = \psi_1 + i \psi_2, \quad E = E_1 + i E_2$$

und nimmt in den Gleichungen (5) den Factor von i als Lösung, so folgt

$$\left. \begin{aligned} b &= e^{-\alpha t} [\varphi_1 \cos (h\lambda + \beta t) - \varphi_2 \sin (h\lambda + \beta t)] \\ c &= e^{-\alpha t} [\psi_1 \sin (h\lambda + \beta t) + \psi_2 \cos (h\lambda + \beta t)] \\ \varepsilon &= e^{-\alpha t} [E_1 \sin (h\lambda + \beta t) + E_2 \cos (h\lambda + \beta t)] \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Wenn $l = 0$, verschwinden α und φ_2, ψ_2, E_2 ; die Form der Lösung geht in diejenige über, welche für das reibungslose System in der Gleichung (2) angenommen wurde.

Man erhält als particuläre Lösungen der Bewegungsgleichungen (4) erlöschende Wellen. Es liesse sich zeigen, dass jede in der rotirenden Schale aus gegebenen Anfangsbedingungen entstehende Luftbewegung, wenn eine der relativen Geschwindigkeit proportionale Reibung angenommen wird, sich aus solchen Wellen zusammensetzt. Der Nachweis ist ebenso wie für das reibungslose System im Anschluss an den analogen Beweis für die ruhende Schale zu führen.

Das Näherungsverfahren, dessen ich mich bediene, um zusammengehörnde Werthe von q, z zu finden, will ich für die Gleichung (P, P_1) anführen und wähle zu diesem Zweck die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} w_1 &= (1+q)(2.3-q), & w_2 &= (3+q)(1-q^2), \\ w_3 &= 2.4(1+q)(5+q)q^2 \\ w_4 &= (3+q)(4.5-q), & w_5 &= (5+q)(1-q^2) + \frac{4.6(3+q)(7+q)}{M} q^2, \\ M &= N_5 - \frac{Z_7}{N_7} - \frac{Z_9}{N_9} - \end{aligned}$$

Die Gleichung (P, P_1) hat nun folgende Gestalt

$$0 = w_1 - w_2 z - \frac{w_3}{w_4 - w_5 z},$$

woraus

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_4}{w_5} + \frac{w_3}{w_2 w_5} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_4}{w_5} + \frac{w_3}{w_2 w_5} \right)^2 - \frac{w_1 w_4}{w_2 w_5}} \quad (8)$$

Nimmt man für q irgend einen Werth an, so sind w_1, w_2, w_3, w_4 gegeben, nur w_5 enthält in M das gesuchte z . Man muss nun errathen, in welcher Gegend die Grösse M liegt und zunächst einen angenäherten Werth M_1 dafür einsetzen, mit diesem die erste Annäherung von z , wir nennen sie $(z)_1$, aus der Gleichung (8) rechnen. Dieses $(z)_1$ setzt man in N_5, Z_7, N_7 ein und rechnet ein neues M , es sei M_2 , damit den neuen Werth w_5 und einen

ändern Werth von z , die zweite Annäherung (z)₂ u. s. f., bis der Unterschied zweier aufeinanderfolgender Näherungswerthe den gewünschten Grad der Genauigkeit anzeigt.

In den meisten Fällen hätte man mit complexem q auf diese Art sehr langwierige Rechnungen auszuführen, wenn der erste Werth von M zu weit vom wahren entfernt ist. Ich verfare am liebsten so: Für ein reelles $q = X$ habe ich das zugehörige z schon gefunden, nun gehe ich zu einem $q = Xe^{\xi i}$ über, nehme ξ zuerst sehr klein an, z. B. $\text{arc } 5^\circ$ es wird dann auch M nur wenig von dem Werth abweichen, den es für Xe^{0i} hatte. Man kann jenen reellen Werth als ersten Näherungswerth M_1 einsetzen, die Rechnung ausführen und kommt so meistens schon bei der zweiten Approximation zu dem richtigen oder ausreichend genauen M . Will man jetzt z für denselben Modul von q und für ein grösseres ξ rechnen, so kann man wieder einen angenäherten Werth M einsetzen, durch die Annahme, es ändere sich M von $\xi = 5^\circ$ bis $\xi = 10^\circ$ auf ähnliche Art wie zwischen $\xi = 0^\circ$ und $\xi = 5^\circ$. Dadurch erspart man viel Zeit, aber die Berechnung der complexen Wurzelpaare ist immerhin eine sehr mühsame Arbeit.

In Betreff des Vorzeichens der Quadratwurzel in (8) kann bei solchem stufenweisen Vorgang kein Zweifel entstehen, da man bei sehr kleinem ξ dasselbe Zeichen wie bei reellem q anzuwenden hat und dann für grössere ξ ein Zeichenwechsel nur eintritt, wenn der Ausdruck unter der Wurzel durch Null hindurchgeht.

9. Reibung. Beispiele von fortschreitenden erlöschenden Wellen erster Classe.

Für westwärts fortschreitende pare Wellen erster Classe, erster Art, Typus I war bei $\kappa = 10 \cdot 94$, also für ein Sphäroid, dessen Rotationsdauer 24 Stunden beträgt, $q = 1 \cdot 156$, $z = 8 \cdot 187$ ¹ Von diesem Werthe q ausgehend setze man dann $q = 1 \cdot 156 e^{50i}$ und suche auf die vorhin auseinandergesetzte Art das zugehörige z . Dann berechne man aus den Gleichungen (7) κ , l , α , β . Man wird finden κ kleiner als $10 \cdot 94$, l , α , positiv, auch β positiv und sehr wenig von dem Werthe n verschieden, welcher

zu dem reellen q gehört. Es ist damit eine Lösung verbunden, welche eine westwärts fortschreitende erlöschende Welle darstellt für ein Sphäroid, dessen Rotationsdauer mehr als 24 Stunden beträgt. Lässt man den Modul von q ungeändert und geht zu grösseren Werthen des Argumentes über, so erhält man Lösungen, welche zu immer kleineren α , also zu langsamer rotirenden Sphäroiden gehören. Will man Lösungen für $\alpha = 10 \cdot 94$ haben, so muss man sie bei jenen $q = X e^{\frac{\alpha}{i}}$ suchen, deren Modul grösser ist als 1.156. Wir führen im Theil A) der folgenden Tabelle die Werthe von α und α , l , α , β für $X = 1 \cdot 2$ und mehrere Werthe von ξ an. Für S und RT sind dieselben Werthe, wie im 7. Abschnitt, angenommen.

Solange $\xi < \pi/2$ bleibt β positiv, man erhält westwärts wandernde Wellen. Bevor aber ξ bis $\pi/2$ anwächst, wird $\xi + \xi = \pi/2$, also $\alpha = 0$. Bei grösserem ξ würde α negativ und die Lösung bedeutungslos. Man hätte nun, um für $\alpha = 10 \cdot 94$ und für alle Werthe der Reibungsconstante $l = 0$ bis $l = \infty$ die Lösungen Typus I zu finden, zunächst für mehrere X ebensolche Rechnungen auszuführen, wie sie hier mit dem Modul 1.2 gemacht wurden. Zwischen $X = 1 \cdot 156$ und $X = 1 \cdot 2$ wird l bei $\alpha = 10 \cdot 94$ alle Werthe zwischen Null und 0.35 annehmen, die grösseren l gehören zu grösseren X . Hätte man ausführliche Tabellen der complexen Wurzelpaare, welche an die reellen Paare q, z zu Typus I anschliessen und darüber hinaus, so könnte man daraus für jedes α und jedes l die zugehörigen Werthe q , entweder direct entnehmen oder durch Interpolation leicht finden.

Ebenso wäre dann für Typus II und die höheren Typen zu verfahren. Wir müssen uns aber, weil die Rechnungen sehr viel Zeit brauchen, darauf beschränken, sie für den Typus I der ersten Classe theils durchzuführen, grösstentheils auch nur anzudeuten.

Wir gehen nun zu den ostwärts fortschreitenden Wellen über. Für diese war in der ersten Classe Typus I bei $\alpha = 10 \cdot 94$ $q = -3 \cdot 047^1 = 3 \cdot 047 e^{\pi i}$. Man wird zuerst benachbarte Werthe von X und ξ in Betracht ziehen. Würde man da ξ etwas grösser als π annehmen, so käme man zu negativem l . Wir wählen also ξ kleiner als π . Zwischen $\xi = \pi$ und $\xi = \pi/2$ bleibt β

Erlöschende pure Wellen erster Classe, Typus I.¹
(T Umlaufdauer der Welle, Θ Rotationsdauer der Schale.)

$q = Xc^{\frac{1}{2}}i$		$z = Zc^{\frac{1}{2}}i$		l				T	Θ
X		Z		(Stunde-1)				Stunden	
A) Westwärts fortschreitende Wellen erster Art.									
1·2	0°	9·07	0°	13·06	0	0	0·477	13·18	21·97
1·2	6°24'	9·172	16°58'	12·20	0·249	0·198	0·458	13·72	22·73
1·2	8° 0'	9·187	23°53'	11·34	0·335	0·274	0·440	14·28	23·57
1·2	8°30'	8·980	25°13'	10·88	0·352	0·287	0·430	14·60	24·07
B) Ostwärts fortschreitende Wellen.									
3·6	180°	1·150	0°	14·90	0	0	-0·170	37·02	20·57
3·6	170°	1 148	1°24'	14·94	0·055	0·025	-0·167	31·54	20·54
2·8	180°	1 194	0°	9·361	0	0	-0·173	36·33	25·95
2·8	170°	1·192	1°37'	9·36	0·055	0·025	-0·170	36·89	25·95
2·8	150°	1·176	4°57'	9·646	0·159	0·071	-0·152	41·32	25·56
2·8	100°	1·006	16°36'	20·34	0·339	0·088	-0·044	141·9	17·60
2·8	90°	0·944	22° 4'	∞	∞	0	0	∞	0
1·0	180°	1·445	0°	1·455	0	0	-0·191	32·91	65·81
1·0	97°	1·576	19°50'	5·837	0·472	0·092	-0·047	134·8	32·86
1·0	93°27'	1·590	21°10'	11·00	0·593	0·069	-0·032	197·0	23·93
1·0	90°	1·609	22°17'	∞	∞	0	0	∞	0
0·2	180°	1·828	0°	0·073	0	0	-0·214	29·4	293·6
0·2	91°	1·975	5°38' ₆	0·524	0·659	0·086	-0·010	628·5	109·7
0·2	90°	1·979	5°41'	$\pm \infty$	∞	0	0	∞	0
0·2	85°			(neg.)					
20·2	80°	2·013	5°47' ₇	0·034	0·487	0·346	0·025	247·2	429·3
20·2	0°	2·238	0°	0·089	0	0	0·237	26·5	265·3
C) Westwärts fortschreitende Wellen zweiter Art.									
7	0°	0·0389	0°	1·905	0	0	0·031	201·3	57·52
7	10°	0·0584	36°56'	1·984	0·039	0·033	0·031	200·3	56·36
7	20°	0·0946	42°54'	2·248	0·074	0·062	0·032	197·2	52·95
7	40°	0·1706	30°48'	3·589	0·122	0·094	0·033	191·5	41·90
7	65°50'	0·2680	4°26'	10·83	0·153	0·085	0·030	204·3	24·12
7	80°	0·3268	-12°13'	34·87	0·188	0·057	0·023	271·0	13·44

¹ q, z Wurzelpaare der Gleichung (P, P_1) .

Westwärts fortschreitende Wellen erster Art.

negativ, man erhält ostwärts wandernde Wellen. Werthe des X , welche grösser sind als $3 \cdot 047$, führen nicht zu $\alpha = 10 \cdot 94$. Wenn bei demselben X das ξ von π bis $\pi/2$ abnimmt, so wächst α bis ∞ an. Lässt man ξ noch weiter abnehmen, so springt α zu $-\infty$ über und behält in dem folgenden Intervalle negative, jedoch mit ξ abnehmende Werthe; dieses Intervall ist für unsere Aufgabe bedeutungslos. α erreicht die Null, wobei man schon eine Lösung für die ruhende Schale erhält, und steigt dann mit positiven Werthen an bis $\xi = 0$. In diesem Bereiche erhält man aber nicht ostwärts, sondern westwärts wandernde Wellen, weil β positiv ist, wenn $\xi < \pi/2$. Man vergleiche in der vorhergehenden Tabelle die zwei letzten Zeilen des Theiles B).

Man hat schliesslich noch eine westwärts wandernde Welle zweiter Art, erste Classe Typus I zu rechnen. Im reibungslosen System gehört für diesen Fall zu $\alpha = 10 \cdot 94$ der Werth $q = 10 \cdot 89$.¹ Ein gewisser Werth von q , mit einem X , das von $10 \cdot 89$ wenig verschieden ist, und sehr kleinem ξ wird eine Lösung mit demselben α und einem sehr kleinen l liefern. Man überzeugt sich durch einen Versuch, dass man, um $\alpha = 10 \cdot 94$ zu erhalten, X kleiner nehmen muss als $10 \cdot 89$ und ξ positiv. Da wir eine Lösung mit einem grossen Werth der Reibungsconstante l haben wollen, so wählen wir den Modul von q viel kleiner, $X = 7$. Mit diesem ist die Tabelle C) gerechnet. Um bei $\alpha = 10 \cdot 94$ ein noch grösseres l zu erhalten, hätte man X kleiner anzunehmen, z. B. 5. In diesem Falle beginnt bei $\xi = 0$ die Tabelle mit einem negativen α ; wenn ξ wächst, erreicht α die Null und geht dann zu positiven Werthen über.

Bei der Discussion der Lösungen für das reibungslose System, Gleichung (P, P_1) , Typus I, haben wir bemerkt, dass wenn $q = X e^{0 \circ i}$ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, die zugehörigen Lösungen sowohl die ostwärts, wie die westwärts wandernden Wellen beider Arten darstellen, und dass ein Stück zwischen $q = 1 \cdot 5$ beiläufig und $q = 6$ bedeutungslosen, weil negativen α zukommt. Würde man $q = X e^{10 \circ i}$ setzen und nun das X alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durch-

¹ Erste Tabelle C) im 7. Abschnitt.

laufen lassen, so bekäme man wieder in den entsprechenden Lösungen Wellen aller Arten, östliche für $X = -\infty$ bis nahe an $X = 0$, westliche erster Art für die nun folgenden X und westliche zweiter Art von einem Werthe ab, der etwas kleiner ist als δ , bis zum unendlichen X ; inzwischen ist wieder ein Stück mit negativem κ . (Für die östlichen Wellen, negative X , wäre das Vorzeichen von ξ zu ändern, um positive l zu erhalten.) Ebenso hätte man mit $X = e^{20^\circ i}$ zu verfahren u. s. f. bis zu $Xe^{90^\circ i}$. Man erhielte so leidlich ausreichende Tabellen für den Typus I, erste Classe parer Wellen.

Nun wäre die Rechnung für Typus II derselben Classe auszuführen, dann für höhere Typen, dann ebenso für andere Classen parer Wellen und für einige Classen imparer Wellen. Wer sich nur die Mühe nimmt, ein einziges complexes Wurzel-paar q , der Gleichung (P, P_1) zu finden, wird einsehen, dass die Berechnung ausführlicher Tabellen eine sehr zeitraubende Beschäftigung ist. Ich muss mich darauf beschränken, aus den bisher ausgeführten Rechnungen einige Folgerungen zu ziehen.

Für eine Schale, deren Rotationsdauer 24 Stunden beträgt, wollen wir zunächst den Einfluss der Reibung auf die Umlaufsdauer und auf die Abschwächung des Überdruckes sowohl als der Geschwindigkeiten betrachten.

Westliche Welle erster Art, Typus I.

$$\left. \begin{array}{l} l = 0, \\ l = 0 \cdot 352 \text{ Stunde}^{-1}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Umlaufsdauer } 13 \cdot 9 \text{ Stunden,} \\ 14 \cdot 6 \\ \text{Abschwächung in 24 Stunden } \frac{1}{983}. \end{array}$$

Östliche Welle, Typus I.

$$\left. \begin{array}{l} l = 0, \\ l = 0 \cdot 593 \text{ Stunde}^{-1}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Umlaufsdauer } 36 \cdot 6 \text{ Stunden,} \\ 197 \\ \text{Abschwächung in 24 Stunden } \frac{1}{5 \cdot 2}. \end{array}$$

Westliche Welle zweiter Art, Typus I.

$$\left. \begin{array}{l} l = 0, \\ l = 0 \cdot 153 \text{ Stunde}^{-1}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Umlaufsdauer } 130 \cdot 7 \text{ Stunden,} \\ 204 \\ \text{Abschwächung in 24 Stunden } \frac{1}{7 \cdot 7} \end{array}$$

Da die Zahlen für die drei Wellen sich nicht auf gleiche Werthe der Reibungsconstante beziehen, so muss man noch mit Hilfe der Tabelle zu errathen versuchen, wie die Änderung der Umlaufsdauer und die Abschwächung sich verhalten wird, wenn l von Null bis ∞ wächst. Man bemerkt, dass die westliche Welle erster Art eine weitaus geringere Änderung der Umlaufsdauer, dagegen eine viel grössere Abschwächung erfährt als jede der beiden anderen.

Die Zahlen in *A*), welche ohnehin für Sphäroide von wenig verschiedener Umlaufsdauer gelten, lassen erkennen, dass α mit l sehr rasch wächst. Es wird also die westliche Welle erster Art (Typus I, wie man deutlich genug sieht, und bei allen Typen, wie auch in den höheren Classen, ist derselbe Verlauf sicher zu erwarten), umso schneller erlöschen, je grösser die Reibung.

Anders die östliche Welle. Aus *B*) sieht man, dass das Verhältniss α/l immer kleiner ist als $1/2$ und dass es bei sonst gleichen oder nahe gleichen Umständen umso kleiner wird, je grösser l . Bei unendlich grosser Reibung wird α Null. In diesem Grenzfall gibt es auch keine Bewegung; die Druckvertheilung ändert sich nicht. Die Umlaufsdauer der ostwärts wandernden Wellen wird mit der Reibung sehr merklich wachsen.

Wir wollen uns hier erinnern, dass die beiden soeben besprochenen Arten von Wellen sich an Schwingungen in der ruhenden Schale anschliessen lassen, und dass man mit jedem angenommenen Werth von l eine stetige Reihe der Werthe α , β erhalten muss, wenn z von Null bis $10 \cdot 94$ oder zu einem beliebig grossen Werthe wächst. In der ruhenden Schale ist (man vergl. Abschnitt 3),

wenn

$$\frac{l}{2} < \frac{\sqrt{j(j+1)RT}}{S}, \quad \alpha = \frac{l}{2}, \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{j(j+1)RT}{S^2} - \frac{l^2}{4}};$$

dagegen wenn

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} > \frac{\sqrt{j(j+1)RT}}{S}, \quad \alpha_1 &= \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{j(j+1)RT}{S^2}}, \\ \alpha_2 &= \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{j(j+1)RT}{S^2}}, \quad \beta = 0. \end{aligned}$$

Man hat also zunächst bei kleinen Werthen der Reibung in der ruhenden Schale das constante Verhältniss $1/2$ zwischen dem Erlöschungsexponenten und dem Reibungscoefficienten. Dieses Verhältniss wird, wenn man die Schale rotiren lässt, vergrößert für jene Welle, welche der Rotationsrichtung entgegen fortschreitet, es wird kleiner für die in der Rotationsrichtung wandernde Welle.

Bei sehr grossem l hat man nur stehende Schwingungen in der ruhenden Schale, und zwar eine Art, welche sehr rasch erlischt (α_1 nahe l) und eine andere, welche um so beständiger ist, je grösser l (α_2 nahe Null). Offenbar geht in der ostwärts rotirenden Schale die erste Art in westliche Wellen, die andere in östliche über.

In der ruhenden Schale haben wir endlich noch Bewegungen mit dem Erlöschungsexponenten l gefunden (welche den stationären Bewegungen des reibungslosen Systems entsprechen und bei constantem Druck stattfinden). Diese gehen für die rotirende Schale in die westlichen Wellen zweiter Art über. Man sieht aus C), dass das Verhältniss α/l mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit der Schale abnimmt, dass also diese Wellen in der rotirenden Schale langsamer erlöschen, als die analogen Bewegungen in der ruhenden.

Betrachtet man die Figuren 9, 10, 11, welche die drei Wellen im reibungslosen System darstellen, so bemerkt man, dass zwar in allen sehr bedeutende Geschwindigkeiten gegen das Gefälle vorkommen, dass aber in Beziehung auf die Buys-Ballot'sche Regel ein auffallender Unterschied zwischen ihnen besteht. In der westlichen Welle erster Art, Fig. 9, ist die Druckvertheilung durchwegs jener Regel entgegengesetzt; die östlichen Wellen und die westlichen zweiter Art halten die Regel ein.

Vergleicht man damit die Fig. 13, 14, 15, welche analoge Wellen bei Reibung darstellen, so sieht man in Fig. 13 sowohl die Geschwindigkeiten gegen das Gefälle, als auch die Abweichung von der Buys-Ballot'schen Regel sehr deutlich, während in Fig. 14 und Fig. 15 keine merkliche Bewegung von Orten niedrigeren zu Orten höheren Druckes vorkommt, das Gebiet des Druckminimums auf der nördlichen Halbkugel links, auf der südlichen rechts von der Windrichtung liegt.

Es zeigt sich, dass jene Bewegungen, welche im reibungslosen System der rotirenden Schale der Buys-Ballot'schen Regel zuwiderlaufen, bei Reibung am schnellsten erlöschen.

Ähnlich war es auch in der zonalen Classe. Dort sind es die stehenden Schwingungen, welche bei $l = 0$ eine der Regel gerade entgegengesetzte Druckvertheilung haben, dagegen die stationären, in den Parallelkreisen verlaufenden Bewegungen, bei welchen die Regel gilt. Die aus den letzteren bei Reibung hervorgehenden Bewegungen, welche als ausfüllende bezeichnet wurden, erlöschen langsamer als die zonalen Schwingungen.

Es ist oben gesagt worden, dass in der Fig. 14 keine merkliche Bewegung gegen das Gefälle zu erkennen ist. Das bezieht sich jedoch nur auf den Maassstab, in welchem die Zeichnung hier ausgeführt ist. Im Orte des Druckmaximums muss ein (wenngleich sehr schwacher) Wind in der Fortpflanzungsrichtung der Welle herrschen, im Druckminimum ein Wind in entgegengesetzter Richtung.

Ich will dies für die östliche Welle aus den Formeln nachweisen, welche für diesen Fall aus dem Wurzelpaare $q = 1 \cdot 0 e^{93^\circ 27' i}$, $z = 1 \cdot 590 e^{21^\circ 10' i}$ der Gleichung (P, P_1) abzuleiten sind. Nimmt man $a_0 = -2$, so folgt aus der Kettenbruchentwicklung $a_2 = 0 \cdot 279 + i 0 \cdot 144$, $a_4 = -0 \cdot 010 - i 0 \cdot 014$. Man erhält schliesslich die Lösung in der Form (5'), wo $h = 1$ zu setzen ist und

$$\varphi_1(\omega) = \cos \omega (-2 \cdot 00 + 0 \cdot 28 \sin^2 \omega - 0 \cdot 01 \sin^4 \omega)$$

$$\varphi_2(\omega) = \cos \omega (0 \cdot 14 \sin^2 \omega - 0 \cdot 01 \sin^4 \omega)$$

$$\psi_1(\omega) = 2 \cdot 00 - 0 \cdot 55 \sin^2 \omega - 0 \cdot 11 \sin^4 \omega + 0 \cdot 01 \sin^6 \omega$$

$$\psi_2(\omega) = -2 \cdot 18 \sin^2 \omega + 0 \cdot 31 \sin^4 \omega - 0 \cdot 01 \sin^6 \omega$$

$$10^3 E_1(\omega) = 25 \cdot 1 \sin \omega - 1 \cdot 7 \sin^3 \omega - 0 \cdot 3 \sin^5 \omega$$

$$10^3 E_2(\omega) = 23 \cdot 6 \sin \omega - 9 \cdot 7 \sin^3 \omega + 0 \cdot 8 \sin^5 \omega$$

Für $\omega = 90^\circ$ ist

$$10^3 \varepsilon = 27 \cdot 6 e^{-at} \sin(\lambda + \beta t + 32^\circ 2), \quad b = 0,$$

$$c = 2 \cdot 31 e^{-at} \sin(\lambda + \beta t - 54^\circ 5).$$

Zur Zeit t liegt der niedrigste Druck an der Stelle $\omega = 90^\circ$
 $\lambda = 237 \cdot 8 - \beta t$, dort ist $c = -2 \cdot 31 e^{-at} \sin 3^\circ 3$, der höchste

Druck an der Stelle $\omega = 90^\circ$, $\lambda + \beta t = 57.8$, mit $c = 2.31e^{-\omega t} \sin 3^\circ 3'$. Wird der mittlere Druck mit 1000 bezeichnet, so beträgt zur Zeit $t = 0$ das Maximum 1027.6, das Minimum 972.4, im Maximum herrscht sehr schwacher Wind $0.13 (m. sec^{-1})$ ostwärts, im Minimum entgegengesetzter Wind von gleicher Geschwindigkeit. Die Orte absoluter Windstille liegen bei dieser Welle, welche mit einer Umlaufsdauer von 197 Stunden ostwärts wandert, um $3^\circ 3'$ westlich vom Druckmaximum und vom Druckminimum.

Auf der folgenden Seite findet man die Tabellen, nach denen die Fig. 13, 14, 15 für die Zeit $t = 0$ gezeichnet sind. Man vergleiche diese Figuren mit 9, 10, 11, welche für das reibungslose System gelten. Besonders fällt bei der westlichen Welle erster Art auf, wie sich die Meridiane und Parallelkreise mittleren Druckes der Fig. 9 in die Mitteldrucklinie bei Reibung zusammensetzen, so dass die im reibungslosen System getrennten drei Gebiete niedrigen Druckes in Fig. 13 vereinigt erscheinen. Bei der östlichen Welle bemerkt man, dass die in der reibungslosen Welle abgeflachten Curven gleichen Druckes sich bei Reibung derjenigen Form nähern, welche sie in der ruhenden Schale haben (Fig. 5), dass also die Druckvertheilung derjenigen nahekommt, welche durch die Kugelfunction $C \sin \omega \sin \lambda$ dargestellt ist. Eine ähnliche Bemerkung haben wir bei den ausfüllenden Bewegungen der zonalen Classe gemacht.

Bei allen Wellen Fig. 13, 14, 15 sind die Linien gleichen Druckes, besonders stark die Mitteldrucklinie und die ihr zunächstliegenden Curven nach der Richtung des Fortschreitens ausgebaucht; in den zwei ersten am Äquator, in der letzten zwischen dem Äquator und der Breite der Druckextreme.

Die gestrichelten Linien bezeichnen die Stellen, wo die zonale Geschwindigkeitscomponente verschwindet. Die punktierten Linien haben die gleiche Bedeutung für die meridionale Geschwindigkeit.

Erlöschende pare Wellen erster Classe, Typus I.

	$e^{at} \cdot 1000 \varepsilon$		$e^{at} b$		$e^{at} c$	
A) Westliche Welle erster Art. (Fig. 13.)						
$\alpha = 10 \cdot 88, l = 0 \cdot 351, \alpha = 0 \cdot 287, \beta = 0 \cdot 430$, Umlaufsdauer der Welle 14·6 Stunden, Abschwächung in 24 Stunden 1/983, ($a_0 = 8$).						
0°	0·0 sin ($\lambda + \beta t - 145^\circ$)		8·0 cos ($\lambda + \beta t + 0^\circ$)		-8·0 sin ($\lambda + \beta t + 0^\circ$)	
15°	5·0	-140°	8·3	+ 4°	-8·1	+ 5°
30°	8·1	-124°	9·0	+15°	-8·0	+ 16°
45°	8·6	- 86°	9·4	+27°	-7·5	+ 27°
60°	12·0	- 27°	8·4	+39°	-5·8	+
75°	21·0	+ 4°	5·1	+45°	-3·5	+ 30°
90°	25·8	+ 11°	0·0	+45°	-2·6	+ 20°

B) Östliche Welle. (Fig. 14.)						
$\alpha = 11 \cdot 00, l = 0 \cdot 593, \alpha = 0 \cdot 069, \beta = -0 \cdot 0316$, Umlaufsdauer 197 Stunden. Abschwächung in 24 Stunden 1/5·23, ($a_0 = -2$).						

0°	0·0 sin ($\lambda + \beta t + 43^\circ$)		-2·0 cos ($\lambda + \beta t - 0^\circ$)		2·0 sin ($\lambda + \beta t - 0^\circ$)	
15°	8·8	+ 43°	-1·9	- 0°	2·0	- 4°
30°	16·3	+ 41°	-1·7	- 1°	1·9	- 16°
45°	21·7	+ 38°	-1·3	- 2°	2·0	- 31°
60°	25·0	+ 35°	-0·9	- 3°	2·1	- 43°
75°	27·0	+ 33°	-0·5	- 5°	2·2	- 52°
90°	27·6	+ 32°	0·0	- 4°	2·3	-

C) Westliche Welle zweiter Art. (Fig. 15.)						
$\alpha = 10 \cdot 83, l = 0 \cdot 153, \alpha = 0 \cdot 085, \beta = 0 \cdot 0305$, Umlaufsdauer 204 Stunden, Abschwächung in 24 Stunden 1/7·68, ($a_0 = 7$).						

0°	0·0 sin ($\lambda + \beta t + 8^\circ$)		7·0 cos ($\lambda + \beta t + 0^\circ$)		7·0 sin ($\lambda + \beta t + 180^\circ$)	
15°	-20·3	+ 10°	6·5	+ 3°	5·0	+179°
30°	-25·6	+ 13°	5·1	+12°	1·5	+124°
45°	-21·9	+ 16°	3·4	+24°	3·7	+ 51°
60°	-14·8	+ 13°	2·1	+38°	5·0	+ 49°
75°	- 9·0	- 3°	0·9	+48°	6·4	+ 65°
90°	-	- 15°	0·0	+52°	6·5	+ 69°

Eine Bemerkung, welche sich in Betreff der westlichen Wellen erster Art aufdrängt, möchte ich noch zum Schluss anführen. In der Abhandlung »Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft« (Sitzungsber. 1890) habe ich einige Rechnungen zur Theorie der täglichen Barometerschwankung unter gewissen vereinfachenden Annahmen ausgeführt. Es ergab sich, dass in einer reibungslosen rotirenden Luftschale halbtägige Druckschwankungen von grosser Amplitude durch geringe wellenartige Anregungen derselben Periode entstehen können, beispielsweise durch halbtägige Temperaturwellen von sehr kleiner Amplitude; während ganztägige Druckwellen von gleich grosser Amplitude nur durch viel grössere Temperaturschwankungen entstehen könnten. Lord Kelvin hatte, ohne die Rechnung durchzuführen, vorausgesagt, die grosse halbtägige Barometerschwankung lasse sich nur durch die Annahme erklären, dass eine freie Welle (zweiter Classe) in der Luftschale nahezu die Schwingungsdauer von 12 Stunden hat, also eine erzwungene Welle mit dieser Periode relativ grosse Amplitude erlangt. In der citirten Abhandlung habe ich die erzwungenen Schwingungen berechnet, aber für die analogen freien Wellen sind die Rechnungen erst hier durchgeführt. Für eine reibungslose Luftschale von der Grösse und Rotationsdauer der Erde und von der absoluten Temperatur 273° hat man:

Freie Wellen erster Classe, westwärts, Umlaufsdauer $13\cdot87$, $9\cdot22$, $6\cdot63$, $130\cdot7$, $309\cdot5$, $572\cdot2$. Stunden, also diejenige, welche 24 Stunden am nächsten kommt, $13\cdot87$ Stunden (Erste Tabelle im 7. Abschnitt.)

Freie Wellen zweiter Classe, westwärts, Schwingungsdauer $11\cdot94$ Stunden für Typus I und kleinere Werthe für die höheren Typen der ersten Art, $187\cdot5$ für Typus I und grössere Werthe für die höheren Typen der zweiten Art, also die Schwingungsdauer, welche 12 Stunden am nächsten kommt, $11\cdot94$ Stunden (Zweite Tabelle im 7. Abschnitt.)

Die Umlaufsdauer aller anderen westlichen Wellen erster und zweiter Art in einer Schale, welche in 24 Stunden eine Umdrehung macht, ist in der ersten Classe weiter von 24 Stunden entfernt als $13\cdot87$. Nun haben wir gesehen, dass sich diese Dauer durch ziemlich grosse Reibung nur auf $14\cdot6$ Stunden

erhöht. Es ist wahrscheinlich, dass Ähnliches für die zweite Classe gelten wird, dass also auch bei Reibung die Schwingungsdauer einer freien westlichen Welle zweiter Classe näher bei 12 Stunden, als die einer freien Welle erster Classe bei 24 Stunden liegt. Danach würde auch bei Reibung die halbtägige erzwungene Druckschwankung eine relativ grössere Amplitude haben als die ganztägige.

Die Rechnung für erzwungene Wellen bei Reibung ist für die rotirende Luftschale viel leichter zu führen, als diejenige für freie Wellen, weil man den mühsamsten Theil, die Aufsuchung der Periode, erspart. Eine ausführliche Behandlung dieser Aufgabe wird in einer künftigen Mittheilung erfolgen.

Fig. 1.

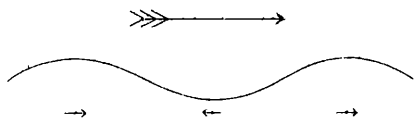


Fig. 2.

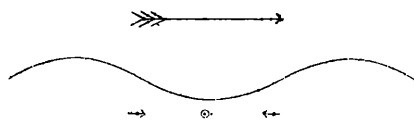
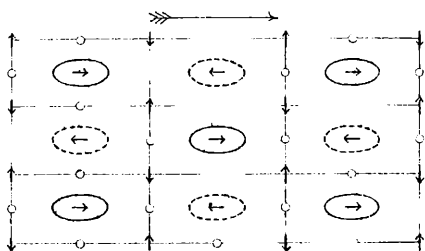
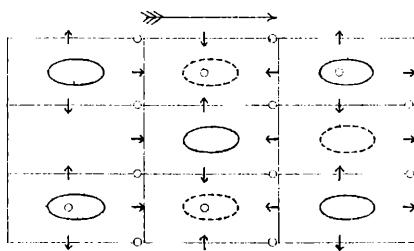


Fig. 3.



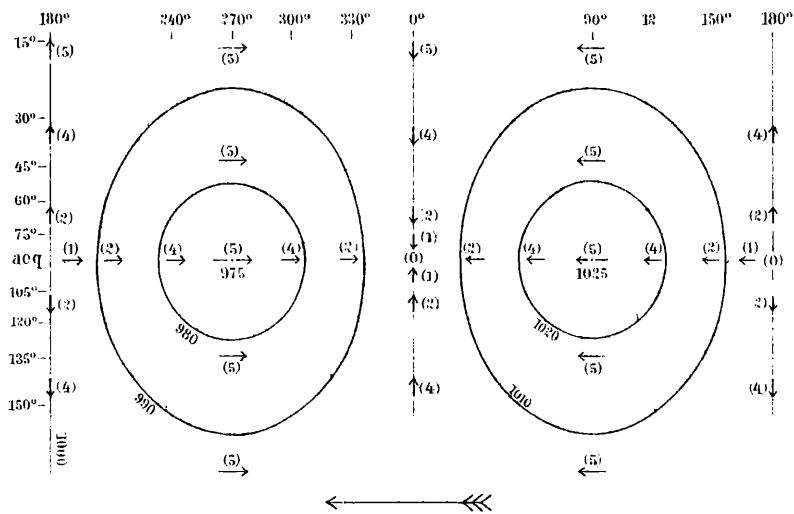
1. 3. Zellen reibungsloser Luft.

Fig. 4.



2. 4. Luftzellen bei Reibung

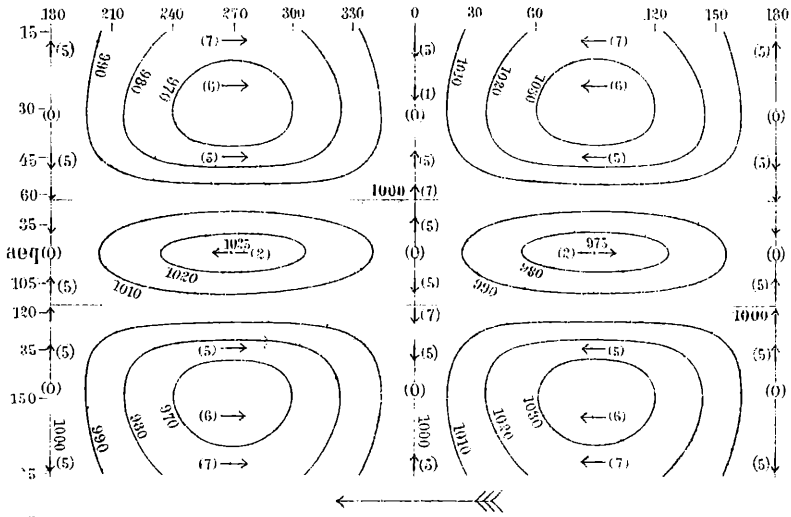
Fig. 5.



Ruhende Schale, reibungsloses System, Westwärts wandernde pure Welle erster Klasse Typus I Umlaufdauer: 28.07 Stunden

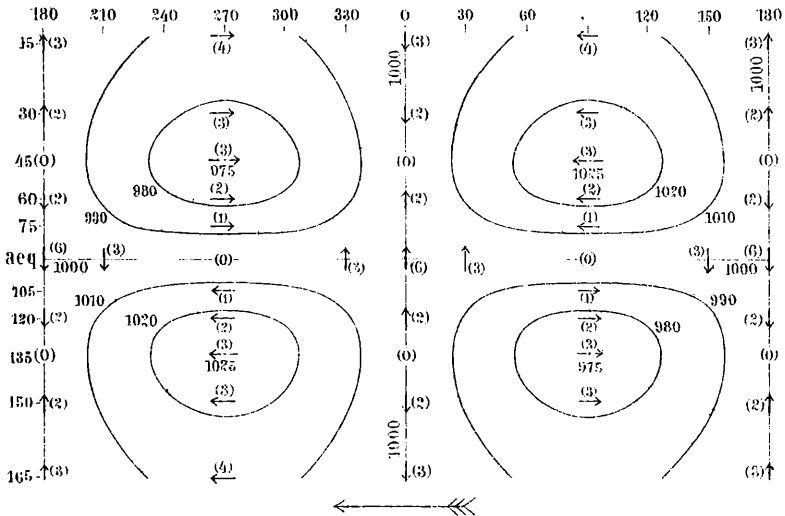
Lith. Aust v. J. Barth in Wien.

Fig. 6.



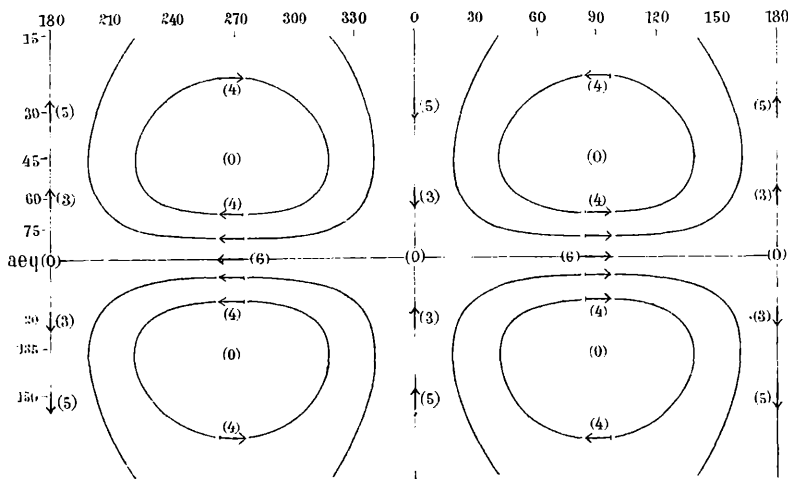
Ruhende Schale, reibungsloses System Westwärts wandernde perle Welle
 Classe Typus II. Umlaufdauer 11 46 Stunden

Fig. 7.



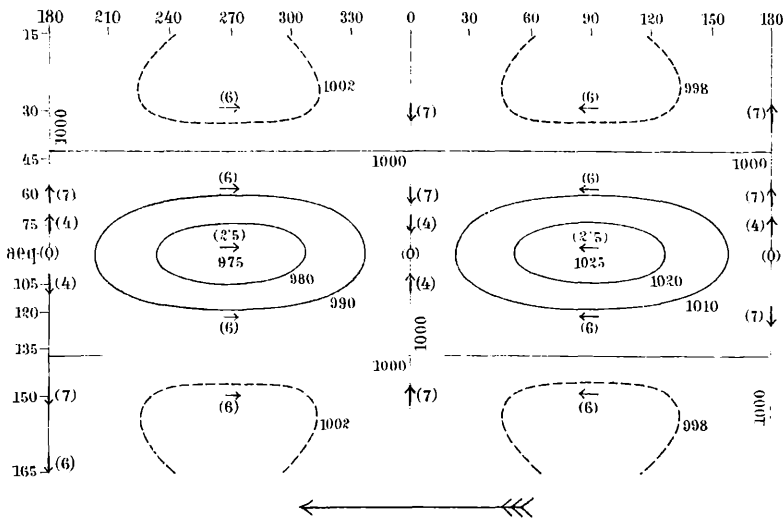
Ruhende Schale reibungsloses System Westwärts wandernde
 Welle erster Classe Typus I Umlaufdauer der Welle 16 20 Stunden

Fig. 8.



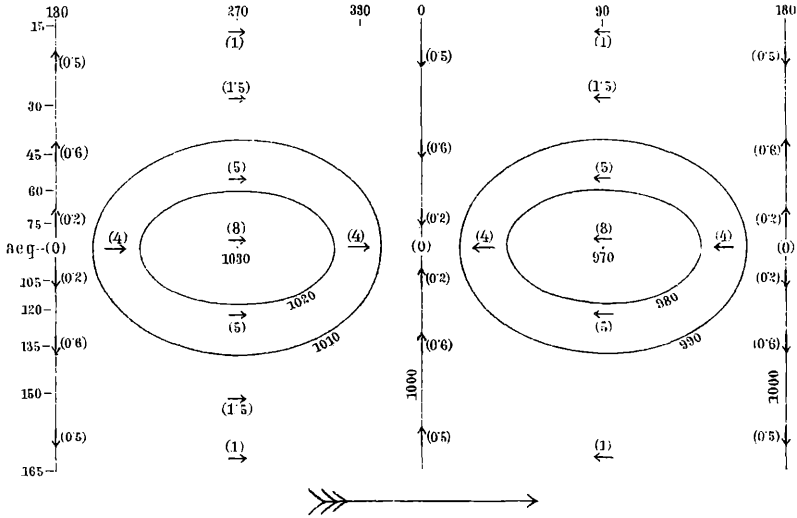
Ruhende Schale. Reibungsloses System, stationäre pure Bewegung erste Classe, Typus I. (Strömungslinien)

Fig 9.



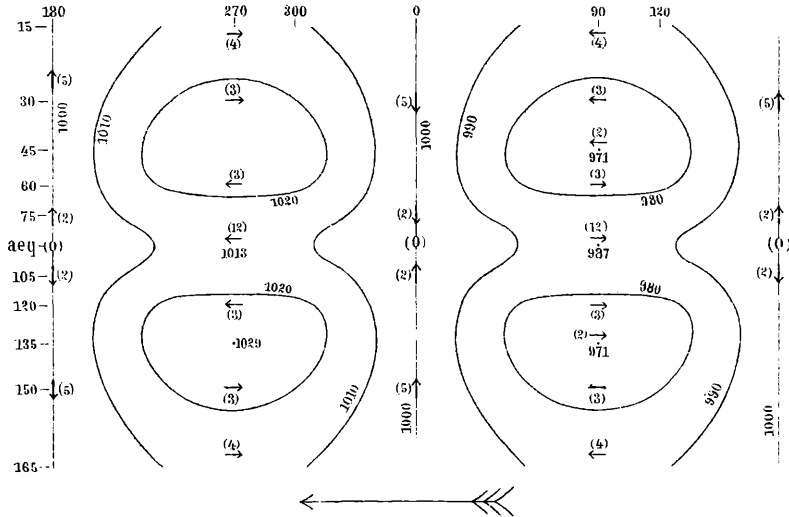
Reibungsloses System. Rotationsdauer der Schale 24 Stunden. Westwärts wandern, de pure Welle erster Classe, Typus I. Umlaufdauer der Welle 13-87 Stunden.

Fig. 10.



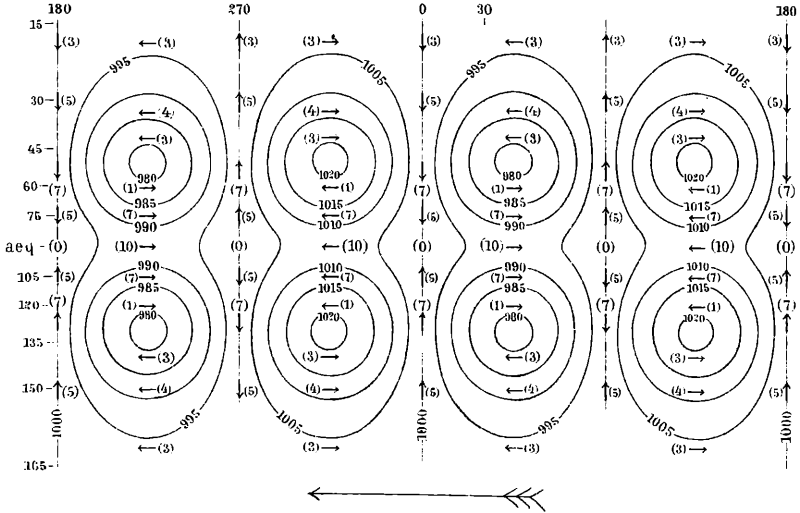
Reibungsloses System. Rotationsdauer der Schale 24 Stunden. Vorwärts wandern-
de Welle erster Classe Typus I. Umlaufdauer der Welle 33.57 Stunden

Fig. 11.



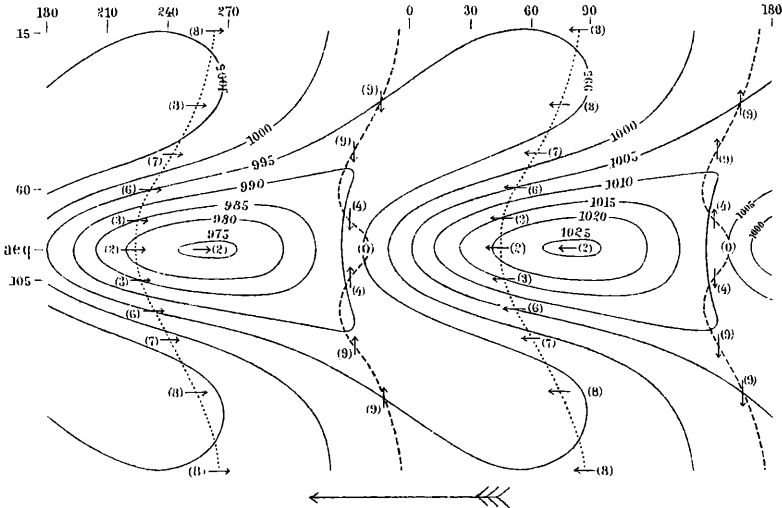
Reibungsloses System. Rotationsdauer der Schale 24 Stunden. Vorwärts
de Welle zweiter Art, erste Classe Typus I. Umlaufdauer der Welle 130.7 Stunden

Fig. 12.



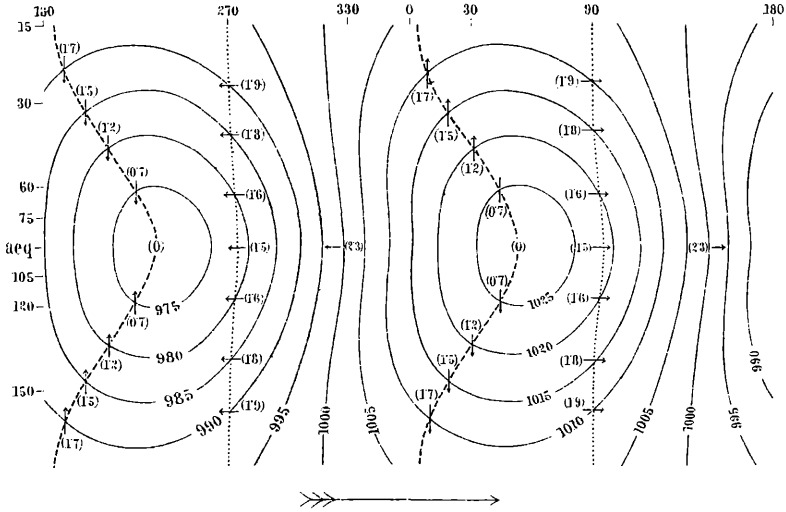
Reibungsloses System Rotationsdauer der Schale 24 Stunden Westwärts wandernde Welle zweiter Art, zweite Classe Typus I Umlaufdauer der Welle 187.5 Stunden.

Fig. 13.



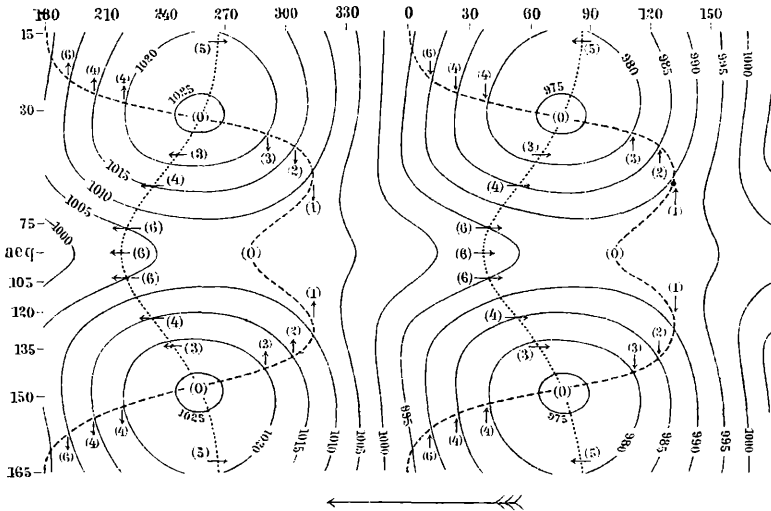
Rotationsdauer der Schale 24.07 Stunden Reibungsconstante $\mu = 0.352$ (Stunde⁻¹)
 Westwärts wandernde, abschwächende Welle erster Classe Typus I. Umlaufdauer
 14.6 Stunden Abschwächung 24 Stunden $\frac{1}{983}$

Fig. 14.



Rotationsdauer der Schale = 95 Stunden. Reibungsconstante $\rho = 0.593$ (Stunde⁻¹)
 Ostwärts wandernde erlöschende Welle erster Classe Typus I Umlaufdauer
 197 Stunden. Abschwächung = $\frac{1}{5.95}$

Fig. 15.



Rotationsdauer der Schale = 24.72 Stunden. Reibungsconstante $\lambda = 0.153$
 (Stunde⁻¹). Ostwärts fortschreitende Welle zweiter Art erste
 Classe Typus I. Umlaufdauer = 204 Stunden. Abschwächung in 24 Stunden $\frac{1}{7.7}$

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: [102_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Margules Max

Artikel/Article: [Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale. 11-56](#)