Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen

(II. Nachtrag)

O. Stolz in Innsbruck.

In zwei Abhandlungen mit dem nämlichen Titel, welche im 99. und 100. Bande der Sitzungsberichte gedruckt sind, habe ich zwei Methoden auseinandergesetzt, nach welchen die Extreme der expliciten Functionen von zwei und mehr Veränderlichen $x_1 \ldots x_m$ ermittelt werden können. Die erste, welche von L. Scheeffer begründet wurde, geht davon aus, die obere und untere Grenze der gegebenen Function $f(x_1 \ldots x_m)$ unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass $x_1^2 + \ldots + x_m^2$ gleich ist einer willkürlichen Constanten r^2, welche übrigens beliebig klein angenommen werden darf. Die zweite Methode kommt, wie Herr A. Mayer hervorhebt,[1] auf das bereits von Lagrange benützte Verfahren[2] zurück, zunächst die obere und untere Grenze von $f(x_1 \ldots x_m)$ unter der Bedingung zu ermitteln, dass eine der Veränderlichen, z. B. x_1, constant bleibt, während für alle übrigen $(x_2, x_3 \ldots x_m)$ der Spielraum von $-x_1$ bis x_1 vorbehalten wird. Es sei mir nunmehr gestattet, noch einige Bemerkungen über die genannten zwei Verfahrungsweisen nachzutragen. Hiebei handelt es sich stets um den Fall, dass $f(x_1 \ldots x_m)$ in der Nachbarschaft der zu untersuchenden Stelle $x_1 = a_1 \ldots x_m = a_m$ sich in eine Reihe nach ganzen positiven

[1] Vergl. Berichte der k. Sächs. Gesellsch. der Wissensch., mathem.-physik. Classe, 1892, S. 85.

[2] Vergl. Théorie des fonctions (1813), p. 256.

Potenzen von $x_1 - a_1 . \; . x_m - a_m$ entwickeln lässt. Der Kürze wegen ist $a_1 = a_2 = . \; . = a_m = 0$ gesetzt.

1. Wenn wir die zweite Methode auf eine Function von zwei Veränderlichen xy an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ anwenden, so kommt es zunächst darauf an, obere und untere Grenze einer gegebenen ganzen Function $G(x, y)$ ohne constantes Glied sowohl bei constantem x und Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$, als auch bei constantem y und Beschränkung von x auf das Intervall $(-y, y)$ zu bestimmen. Diese Aufgabe wurde in der Abhandlung im 100. Bande, Nr. 3 gelöst. Es ist jedoch noch zu bemerken, dass von den dort aufgestellten Reihen $y = P_1(x), P_2(x) .$ nur diejenigen in Betracht zu ziehen sind, deren Summe bei gehörig kleinem $|x|$ ihrem Betrage nach kleiner als $|x$ ausfällt. Daher fallen von der Gesammtheit jener Reihen ohne Weiteres jene fort, deren erstes Glied x in einer niedrigeren als der ersten Potenz oder die erste Potenz x neben einem Coëfficienten, dessen Betrag grösser als 1 ist, enthält. Endlich bei positivem, beziehungsweise negativem x jene Reihen, in welchen auf $\pm x$ als erstes Glied ein mit ihm gleichbezeichnetes folgt. So kann a. a. O. p. 1176 die Reihe $x = 90y + . \quad = Q(y)$ ausseracht gelassen werden.[1]

Ferners möge man a. a. O. p. 1178 nach Z. 4 einschalten: »Dazu, dass $G_n(x, y)$ die im Satze von Nr. 4 verlangte Beschaffenheit habe, ist hinreichend, dass die Reihen $G_n(x, \overline{\varphi}_1(x))$ u. s. w mit einer Potenz der Veränderlichen, sei es x oder y, beginnen, deren Exponent nicht grösser als n ist«.[2]

Die Berücksichtigung derselben bringt indess O. keinen Fehler mit sich. $\psi_1(y)$ ist zwar gleich y zu setzen. Da aber $G(Q(y), y) < G(y, y)$ ist, so ist, falls der erstere Ausdruck positiv ist, auch der letztere positiv. Wäre aber der erstere negativ, so könnte man daraus über das Zeichen des letzteren Nichts entnehmen. Wenn es sich also darum handelt, nachzuweisen, dass der Werth $G(0, 0) = 0$ kein Extrem von $G(x, y)$ ist, so müssen die Texte angegebenen Reihen in der That weggelassen werden.

Ausserdem bitte ich folgende Fehler in der Abhandlung im 100. Bande zu verbessern: S. 1167, Z. 4 v. statt Nr. 3 l. Nr. 1. — S. 1174, Z. 15 v. statt: nun l. nur, Z. 12 und 7 v. u. statt: grösste l. kleinste. — S. 1176, Z. 6 statt ∓ 27 l. -243 und streiche in Z. 7: »je nachdem x positiv oder negativ ist.« — Ferner ist Bd. 99, S. 508, Z. 8 v. u. nach »Coëfficienten« einzuschalten: »welche nicht eine geradfache Wurzel der Gleichung $G(x, y) = 0$ ist«. Es werden

2. Die beiden Methoden führen, auf eine Function von m Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ angewandt, in letzter Linie[1] darauf hinaus, $m-1$ Gleichungen zwischen $x_1, x_2 \ldots x_m$ nach $m-1$ dieser Veränderlichen durch Reihen aufzulösen. So verlangt das auf Lagrange zurückgehende Verfahren, dass man z. B. die $m-1$ Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 0. \quad \frac{\partial G}{\partial x_m} = 0, \tag{1}$$

worin G eine ganze Function von $x_1, x_2 \ldots x_m$ ohne constantes Glied bedeutet, nach $x_2 \ldots x_m$ in jeder möglichen Weise durch Reihen auflöse, welche nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreiten und zugleich mit x_1 verschwinden. Dass das im Allgemeinen zu leisten ist, lässt sich leicht einsehen. Durch Elimination einer der Veränderlichen, z. B. x_m, aus den Gleichungen (1) werden wir $m-2$ Gleichungen zwischen $x_1 \ldots x_{m-1}$

$$G_r^{(1)}(x_1 \ldots x_{m-1}) = 0 \quad (r = 1, 2 \ldots m-2) \tag{2}$$

gewinnen und hieraus durch Elimination einer anderen Veränderlichen, z. B. x_{m-1} $m-3$ Gleichungen zwischen $x_1 \ldots x_{m-2}$ u. s. f. Auf diese Weise werden wir endlich zu zwei Gleichungen zwischen drei von den Veränderlichen, etwa $x_1 x_2 x_3$,

$$G_1^{(m-3)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad G_2^{(m-3)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{3}$$

gelangen. Bilden wir ihre Resultante etwa nach x_3, so erhalten wir die Schlussgleichung

$$G^{(m-2)}(x_1, x_2) = 0. \tag{4}$$

Wir stellen nun alle Reihen auf, welche nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreiten, zugleich mit x_1 verschwinden und in die linke Seite von (4) anstatt x_2 eingeführt, sie zum Verschwinden bringen. Jeder solchen Reihe $x_2 = P_2(x_1)$ entspricht mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel

---

nämlich durch das O. erwähnte Verfahren auch solche wiederholte Wurzeln y dieser Gleichung gefunden, welche ganze Functionen ohne constantes Glied sind.

[1] Vergl. Bd. 99, S. 507; Bd. 100, S. 1179.

x_3 der Gleichungen (3). Um sie alle zu finden, braucht man nur jede der Gleichungen

$$G_1^{(m-1}(x_1, P_2(x_1), x_3) = 0 \qquad G_2^{(m-1}(x_1, P_2(x_1), x_3) = 0$$

nach x_3 auf jede Weise durch nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreitenden Reihen ohne constantes Glied aufzulösen und die beiden Gleichungen genügenden abzusondern. Ist eine von diesen letzteren Reihen $x_3 = P_3(x_1)$, so gewinnt man aus den (3) vorhergehenden Eliminationsgleichungen, nachdem man darin $x_2 = P_2(x_1)$, $x_3 = P_3(x_1)$ gesetzt hat, in der soeben beschriebenen Art mindestens eine Potenzreihe von x_1 $P_4(x_1)$, welche für x_4 in eine jede Gleichung eingesetzt, sie identisch erfüllt. Fährt man so fort, bis man die Gleichungen (1) nach x_m aufgelöst hat, so gelangt man zu Auflösungen der Gleichungen (1):

$$x_2 = P_2(x_1),\ x_3 = P_3(x_1). \ \ .x_m = P_m(x_1),$$

welche nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreitende Reihen ohne constantes Glied sind, und zwar zu allen solchen Systemen.

3. Allein nicht immer führt das auseinandergesetzte Verfahren zum gewünschten Ziele. Es ist ja möglich, dass die zu einer der Zeilen (1), (2)...(3) gehörigen Gleichungen bei der Elimination einer der Veränderlichen nicht so viele Gleichungen liefern, um die noch übrigen Veränderlichen bis auf zwei aus ihnen eliminiren zu können. Dies tritt dann ein, wenn von ihren linken Seiten mindestens zwei einen in allen oder einem Theile der Veränderlichen ganzen Theiler T gemeinsam haben. Ihre Resultante nach einer von ihnen verschwindet dann identisch, und es geht das in Rede stehende System von Gleichungen im Allgemeinen in zwei solche Systeme über, wovon eines mindestens eine Gleichung weniger als dieses enthält. Zwar wenn T nicht zugleich mit allen in ihm vorhandenen Veränderlichen verschwindet, oder wenn T wohl mit ihnen zugleich verschwindet, aber bei hinlänglicher Verkleinerung der absoluten Beträge der Veränderlichen für kein anderes reelle System derselben, so darf man den Factor T ohne Weiteres als bedeutungslos weglassen. Wenn aber jeder positiven Zahl ε Systeme von

reellen Werthen der Veränderlichen, ein jeder absolut genommen kleiner als ε, so entsprechen, dass für sie $T=0$ ist, so haben wir, wie bemerkt, die Gleichung $T=0$ zusammenzustellen mit jener, deren linke Seite nicht durch T theilbar ist. Zu jedem Systeme der Veränderlichen, welches diesen Gleichungen genügt, lassen sich Werthe der übrigen so bestimmen, dass für diese Werthe von $x_1 \ldots x_m$ zusammen die Gleichungen (1) bestehen.

4. Fassen wir nun in der That das Lagrange'sche Verfahren, bei welchem die Werthe von $G(x_1 x_2 \ldots x_m)$ unter der Voraussetzung, dass x_1 constant und die übrigen Veränderlichen mit x_1 durch die Gleichungen (1) zusammenhängen, zu bestimmen sind, ins Auge, so ist zu zeigen, dass die Function $G(x_1 x_2 \ldots x_m)$, auch wenn zwischen $x_1 \ldots x_m$ nur die am Schlusse von Nr. 3 erwähnten Gleichungen, welche zur Darstellung von $x_2 \ldots x_m$ als Functionen von x_1 nicht ausreichen, bestehen, bloss von x_1 abhängt.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Nehmen wir an, jedem Systeme beliebiger Werthe von $x_1 \ldots x_r$ lassen sich Werthe der übrigen Veränderlichen $x_{r+1} \ldots x_m$ so zuordnen, dass für alle diese Werthe $x_1 \ldots x_m$ zusammen, die Functionen $\frac{\partial G}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial G}{\partial x_m}$ zugleich verschwinden und denken wir uns für jedes solche System $x_1 \ldots x_m$ die ganze Function $G(x_1 \ldots x_m)$ berechnet. Nun betrachten wir $x_{r+1} \ldots x_m$ als Functionen von $x_1 \ldots x_r$. Dann erscheint dieses $G(x_1 \ldots x_m)$ als zusammengesetzte Function von $x_1 \ldots x_r$, welche wir mit $\psi(x_1 \ldots x_r)$ bezeichnen wollen. Wir differenziren ψ nach $x_2 \ldots x_r$. Unterscheiden wir die aus $\frac{\partial G}{\partial x_2}$ u. s. w. durch die soeben erwähnte Substitution für $x_{r+1} \ldots x_m$ hervorgehenden Ergebnisse von den allgemeinen $\frac{\partial G}{\partial x_2}$ u. s. w., worin $x_1 \ldots x_m$ von einander unabhängig sind, durch Klammern, so finden wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial G}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial x_{r+1}}\right)\frac{\partial x_{r+1}}{\partial x_k} + \ldots + \left(\frac{\partial G}{\partial x_m}\right)\frac{\partial x_m}{\partial x_k}$$

$$(k = 2 \ldots r).$$

Für die in Rede stehenden Werthsysteme $x_1 \ldots x_m$ verschwinden $\left(\frac{\partial G}{\partial x_2}\right) \ldots \left(\frac{\partial G}{\partial x_m}\right)$; es ist mithin

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_r} = 0.$$

Also hängt $\psi(x_1 \ldots x_r)$ thatsächlich bloss von x_1 ab. Dieser Schluss gilt für jedes zusammengehörige System eindeutig definirter Zweige der Functionen $x_{r+1} \ldots x_m$, woferne die Werthe $x_1 \ldots x_r$ nicht gerade zu einer singulären Stelle derselben gehören. Für die Praxis dürfte schon das soeben erlangte Ergebniss genügen. Man kann es aber insoferne vervollständigen, als man die Beziehung der Functionen von x_1, welche verschiedenen Systemen eindeutiger Zweige von $x_{r+1} \ldots x_m$ entsprechen, zu einander festzustellen sucht. Das wollen wir wenigstens an dem einzigen von den hier berührten Fällen, welcher bei Ermittelung der Extreme einer ganzen Function der drei Veränderlichen $x_1 x_2 x_3$ auftreten kann, durchführen.

5. Hilfssätze. 1. »Haben die beiden partiellen Ableitungen einer ganzen Function von x und y: $G(x, y)$, d. h. $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial G}{\partial y}$ einen zugleich mit x und y verschwindenden, irreduciblen Theiler $H(x, y)$ gemein, so lässt sich $G(x, y)$ auf die Form bringen:

$$G(x, y) = H(x, y)^2 K(x, y) + c,$$

worin auch $K(x, y)$ eine ganze Function von xy, c eine Constante bedeutet.« — Dabei soll $H(x, y)$ bei Zulassung aller reellen und complexen Zahlen unzerlegbar sein, so dass z. B. $x^2 + y^2$ als das Product der beiden linearen Factoren $x + yi$ und $x - yi$ erscheint.

Beweis. Es genügt anzunehmen, dass in $H(x, y)$ zum mindesten y wirklich vorkommt. Da $H(0, 0) = 0$ ist, so gibt es wenigstens eine nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von x fortschreitende Reihe $P(x)$ ohne constantes Glied, wofür die hinsichtlich x identische Gleichung $H(x, P(x)) = 0$ besteht. Bilden wir $G(x, P(x)) = \varphi(x)$, so schliessen wir wie oben, dass

$$\varphi'(x) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) P'(x)$$

ist. $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial G}{\partial y}$ enthalten beide den Factor $H(x, y)$; also ist

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi'(x) = 0.$$

$\varphi(x)$ ist mithin eine Constante, und zwar ist $\varphi(x) = G(0, 0)$.

Betrachten wir nun die ganze Function von x und y:

$$G_1(x, y) = G(x, y) - G(0, 0)$$

als solche von y, so haben die Gleichungen $G_1(x, y) = 0$ und

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

die Wurzel $y = P(x)$ gemein, somit enthält $G_1(x, y)$ den Factor $(y - P(x))^2$. Bemerken wir zunächst nur, dass die Gleichungen $G_1(x, y) = 0$ und $H(x, y) = 0$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ für jeden Werth von x eine gemeinsame Lösung $y = P(x)$ haben. Daraus folgt nämlich, dass $G_1(x, y)$ durch $H(x, y)$ theilbar ist.[1] Genau dasselbe gilt aber auch von den beiden Ausdrücken $G_1(x, y) \quad H(x, y)$ und $H(x, y)$. Wir finden demnach

$$G_1(x, y) = G(x, y) - G(0, 0) = H(x, y)^2 K(x, y),$$

worin $K(x, y)$ eine ganze Function von x und y bedeutet, w. z. b. w.

Um zu zeigen, dass der erste Satz richtig bleibt, wenn wir $H(x, y)$ bloss als unzerlegbar bei alleiniger Zulassung der reellen Zahlen betrachten, haben wir noch zu zeigen den

2. Satz. »Haben $\frac{\partial G}{\partial x}$ und $\frac{\partial G}{\partial y}$ die mit x und y zugleich verschwindenden irreduciblen Theiler $H_1(x, y) \qquad H_k(x, y)$, welche von einander verschieden sind, gemein, so lässt sich $G(x, y)$ auf die Form bringen:

$$G(x, y) = \{H_1(x, y) \cdot \quad . H_k(x, y)\}^2 K(x, y) + c,$$

---

[1] Vergl. Biermann, Theorie der analytischen Functionen, 1887, S. 196.

worin $K(x, y)$ eine ganze Function von x und y, c eine Constante bedeutet.« — Dabei sollen $H_1(x, y) \ldots H_k(x, y)$ wie oben $H(x, y)$ gegenüber den complexen Zahlen unzerlegbar sein.

Beweis. Wir haben nach dem ersten Satze zunächst nur

$$G(x, y) = H_1(x, y)^2 K_1(x, y) + G(0, 0) = H_2(x, y)^2 K_2(x, y) + G(0, 0)$$

unter $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ ganze Functionen von x und y verstanden.

Mithin ist aber

$$H_1(x, y)^2 K_1(x, y) = H_2(x, y)^2 K_2(x, y).$$

Da $H_1(x, y)$ von $H_2(x, y)$ verschieden ist, so muss $K_1(x, y)$ durch $H_2(x, y)^2$ theilbar sein. Also ist $K_1(x, y) = H_2(x, y)^2 L_1(x, y)$ zu setzen, worin $L_1(x, y)$ ein in x und y ganzes Polynom bezeichnet. Wir finden demnach

$$G(x, y) - G(0, 0) = H_1(x, y)^2 H_2(x, y)^2 L_1(x, y).$$

Weiter muss aber

$$G(x, y) = H_3(x, y)^2 K_3(x, y) + G(0, 0)$$

sein, woraus durch Zusammenstellung mit der vorhergehenden Gleichung sich ergibt, dass $L_1(x, y) = H_3(x, y)^2 L_2(x, y)$, also

$$G(x, y) - G(0, 0) = \{H_1(x, y) H_2(x, y) H_3(x, y)\}^2 L_2(x, y)$$

sein muss, unter $L_2(x, y)$ eine ganze Function von xy verstanden. U. s. f.

Aus dem ersten Satze leiten wir noch den nachstehenden ab, wenn wir auch davon zunächst keinen Gebrauch machen werden.

3. Satz. »Es sei $G(y_1 \ldots y_m)$ eine ganze Function von $y_1 \ldots y_m$ ($m \geqq 3$). Haben alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial G}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial G}{\partial y_m}$ einen (auch bei Zulassung der complexen Zahlen) irreducibeln Theiler $H(y_1 \ldots y_m)$, welcher bei der Substitution $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ verschwindet, so ist $G(y_1 \ldots y_m) - G(0 \ldots 0)$ durch das Quadrat von $H(y_1 \ldots y_m)$ theilbar.«

Beweis. Kommt y_1 in $H(y_1 \ldots y_m)$ wirklich vor, so betrachten wir G und H zunächst als ganze Functionen von y_1

und y_2 allein. g, h seien ihre Dimensionen in Bezug auf y_1 und y_2. Nach dem ersten Satze muss dann die hinsichtlich y_1 und y_2 identische Gleichung

$$G(y_1 y_2 \ldots y_m) = H(y_1 y_2 \ldots y_m)^2 L(y_1, y_2) + M \qquad (a)$$

bestehen, worin $L(y_1, y_2)$ eine ganze Function $(g-2h)^{\text{ter}}$ Dimension von y_1 und y_2, M einen davon nicht abhängigen Ausdruck bedeutet. Denkt man sich G und H nach steigenden Potenzen von y_1 und y_2 geordnet und setzt

$$L(y_1, y_2) = \Sigma l_{r,s} y_1^r y_2^s \quad (0 \leqq r+s \leqq g-2h),$$

so erhält man durch Gleichsetzung der Coëfficienten der nämlichen Potenzen von y_1 und y_2 auf beiden Seiten von *(a)* lineare Gleichungen zur Bestimmung der Coëfficienten $l_{r,s}$ und M. Zufolge des ersten Satzes müssen sie eben ein System von Lösungen zulassen, welche demnach rationale Functionen von $y_3 \ldots y_m$ sein werden. Also sind in *(a)* $L(y_1 y_2)$ und M zunächst als rationale Functionen von $y_3 \ldots y_m$ anzusehen.

Aus *(a)* folgt durch Differenzirung nach y_r

$$\frac{\partial G}{\partial y_r} = H \left\{ 2 \frac{\partial H}{\partial y_r} L + H \frac{\partial L}{\partial y_r} \right\} + \frac{\partial M}{\partial y_r} \quad (r = 3 \ldots m) \qquad (b)$$

Jedem beliebigen Systeme $y_2, y_3 \ldots y_m$ entspricht zufolge der Gleichung

$$H(y_1, y_2 \ldots y_m) = 0$$

ein oder mehrere bestimmte Werthe von y_1. Setzen wir einen derselben in *(b)* ein, so verschwinden dafür $\frac{\partial G}{\partial y_r}$ und H, und es ergibt sich, dass

$$\frac{\partial M}{\partial y_r} = 0 \quad (r = 3 \ldots m)$$

ist. M hängt somit von $y_3 \ldots y_m$ gar nicht ab, ist also eine Constante c.

Lässt man $L(y_1, y_2)$ nicht von vorneherein eine ganze Function auch von $y_3 \ldots y_m$ sein, so sei die ganze Function von $y_3 \ldots y_m$: $J(y_3 \ldots y_m)$ der kleinste gemeinschaftliche Nenner der Coëfficienten der nach Potenzen von y'_1 und y'_2 geordneten Function $L(y'_1, y'_2)$, und es sei

$$L(y'_1, y'_2) = K(y'_1 \ldots y'_m) \quad J(y'_3 \ldots y'_m),$$

worin der Zähler ganz in $y'_1 \ldots y'_m$ ist. Wir haben mithin nach *(a)*, da $M = c$ ist,

$$G(y'_1 \ldots y'_m) - c = \frac{H(y'_1 \ldots y'_m)^2 K(y'_1 \ldots y'_m)}{J(y'_3 \ldots y'_m)}.$$

Links steht eine ganze Function von $y'_1 \ldots y'_m$, somit auch, rechts. Da H irreducibel ist, so muss $J(y'_3 \ldots y'_m)$ eine Constante sein, die wir gleich 1 setzen dürfen. Jetzt ergibt sich auch, dass $c = G(0 \ldots 0)$ ist.

6. Zusatz zu dem Lagrange'schen Verfahren, die Frage zu entscheiden, ob für eine ganze Function von $x_1 x_2 x_3$ $G(x_1, x_2, x_3)$ der Werth $G(0, 0, 0) = 0$ ein Extrem ist oder nicht.[1] Dabei kommt es im Wesentlichen darauf an, die Gleichungen

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial G}{\partial x_3} = 0$$

bei constantem x_1, dessen Betrag jedoch unter einer gegebenen Zahl liegen darf, nach x_2 und x_3 aufzulösen und die dafür gefundenen Reihen in $G(x_1, x_2, x_3)$ einzusetzen. Wie schon in Nr. 4 bemerkt ist, haben wir noch zu untersuchen, was ein gemeinsamer Theiler von $\frac{\partial G}{\partial x_2}$ und $\frac{\partial G}{\partial x_3}$ $H(x_1, x_2, x_3)$ hier in dem Falle zu bedeuten hat, dass er ausser für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ für andere Systeme von reellen Werthen $x_1 x_2 x_3$, deren Beträge beliebig klein sind, verschwindet.

Sehen wir nun G und H zunächst als ganze Functionen von x_2 und x_3 allein an, so finden wir durch Anwendung des ersten Satzes von Nr. 5, dass eine in Bezug auf $x_2 x_3$ identische Gleichung von der Form

$$G(x_1 x_2 x_3) = H(x_1 x_2 x_3)^2 K(x_2, x_3) + M \qquad (c)$$

besteht, worin $K(x_2, x_3)$ eine ganze Function von x_2 und x_3 ist. Hieraus können wir durch eine Überlegung, welche wir schon

[1] Vergl. Bd. 100, S. 1179.

beim Beweise des dritten Satzes in Nr. 5 anstellen müssten, schliessen, dass $K(x_2 x_3)$ und M rationale Functionen von x_1 sind. Wir gelangen somit zum Satze: »Setzen wir in $G(x_1, x_2, x_3)$ für x_2 und x_3 ein System von Werthen, das bei willkürlichem x_1 die Gleichung $H(x_1, x_2, x_3) = 0$ befriedigt, so geht $G(x_1, x_2, x_3)$ in eine rationale Function M von x_1 allein über.« Diese Function von M von x_1 ist den a. a. O aufgezählten Functionen von x_1 anzureihen, wenn man die obere und untere Grenze von $G(x_1, x_2, x_3)$ bei constantem x_1 ermitteln will.

7 Zusatz zu dem Scheeffer'schen Verfahren, die am Eingange von Nr. 6 angeführte Frage zu entscheiden.[1]

Nach demselben sind die Gleichungen

$$x_2 \frac{\partial G}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0 \quad x_3 \frac{\partial G}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial G}{\partial x_3} = 0 \quad x_1 \frac{\partial G}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0 \tag{1}$$

(wovon eine eine Folge der beiden andern ist) und

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \quad (r > 0) \tag{2}$$

nach $x_1 x_2 x_3$ in jeder möglichen Weise durch Reihen nach steigenden ganzen oder gebrochenen Potenzen von r ohne constantes Glied aufzulösen und hierauf diese Reihen anstatt $x_1 x_2 x_3$ in $G(x_1, x_2, x_3)$ einzusetzen. Wie a. a. O. dargelegt ist, lassen sich alle die genannten Systeme von Reihen stets ermitteln, wenn die linken Seiten der Gleichungen (1) nicht durch eine und dieselbe ganze Function $H(x_1, x_2, x_3)$ theilbar sind, welche nicht bloss für das System $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, sondern auch für andere Systeme reeller Werthe $x_1 x_2 x_3$ von beliebig kleinem absoluten Betrage verschwindet und dabei nicht etwa eine ganze Function von r^2 ist. Wie früher, so möge auch jetzt $H(x_1, x_2, x_3)$ irreducibel sein, jedoch bei Zulassung bloss der reellen Zahlen.[2]

Da $H(x_1, x_2, x_3)$ keine ganze Function von r^2 ist, so können die Ausdrücke

---

[1] Vergl. Bd. 99, S. 506. Daselbst sind die unabhängigen Veränderlichen mit $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ bezeichnet.

[2] Es gilt jedoch das Folgende auch, die Unzerlegbarkeit von $H(x_1, x_2, x_3)$ auf die complexen Zahlen bezogen ist.

$$x_2 \frac{\partial H}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial H}{\partial x_2} \quad x_3 \frac{\partial H}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial H}{\partial x_3} \quad x_1 \frac{\partial H}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial H}{\partial x_1}$$

nicht alle identisch Null sein. Nehmen wir also z. B. an, der erste sei nicht Null. Durch die Gleichungen

$$H(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \tag{3}$$

werden $x_2 x_3$ als algebraische Functionen von x_1 und r definirt. Die zu einem Werthsysteme $x_1 x_2 x_3$, wofür $x \frac{\partial H}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial H}{\partial x_2}$ nicht verschwindet, gehörigen partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0 \tag{4}$$

$$x_1 + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0. \tag{5}$$

Führen wir nun in $G(x_1 x_2 x_3)$ für $x_2 x_3$ zwei zusammengehörige eindeutige Zweige der soeben definirten Functionen von x_1 und r ein, so geht G in eine Function von x_1 und r: $\varphi(x_1, r)$ über. Wir haben alsdann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial G}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \tag{6}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (4)—(6) $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial x_3}{\partial x_1}$ so erhält man

$$\left(x_2 \frac{\partial H}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial H}{\partial x_2}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \frac{\partial H}{\partial x_3} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

und hieraus vermöge der Gleichungen (1)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0.$$

$\varphi(x_1, r)$ hängt somit von x_1 gar nicht ab, ist also Function von r allein.

Es dürfte aber nicht immer jedem Paare zusammengehöriger Zweige der Functionen $x_2 x_3$ von x_1 und r die nämliche Function von r entsprechen, da die Resultante der drei Gleichungen $G(x_1 x_2 x_3) = W$ und (3) nach x_2 und x_3, welche nur r^2 und W enthält, reducibel sein kann.

Auf die nämliche Weise lassen sich die ähnlichen Fragen, welche bei Ermittelung der Extreme von ganzen Functionen von mehr als drei Veränderlichen nach dem Scheeffer'schen Verfahren auftauchen können, erledigen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Stolz Otto

Artikel/Article: Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen. 85-97