

Über die Lösung des Magnetisirungsproblems durch Reihen

Prof. Dr. **A. Wassmuth** in Innsbruck.

(Mit 1 Textfigur.)

I.

Bezeichnet V das inducirende, Q das inducirte und $\varphi = V + Q$ das Gesamtpotential, so erhält man, wenn noch k die Magnetisirungszahl vorstellt, bekanntlich die Componenten des magnetischen Momentes aus

$$A = -k \frac{d\varphi}{dx}, \quad B = -k \frac{d\varphi}{dy}, \quad C = -k \frac{d\varphi}{dz}$$

und die Oberflächendichte:

$$h = k \frac{d\varphi}{dn_i} = k \frac{d(V+Q)}{dn_i}$$

Es ist

$$Q = k \int \frac{ds}{r} \frac{d(V+Q)}{dn_i}, \quad (1)$$

wo sich die Integration auf die Oberfläche des inducirten Körpers bezieht. Die Lösung des Magnetisirungsproblems läuft also in erster Linie darauf hinaus, aus dieser gewissermassen transcendenten Gleichung das Oberflächenpotential Q , das ausserdem gewisse wohlbekannte Eigenschaften haben muss, zu bestimmen.

Die enormen Schwierigkeiten dieser Aufgabe hatten zuerst Beer¹ und dann später C. Neumann² und Riecke³ darauf geführt, Q durch Reihenentwicklungen auszudrücken, die nach V und aus V gebildeten Functionen fortschreiten. Beer und C. Neumann haben hiezu die bekannte von Green gegebene Gleichung:

$$4\pi V_i = \int V \frac{d}{dn_i} \frac{1}{r} ds - \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i} \quad (2)$$

benützt, während Riecke von der Betrachtung der Krafröhren ausgeht. Will man nach einerlei Methode vorgehen, so ist es nützlich, das Gesamtpotential φ analog der Gleichung (2) auszudrücken. Es wird:

$$4\pi k\varphi = k \int \varphi \frac{d}{dn_i} \frac{1}{r} ds - k \int \frac{ds}{r} \frac{d\varphi}{dn_i};$$

addirt man hiezu Gleichung (1), so ergibt sich:

$$Q_i + 4\pi k\varphi_i = k \int \varphi_s \frac{d}{dn_i} \frac{1}{r} ds \quad (3a)$$

oder

$$(1 + 4\pi k) Q_i + 4\pi k V_i = k \int (Q_s + V_s) \frac{d}{dn_i} \frac{1}{r} ds. \quad (3b)$$

Geht man nun von der Gleichung (2) aus und setzt:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i} &= 4\pi V_1 \\ \int \frac{ds}{r} \frac{dV_1}{dn_i} &= 4\pi V_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

¹ Beer, Elektrostatik, 155—169.

C. Neumann, Logar. Potential, 248. L. Weber, Grunert's Arch. 61.

Riecke, Wied. Ann., 13.

so hat man

$$\begin{aligned} V_i + V_1 &= \frac{1}{4\pi} \int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\ V_1 + V_2 &= \frac{1}{4\pi} \int V_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\ V_2 + V_3 &= \frac{1}{4\pi} \int V_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Hieraus leitet man weiter ab:

$$\begin{aligned} V + V_1 &= \frac{1}{4\pi} \int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\ V_1 + V_2 &= \frac{1}{4\pi} \int V_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\ V_1 + 2V_2 + V_3 &= \frac{1}{4\pi} \int (V_1 + V_2) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \\ V_1 + 3V_2 + 3V_3 + V_4 &= \frac{1}{4\pi} \int (V_1 + 2V_2 + V_3) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds \end{aligned} \quad (6)$$

so dass also von der zweiten Gleichung an der links auftretende Theil sich unter dem Integralzeichen in der nächstfolgenden Gleichung wiederfindet.

Werden nun diese Gleichungen (6) der Reihe nach mit $1, \rho, \rho^2, \rho^3 \dots$ multiplicirt und addirt, und wird zur Abkürzung:

$$Q_i = \rho V_1 + \rho^2(V_1 + V_2) + \rho^3(V_1 + 2V_2 + V_3) + \dots \quad (7)$$

gesetzt, so folgt:

$$Q_i + \rho V_i = \frac{\rho}{4\pi} \int (Q + V) \frac{d\frac{1}{r}}{dn_i} ds.$$

Diese Gleichung wird vollständig identisch mit der obigen Gleichung (3b), wenn man nur $\rho = \frac{4\pi k}{1+4\pi k}$ nimmt.

Die Gleichung 7 stellt die von Riecke gefundene, in allen praktischen Fällen convergente Reihenentwicklung dar.

Multiplicirt man hingegen die Gleichungen (5) der Reihe nach mit $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \dots$, addirt sie hierauf und wählt:

$$Q = \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \alpha^3 V_3 \dots, \quad (8)$$

so stösst man wiederum auf die obige Gleichung (3b), sobald man $\alpha = 4\pi k$ nimmt. Die Gleichung (8) stellt die älteste von Beer gegebene Reihenentwicklung dar.

Um auch die von C. Neumann gegebene Entwicklung zu finden, hat man im Wesentlichen nach ihm zu setzen:

$$\int V \frac{d \frac{1}{r}}{dn_i} ds = 4\pi V'$$

$$\int V' \frac{d \frac{1}{r}}{dn_i} ds = 4\pi V'' \quad (9)$$

so dass:

$$V' - V_i = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i}$$

$$V'' - V' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV'}{dn_i} \quad (10)$$

$$V''' - V'' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV''}{dn_i}$$

ist.

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ multiplicirt, addirt und wird:

$$\alpha V + \alpha^2 V' + \alpha^3 V'' + \dots = 4\pi k \cdot \Phi$$

gesetzt, so folgt:

$$\Phi \cdot 4\pi k \left[\frac{1}{\alpha} - 1 \right] - V = k \int \frac{ds}{r} \frac{d\Phi}{dn}$$

Diese Gleichung stimmt mit (1) überein, sobald:

$$4\pi k \left[\frac{1}{z} - 1 \right] = 1, \quad \Phi = Q + V, \quad \text{d. i. } z = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k}$$

genommen wird. C. Neumann's Entwicklung lautet also:

$$\Phi = Q + V = \frac{1}{1 + 4\pi k} \left[V + \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} V' + \left(\frac{4\pi k}{1 + 4\pi k} \right)^2 V'' + \dots \right] \quad (11)$$

Eine vierte, wie es scheint, noch nicht veröffentlichte Reihenentwicklung erhält man, indem man sich, ähnlich wie früher, aus (10) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} V' - V &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn} \\ V'' - 2V' + V &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d(V' - V)}{dn} \\ V''' - 3V'' + 3V' - V &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d(V'' - 2V' + V)}{dn} \end{aligned} \quad (12)$$

ableitet, dieselben der Reihe nach mit $\rho, \rho^2, \rho^3 \dots$ multiplicirt, sie addirt und

$$V + \rho(V' - V) + \rho^2(V'' - 2V' + V) + \dots = \Phi$$

wählt. Man erhält so:

$$\Phi - V = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{d\Phi}{dn_i},$$

hat also $\Phi = Q + V, \rho = 4\pi k$ zu setzen.

Diese Reihe lautet:

$$\varphi = Q + V = V + 4\pi k(V' - V) + (4\pi k)^2[V'' - 2V' + V] + \dots \quad (13)$$

und hat demnach Ähnlichkeit mit der Beer'schen, in die sie thatsächlich übergeführt werden kann.

Zwischen den einzelnen aus V abgeleiteten Functionen bestehen nämlich mehrere Beziehungen. So findet man aus (5) und (9) durch allmähiges Substituiren:

$$\begin{aligned}
 V + V_1 &= V' \\
 V_1 + V_2 &= V'' - V' \\
 V_2 + V_3 &= V''' - 2V'' + V' \\
 V_3 + V_4 &= V'''' - 3V''' + 3V'' - V'
 \end{aligned}
 \tag{14a}$$

oder

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V' - V \\
 V_2 &= V'' - 2V' + V \\
 V_3 &= V''' - 3V'' + 3V' - V \\
 V_4 &= V'''' - 4V''' + 6V'' - 4V' + V
 \end{aligned}
 \tag{14b}$$

und ebenso aus (4) und (10):

$$\begin{aligned}
 V' - V &= V_1 & V' &= V_1 + V \\
 V'' - V' &= V_2 + V_1 & V'' &= V_2 + 2V_1 + V \\
 V''' - V'' &= V_3 + 2V_2 + V_1 & V''' &= V_3 + 3V_2 + 3V_1 + V
 \end{aligned}
 \tag{15a} \tag{15b}$$

Man erkennt, dass die Gleichungen (5) durch (14a), (10) durch (15a), (9) durch (15b) und (14b) oder (12) durch (4) ersetzt werden können. Die vierte Reihenentwicklung (13) fällt, wie man mittelst (14b) sieht, mit der Beer'schen Reihe zusammen. Desgleichen geht die Riecke'sche Reihe (7) mit Hilfe von (15a) über in:

$$Q = \rho(V' - V) + \rho^2(V'' - V') + \rho^3(V''' - V'') + \dots; \quad \rho = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi k},$$

woraus sich die C. Neumann'sche Formel:

$$Q + V = (1 - \rho)[V + \rho V' + \rho_3 V'' + \dots]$$

ohne weiteres ergibt. Man ersieht, dass man es eigentlich nur mit zwei Typen von Reihen zu thun hat; auf der einen Seite ist die Beer'sche und die hier als vierte bezeichnete, auf der anderen Seite die von C. Neumann, respective Riecke gegebene Entwicklung. Stets ist der Grundgedanke der, Q , ausgehend von der Gleichung (2), durch eine Reihe von Oberflächenbelegungen zu erschöpfen.

II.

Es ist selbstverständlich kein Zweifel, dass die im Vorhergehenden erwähnten Reihen für das Flächenpotential Q die Thomson'sche Grenzgleichung:

$$(1 + 4\pi k) \frac{dQ}{dn_i} + \frac{dQ}{dn_a} = -4\pi k \frac{dV}{dn_i} \quad (16a)$$

oder

$$(1 + 4\pi k) \frac{d\varphi_i}{dn_i} + \frac{d\varphi_i}{dn_a} = 0 \quad (16b)$$

befriedigen müssen; interessant wäre es nur, nachzusehen, in welcher Art dies in jedem einzelnen Falle geschieht. Im Nachfolgenden soll aber die Aufgabe allgemeiner gefasst und jene Methoden entwickelt werden, aus denen man ausgehend von der Thomson'schen Grenzgleichung unter gewissen Annahmen auf Reihenentwicklungen für Q geführt wird. Zu dem Ende soll sowohl V wie Q als (convergente) Reihe von Gliedern, denen gewisse, physikalisch deutbare Bedingungen vorgeschrieben werden, gedacht sein. So sei vorerst:

$$\begin{aligned} V &= (V - \kappa V_1) + \kappa(V_1 - \kappa V_2) + \kappa^2(V_2 - \kappa V_3) + \\ &= U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \sum_1^{\infty} U_z \quad (17) \end{aligned}$$

eine convergente Reihe, so dass also die Bedingungsgleichung

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV}{dn_a} = \sum_1^{\infty} \left(\frac{dU_z}{dn_i} + \frac{dU_z}{dn_a} \right) = 0$$

jedenfalls erfüllt ist, welche Bedeutung V_1, V_2, \dots respective U_1, U_2, \dots und die Constante κ auch haben mögen.

Diesen bisher noch willkürlichen Functionen U_1, U_2, \dots werde nun die Bedingung:

$$\frac{dU_z}{dn_i} + \frac{dU_z}{dn_a} = -4\pi k \frac{dU_{z-1}}{dn_i} \quad (18)$$

in der Art vorgeschrieben, dass dieselbe für $z = 1, 2, 3, \dots, \infty$ gelten solle und $U_0 = -V$ (man denke 17 auf Null gebracht)

genommen werde. Die Möglichkeit einer solchen Entwicklung

des V in eine $\sum_1^n U_z$ vorausgesetzt, erscheinen dann die $U_z \dots U_2$

die im Unendlichen verschwinden und sonst endlich und stetig sind, als Flächenpotentiale und zwar gehört zu U_z die Dichte:

$$k \frac{dU_{z-1}}{dn_i}$$

Setzt man in 18 der Reihe nach: $z = 1, 2, \dots, \infty$ und stets $U_z = \kappa^{z-1} [V_{z-1} - \kappa V_z]$, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\frac{dU_1}{dn_i} + \frac{dU_1}{dn_a} = +4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

d. i.

$$-\kappa \left[\frac{dV_1}{dn_i} + \frac{dV_1}{dn_a} \right] = 4\pi k \frac{dV}{dn_i},$$

$$\frac{dU_2}{dn_i} + \frac{dU_2}{dn_a} = -4\pi k \frac{dU_1}{dn_i}$$

d. i.

$$-\kappa \left[\frac{dV_2}{dn_i} + \frac{dV_2}{dn_a} \right] = 4\pi k \frac{dV_1}{dn_i}$$

u. s. w., so dass allgemein:

$$\frac{dV_z}{dn_i} + \frac{dV_z}{dn_a} = -\frac{4\pi k}{\kappa} \frac{dV_{z-1}}{dn_i}, \quad z = 1, 2, \dots \quad V_0 = V \quad (19)$$

ist.

Die Grössen V_1, V_2, \dots erscheinen also ebenfalls als Flächenpotentiale, sind aber jetzt nicht mehr willkürlich, sondern jede kann aus der vorhergehenden und schliesslich V_1 aus V abgeleitet werden.

In ähnlicher Art sei auch:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots = \sum_1^{\infty} Q_z$$

eine convergente Reihe und Q_1, Q_2, \dots ebenso wie Q selbst Flächenpotentiale, für die die Bedingung:

$$\frac{dQ_z}{dn_i} + \frac{dQ_z}{dn_a} = -\chi^z \frac{dV_{z-1}}{dn_i} \quad z = 1, 2, \dots, \infty \quad (20)$$

vorgeschrieben werde.

Nun sollen die Q_z die Thomson'sche Gleichung:

$$\sum_1^{\infty} \left[(1 + 4\pi k) \frac{dQ_z}{dn_i} + \frac{dQ_z}{dn_a} \right] = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

befriedigen, d. h. es soll wegen (20):

$$-\sum_1^{\infty} \chi^z \frac{dV_{z-1}}{dn_i} + 4\pi k \sum_1^{\infty} \frac{dQ_z}{dn_i} = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

oder

$$-\chi \frac{dV}{dn_i} - \chi \left[\chi \frac{dV_1}{dn_i} + \chi^2 \frac{dV_2}{dn_i} + \dots + \chi^z \frac{dV_z}{dn_i} + \dots \right] +$$

$$+ 4\pi k \left[\frac{dQ_1}{dn_i} + \frac{dQ_2}{dn_i} + \dots + \frac{dQ_z}{dn_i} + \dots \right] = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

sein. Dividirt man durch $4\pi k$, so sieht man, dass sich als Lösung:

$$\chi = 4\pi k, \quad Q_z = \chi^z V_z = (4\pi k)^z V \quad (21)$$

d. i. die Beer'sche Entwicklung:

$$Q = 4\pi k V_1 + (4\pi k)^2 \cdot V_2 + \dots$$

ergibt.

Dabei ist nun nach (19):

$$\frac{dV_z}{dn_i} + \frac{dV_z}{dn_a} = -\frac{dV_{z-1}}{dn_i} \quad (22)$$

d. h. V erscheint als Flächenpotential mit der Dichte

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{dV_{z-1}}{dn_i}, \quad (23)$$

oder es muss

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i} \\ V_2 &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV_1}{dn_i} \end{aligned} \quad (24)$$

sein; die hier gebrauchten Functionen V_1, V_2, \dots fallen also mit den obigen (cf. 4) vollständig zusammen.

Die Gleichung (20) kann auch geschrieben werden:

$$\frac{dQ_z}{dn_i} + \frac{dQ_z}{dn_u} = -4\pi k \frac{dQ_{z-1}}{dn_i} \quad (25)$$

und gibt uns eine Beziehung zwischen Q_z und Q_{z-1} , die der zwischen U_z und U_{z-1} (18) ganz analog ist. Diese Gleichung (25) gilt auch für $z = 1$, indem aus $Q_z = \alpha^z V_z$, $Q_0 = V_0 = V$, $Q_1 = \alpha V_1$ folgt.

U_z ist nach (18) ein Flächenpotential mit der Dichte $k \frac{dU_{z-1}}{dn_i}$ und analog stellt auch Q_z ein Flächenpotential mit der Dichte $k \frac{dQ_{z-1}}{dn_i}$ vor.

Addirt man die Gleichungen (18) und (25) und setzt:

$$U_z + Q_z = \varphi_z$$

so erhält man:

$$\frac{d\varphi_z}{dn_i} + \frac{d\varphi_z}{dn_u} = -4\pi k \frac{d\varphi_{z-1}}{dn_i}, \quad z = 1, 2, 3, \dots \infty \quad (26)$$

wobei also

$$\varphi = \sum_1^{\infty} \varphi_z \quad \text{und} \quad \varphi_0 = U_0 + Q_0 = -V + V = 0$$

ist.

Der Theil φ_z des Gesamtpotentials φ erscheint als Flächenpotential mit der Dichte $h_z = k \frac{d\varphi_{z-1}}{dn_i}$ und die schliessliche

Dichte h entsteht durch Übereinanderlagerung der Mengen mit den diesbezüglichen Dichten h_z . Es ist ja:

$$\begin{aligned} h &= k \frac{d\varphi}{dn_i} = k \frac{d \sum_1^{\infty} \varphi_z}{dn_i} = k \sum_1^{\infty} \frac{d\varphi_z}{dn_i} = \\ &= k \sum_2^{\infty} \frac{d\varphi_{z-1}}{dn_i} = \sum_2^{\infty} h_z = \sum_1^{\infty} h_z \end{aligned}$$

da $h_1 = 0$ ist.

Da:

$$\begin{aligned} \varphi_z &= U_z + Q_z = [(4\pi k)^{z-1} V_{z-1} - (4\pi k)^z V_z] + (4\pi k)^z V = \\ &= (4\pi k)^{z-1} V_{z-1} \end{aligned}$$

und somit:

$$h_z = k \frac{d\varphi_{z-1}}{dn_i} = k \cdot (4\pi k)^{z-2} \frac{dV_{z-2}}{dn_i}$$

ist, so hat man

$$\varphi = V + Q = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots = V + 4\pi k \cdot V_1 + (4\pi k)^2 V_2 + \dots$$

und die dazu gehörigen Oberflächendichten aus:

$$h = 0 + k \cdot \frac{dV}{dn_i} + k \cdot 4\pi k \frac{dV_1}{dn_i} + \dots$$

Das Potential φ_z , entstanden durch die Belegung mit der Dichte:

$$h_z = k \cdot (4\pi k)^{z-2} \frac{dV_{z-2}}{dn_i},$$

inducirt selbst die nächste Dichte

$$h_{z+1} = k \cdot (4\pi k)^{z-1} \frac{dV_{z-1}}{dn_i} = k \cdot \frac{d\varphi_z}{dn_i} \quad \text{u. s. w.}$$

III.

Etwas weniger einfach gestaltet sich die Entwicklung, wenn wir es versuchen, wiederum ausgehend von der Thomson's-

schen Grenzgleichung, auch zur zweiten Type der Reihen, zur Riecke-Neumann'schen zu gelangen.

Das inducirende Potential V sei durch die als convergent gedachte Reihe:

$$V = (V - V') + (V' - V'') + \dots = U' + U'' + \dots \quad (27)$$

$$U(z) = V^{(z-1)} - V^{(z)}$$

ausgedrückt und den bisher noch unbekanntenen Functionen $V^{(z)}$ werde die Bedingung:

$$\frac{d[V^{(z-1)} - V^{(z)}]}{dn_i} + \frac{d[V^{(z-1)} - V^{(z)}]}{dn_a} = + \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i} \quad (28)$$

aufgelegt, die wegen:

$$V^{(z-1)} = [V^{(z-1)} - V^{(z-2)}] + [V^{(z-2)} - V^{(z-3)}] + \dots + [V' - V] + V$$

$$= -[U^{(z-1)} + \dots U'] + V$$

auch die Form:

$$\frac{dU^{(z)}}{dn_i} + \frac{dU^{(z)}}{dn_a} = \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i} = - \left[\frac{dU^0}{dn_i} + \frac{dU'}{dn_i} + \dots + \frac{dU^{(z-1)}}{dn_i} \right] \quad (29)$$

erhalten kann, wenn noch $U^0 = -V$ genommen wird.

Aus (28) ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{d[V' - V]}{dn_i} + \frac{d[V' - V]}{dn_a} = - \frac{dV}{dn_i}$$

$$\frac{d[V'' - V']}{dn_i} + \frac{d[V'' - V']}{dn_a} = - \frac{dV'}{dn_i} \quad (28')$$

d. h. es sind $V' - V, V'' - V', \dots$ Flächenpotentiale mit den Dichten:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn_i}, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{dV'}{dn_i}$$

Werden die Abkürzungen:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i}, \quad V_2 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{ds}{r} \frac{dV_1}{dn_i} \dots$$

— es sind also dieselben wie in (24) oder (4) — eingeführt, so folgt:

$$\begin{aligned} V' &= V + V_1 \\ V'' &= V' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{dV'}{dn_i} \frac{ds}{r} = V_2 + 2V_1 + V \\ V''' &= V_3 + 3V_2 + 3V_1 + V \end{aligned} \quad (30)$$

so dass durch V alle übrigen Grössen V' , V'' gegeben sind. Die Summation von (28') liefert noch:

$$\sum_1^{\infty} \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i} = \sum_1^{\infty} \left[\frac{dU^{(z)}}{dn_i} + \frac{dU^{(z)}}{dn_a} \right] = 0, \quad (31)$$

was mit der Gleichung $\frac{dV}{dn_i} + \frac{dV}{dn_a} = 0$ im Einklange steht.

Analog wie früher sei Q durch die convergente Reihe:

$$Q = Q' + Q'' + \dots = \sum_1^{\infty} Q^{(z)}$$

ausgedrückt und sollen die Q die der (29) analoge Bedingung:

$$\frac{dQ^{(z)}}{dn_i} + \frac{dQ^{(z)}}{dn_a} = -\rho^z \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i}, \quad (32)$$

wo ρ eine noch zu bestimmende Constante ist, erfüllen. Nun lautet die Thomson'sche Grenzgleichung:

$$\sum (1 + 4\pi k) \frac{dQ^{(z)}}{dn_i} + \frac{dQ^{(z)}}{dn_a} = -4\pi k \frac{dV}{dn_i},$$

d. i. wegen 32:

$$4\pi k \sum_1^{\infty} \frac{dQ^{(z)}}{dn_i} - \sum_1^{\infty} \rho^z \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i} = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

oder

$$4\pi k \left[\frac{dQ'}{dn_i} + \frac{dQ''}{dn_i} + \dots \right] - \rho \left[\frac{dV}{dn_i} + \rho \frac{dV'}{dn_i} + \dots \right] = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}.$$

Werden nun hierin mit Hilfe der Gleichungen:

$$\begin{aligned} V' &= V - U' \\ V'' &= V - U' - U'' \\ V''' &= V - U' - U'' - U''' \end{aligned}$$

die Grössen V' , V'' , V''' durch die U' , U'' , U''' ... ausgedrückt und $\rho < 1$ angenommen, so ergibt sich:

$$4\pi k \left[\frac{dQ'}{dn_i} + \frac{dQ''}{dn_i} + \dots \right] - \frac{\rho}{1-\rho} \left[\frac{dV}{dn_i} - \rho \frac{dU'}{dn_i} - \rho^2 \frac{dU''}{dn_i} - \dots \right] = -4\pi k \frac{dV}{dn_i}$$

Diese Gleichung führt zu dem Schlusse:

$$\frac{\rho}{1-\rho} = 4\pi k \quad \text{d. i.} \quad \rho = \frac{4\pi k}{1+4\pi k} \quad \text{und} \quad Q^{(z)} = -\rho^z U^{(z)}, \quad (33)$$

da $Q^{(z)}$ und $\rho^z U^{(z)}$ als Flächenpotentiale im Unendlichen verschwinden müssen und demnach sich nicht um eine Constante unterscheiden können.

Die Substitution (33) führt (32) in (29) über und hätte umgekehrt unter gewissen Voraussetzungen daraus erschlossen werden können.

Es ist also:

$$Q = \sum_1^{\infty} Q_z = - \sum_1^{\infty} \rho^z U^{(z)} = - \sum_1^{\infty} \rho^z [V^{(z-1)} - V^{(z)}]$$

oder:

$$Q = -\rho V + \rho V' - \rho^2 V' + \rho^2 V'' - \rho^3 V'' + \rho^3 V''' - \dots$$

und

$$\varphi = Q + V = (1-\rho)[V + \rho V' + \rho^2 V'' + \dots], \quad (34)$$

das ist aber thatsächlich wegen $\rho = \frac{4\pi k}{1+4\pi k}$, $1-\rho = \frac{1}{1+4\pi k}$ nichts Anderes als die obige Gleichung (11), d. h. die C. Neumann'sche, respective bei Einführung der V_1 die Riecke'sche Entwicklung.

Setzt man wiederum $\varphi^{(z)} = U^{(z)} + Q^{(z)}$, so liefern (29) und (32):

$$\frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} + \frac{d\varphi^{(z)}}{dn_a} = (1-\rho^z) \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i},$$

d. h. dass die zu φ_z gehörige Dichte:

$$h_z = -\frac{1}{4\pi} (1-\rho^z) \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i} \quad (35)$$

oder dass wegen (29):

$$h_z = + \frac{1}{4\pi} (1-\rho^z) \left[-\frac{dV}{dn_i} + \frac{1}{1-\rho} \frac{d\varphi'}{dn_i} + \frac{1}{1-\rho^2} \frac{d\varphi''}{dn_i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1-\rho^{z-1}} \frac{d\varphi^{z-1}}{dn_i} \right] \quad (36)$$

ist. Diese Gleichung zeigt uns, wie sich die Dichte h_z aus den einzelnen, von den verschiedenen Kräften $-\frac{dV}{dn_i}$, $\frac{d\varphi'}{dn_i}$ ausgehenden Inductionsacten schliesslich aufbaut. Aus (35) erhält man noch:

$$h_{z+1} = \left[h_z + \frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} \right] \frac{1-\rho^{z+1}}{1-\rho^z}, \quad (37)$$

welche Gleichung erkennen lässt, wie aus h_z und der durch die Belegung h_z bedingten Kraft $\frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i}$ die neue Dichte h_{z+1} entsteht.

Die gesammte, schliesslich auf dem inducirten Körper befindliche Dichte ist:

$$h = k \frac{d\varphi}{dn_i} = k \sum \frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} = \sum H_z,$$

wenn

$$H_z = k \frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i} \quad (38)$$

gesetzt wird. Hiemit werden die Gleichungen (36) und (37):

$$h_z = \frac{1-\rho}{\rho} \cdot [1-\rho^z] \left[-k \frac{dV}{dn_i} + \frac{H'}{1-\rho} + \frac{H''}{1-\rho^2} + \right. \\ \left. + \frac{H^{(z-1)}}{1-\rho^{z-1}} \right] \quad (39)$$

$$h_{z+1} = \left[h_z + \frac{1-\rho}{\rho} H_z \right] \frac{1-\rho^{z+1}}{1-\rho^z}.$$

Die Formel (39) zeigt, wie h_z aus $H^{(z-1)} \dots H'' \dots H', V$ gebildet wird; hiemit lässt sich $\varphi^{(z)} = \int \frac{ds}{r} \cdot h_z$ und demnach auch $H_z = k \frac{d\varphi^{(z)}}{dn_i}$ im Allgemeinen bestimmen.

Man kann aber auch von der Reihe (34) ausgehen und

$$\varphi = \sum_1^{\infty} \Phi_z$$

nehmen, wo $\Phi_z = (1 - \rho)\rho^{\tilde{z}-1} V^{z-1}$ ist. Hiemit wird:

$$h = k \frac{d\varphi}{dn_i} = k \sum \frac{d\Phi_z}{dn_i} = \sum S_z,$$

wenn die Oberflächendichte:

$$S_z = k \frac{d\Phi_z}{dn_i} = \frac{\rho^{\tilde{z}}}{4\pi} \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i}$$

gesetzt wird. Da nun nach (35) die zu $\varphi^{(z)}$ gehörige Dichte

$$h_z = - \frac{1 - \rho^{\tilde{z}}}{4\pi} \cdot \frac{dV^{(z-1)}}{dn_i}$$

ist, so wird schliesslich

$$S_z = - \frac{\rho^{\tilde{z}}}{1 - \rho^{\tilde{z}}} h_z \quad (40)$$

$$h = \sum S_z = - \sum \frac{\rho^{\tilde{z}}}{1 - \rho^{\tilde{z}}} h_z.$$

Wie man sieht, lassen sich aus der Thomson'schen Grenzgleichung alle bisher bekannten Reihenentwicklungen für φ ableiten. Es kommt bei dieser Methode wesentlich darauf an, sowohl das inducirende wie das inducirte Potential (V und Q) in Summanden zu zerlegen, die als Flächenpotentiale gewisse Bedingungen (18 und 20, 29 und 32) erfüllen. Die Verallgemeinerung der letzteren liegt nahe, und steht zu hoffen, dass man auf diesem Wege zu neuen Entwicklungen gelangen wird,¹

Wenn man z. B. in (32) statt $\rho^{\tilde{z}}$ allgemeiner $f(z)$ schreibt, so ist es auch hier möglich, die Grenzgleichung zu befriedigen.

zumal man für das inducirende Potential V Reihenentwicklungen kennt.

IV

Als eine nicht uninteressante Anwendung der obigen Entwicklung in Reihen möge für einen speciellen Fall die Frage erledigt werden, inwieweit sich die Einführung des Begriffes: »magnetischer Widerstand« rechtfertigen¹ lasse.

Zu dem Ende werde ein Ring (etwa aus Eisen) betrachtet, der an einer Stelle durch eine schmale Luftspalte, durch Schnitte, die durch die Axe gehen, unterbrochen und gleichmässig und vollständig mit Draht umwickelt sei.

Wäre die Luftspalte nicht vorhanden, d. h. der Ring geschlossen, so müsste bekanntlich $Q_i = 0$, $\varphi_i = V_i$ sein; in unserem Falle verschwindet zwar Q_i nicht, bleibt aber immer sehr klein. Macht man von der in allen praktischen Fällen convergirenden Entwicklung von Riecke-Neumann (Gleichung 34) Gebrauch, so ist bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$Q = -\rho(V - V') = +\rho V_1 = \frac{k}{1 + 4\pi k} \int \frac{ds}{r} \frac{dV}{dn_i} \quad (41)$$

d. h. Q erscheint als ein Oberflächenpotential mit der Dichte:

$$h = \frac{k}{K} \frac{dV}{dn_i},$$

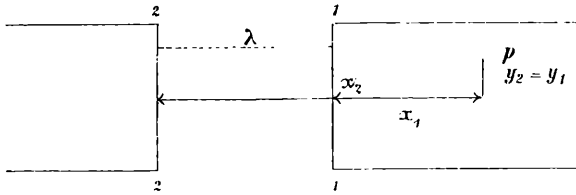
wenn $1 + 4\pi k = K$ genommen wird.

Diese Dichte h tritt nur an den Querschnitten der Spalte auf, da sonst überall (an der Oberfläche des Eisens) $\frac{dV}{dn_i} = 0$ ist.

Die Mittellinie des Ringes werde mit x bezeichnet und ihre positive Richtung falle mit der Richtung der magnetisirenden Kraft $-\frac{dV}{dx} = 4\pi ni$ zusammen, wo i die Stromstärke, n die

Die folgende Ableitung wurde am 30. März 1892 im naturwiss.-med. Vereine in Innsbruck vorgetragen; veröffentlicht wurde nur das Resultat der Rechnung (cf. e. g. Phil. Mag., December 1892). In anderer Art behandelt Du Bois die Frage. Du Bois, Phil. Mag., Oct. 1890 und Wied. Ann. 46.

Zahl der Windungen für die Längeneinheit vorstellt. Die Dichtigkeiten auf den beiden Querschnitten sind demnach



$h_1 = -\frac{k}{K} 4\pi ni$ und $h_2 = +\frac{k}{K} 4\pi ni$, wo h_1 zu grösserem x (als h_2) gehört. Hiemit wird:

$$Q = -\frac{k}{K} 4\pi ni [U_1 - U_2] \quad (42)$$

wo U_1 und U_2 Potentiale von einfachen Belegungen von der Dichte $+1$ darstellen.

Ist N die Zahl aller Kraftlinien, die durch den kreisförmig gedachten Querschnitt $A = R^2\pi$ des Eisens gehen, so ist die magnetische Induction

$$B = \frac{N}{A} = K \cdot \left(-\frac{d\varphi}{dx} \right)$$

oder, wegen

$$\begin{aligned} \varphi_i &= V_i + Q_i = V_i - \frac{k}{K} 4\pi ni [U_1 - U_2] \\ -\frac{d\varphi}{dx} &= +4\pi ni + \frac{k}{K} 4\pi ni \left[\frac{dU_1}{dx} - \frac{dU_2}{dx} \right] \end{aligned}$$

Nun ist in hinreichender Näherung das Potential U einer Kreisscheibe vom Halbmesser R und der Dichte $+1$ für einen Punkt xy , falls die x in die Axe des Kreises fallen (Mascart und Joubert, §. 736),

$$U = 2\pi [f_0 + f_1 y^2]$$

wobei

$$u^2 = R^2 + x^2, f_0 = u - x, f_1 = -\frac{1}{4} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

gesetzt ist und die Reihe convergirt, wenn $y < u$ ist. Werden die Coordinaten des ins Auge gefassten Punktes p im Eisen in Bezug auf den ersten Kreis mit x_1, y_1 und in Bezug auf den zweiten mit x_2, y_2 bezeichnet, so kann, da beide Belege nur auf sehr nahe Punkte im Eisen wirken, d. h. x_1 und x_2 klein bleiben, $y_2 = y_1$ und $x_2 - x_1 = \lambda$ d. i. gleich der mittleren Breite der Luftspalte gesetzt werden; es ist eben wegen der Kleinheit der Spalte erlaubt, die beiden Schnitte als zu einander parallel anzunehmen.

Man erhält so bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$\frac{dU_1}{dx} - \frac{dU_2}{dx} = -\frac{2\pi\lambda}{R} \quad (43)$$

oder

$$-\frac{d\varphi}{dx} = 4\pi ni \left[1 - \frac{2\pi\lambda}{R} \cdot \frac{k}{K} \right] = \frac{4\pi ni}{1 + \frac{2\pi\lambda}{R} \cdot \frac{k}{K}}$$

Setzt man noch $n = \frac{S}{l}$ wo S die Zahl aller Windungen und l die ganze mittlere Länge des Ringes bezeichnet, so findet man für die Zahl N der durch den Ring gehenden Kraftlinien den Ausdruck:

$$N = \frac{4\pi Si}{\frac{l}{K \cdot R^2 \pi} + \frac{2\pi k}{K^2} \frac{l}{R} \frac{\lambda}{R^2 \pi}} = \frac{4\pi Si}{w_1 + w_2} \quad (44)$$

Zu dem Widerstande des Eisens $w_1 = \frac{l}{K \cdot R^2 \pi}$ tritt also wirklich ein weiterer Widerstand $w_2 = \frac{2\pi k}{K^2} \frac{l}{R} \cdot \frac{\lambda}{R^2 \pi}$ hinzu; derselbe ist der Breite λ der Luftspalte direct und dem Querschnitte derselben umgekehrt proportional und hängt noch von dem Factor $\frac{2\pi k}{K^2} \frac{l}{R}$, der nahe $\frac{1}{K} \left(\frac{l}{2R} \right)$ ist, ab. Ist noch r der Radius des Ringes für die Mittellinie $l = 2r\pi$, so wird der Widerstand der Luftspalte

$$w_2 = \frac{1}{K} \left(\frac{r\pi}{R} \right) \frac{\lambda}{R^2 \pi}$$

Nennt man für $\lambda = 0$ d. i. für den geschlossenen Ring die magnetische Induction $B_0 = \frac{N_0}{R^2 \pi} = \frac{4\pi Si}{l}$ und B , wie oben, die

für den geschlitzten Ring, so erhält man die Beziehung

$$B = B_0 \left[1 - \frac{2\pi k}{K} \frac{\lambda}{R} \right]$$

worin $B_0 = HK$ gesetzt werden kann, falls $H = 4\pi ni$ die magnetisierende Kraft vorstellt. Ein beabsichtigter Vergleich dieser Formel mit den bekannt gewordenen Versuchen liess sich nicht durchführen, da nicht alle Daten hiezu angegeben sind.

Es muss noch hervorgehoben werden, dass diese Methode auch für andere Formen der Luftspalten, z. B. für solche, wo ein Cylinder oder zwei ineinander steckende Cylinder auftreten, mit einigen Abänderungen gebraucht werden kann.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: [102_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Wassmuth A.

Artikel/Article: [Über die Lösung des Magnetisierungsproblems durch Reihen. 65-84](#)