Über symmetrische Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung

Dr. **Gustav Kohn,**
Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

Die allbekannten Sätze über Grad und Gewicht einer symmetrischen Function sind nur die wichtigsten zwei aus einer bisher nicht aufgestellten Reihe von analogen Bemerkungen über symmetrische Functionen. Man kann, wenn eine ganze Function der Coëfficienten einer Gleichung n^{ten} Grades vorliegt, durch blosse Vergleichung der in den einzelnen Posten auftretenden Exponenten nicht nur den Grad der Function in einer Wurzel und in allen Wurzeln, sondern allgemein ihren Grad in r von den Wurzeln ($r = 1, 2, \ldots n$) genau angeben. Ist die Frage nach diesem Grad einmal aufgeworfen, so ist die Antwort, wie in Art. 1 gezeigt wird, auf eine nahezu selbstverständliche Art zu erlangen. Dass es nichtsdestoweniger nützlich ist, diese Antwort ein- für allemal zu registriren, wird durch einige Anwendungen illustrirt, welche die Darstellung des Wurzelaggregats $\Sigma \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_n^{p_n}$, der Discriminante und der nicht-unitären symmetrischen Functionen durch die Coëfficienten, sowie die Structur der Seminvarianten betreffen.

1. Es mögen die elementaren symmetrischen Functionen der Grössen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$$

mit

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

bezeichnet werden, so dass

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \Sigma \alpha_1 \\ a_2 &= \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \\ & \\ a_n &= \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Es mögen ferner durch

$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_r$$

die elementaren symmetrischen Functionen der r ersten unter den Grössen α, d. i. von

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_r$$

und durch

$$c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-r}$$

die elementaren symmetrischen Functionen der $n-r$ übrigen, d. i. von

$$\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$$

bezeichnet werden.

Fasst man in den Gleichungen (1), durch welche $a_1, a_2, \ldots a_n$ definirt sind, auf den rechten Seiten diejenigen Glieder zusammen, welche in den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ den höchsten oder, was auf dasselbe hinauskommt, in den Grössen $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ den niedrigsten Grad besitzen, und deutet die übrigen Glieder durch Punkte an, so erhält das Gleichungssystem (1) die Form.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_1 + \\ a_2 &= b_2 + \\ & \\ a_r &= b_r + \\ a_{r+1} &= b_r c_1 + \\ a_{r+2} &= b_r c_2 + \\ & \\ a_n &= b_r c_{n-r} + \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Infolge dessen wird, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ irgend welche positive ganze Zahlen bedeuten,

$$\begin{aligned} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n} = (b_1 + \ldots)^{\lambda_1} (b_2 + \ldots)^{\lambda_2} \ldots (b_r + \ldots)^{\lambda_r} . \\ . (b_r c_1 + \ldots)^{\lambda_{r+1}} (b_r c_2 + \ldots)^{\lambda_{r+2}} \ldots (b_r c_{n-r} + \quad)^{\lambda_n} \\ = b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_{r-1}^{\lambda_{r-1}} \, b_r^{\lambda_r + \lambda_{r+1} + \ldots \lambda_n} . c_1^{\lambda_{r+1}} c_2^{\lambda_{r+2}} \ldots c_{n-r}^{\lambda_n} + . \end{aligned}$$

wo die Punkte wieder Terme bedeuten, die in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ von niedrigerem und in $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ von höherem Grade sind als der hingeschriebene Term, welcher in den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ vom Grade

$$1.\lambda_1+2\lambda_2+\ldots(r-1)\lambda_{r-1}+r(\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n)$$

und in den Grössen $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ vom Grade

$$(n-r).\lambda_n+(n-r-1).\lambda_{n-1}+\ldots 2.\lambda_{r+2}+1\,\lambda_{r+1}$$

ist. Allgemein hat man desshalb das Resultat:

Ist eine beliebige ganze Function der Coëfficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ vorgelegt

$$\Phi \equiv \Sigma\, C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}, \tag{2}$$

wo die Summe über gewisse Combinationen von ganzzahligen Werthen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sich erstreckt, so werden durch das Polynom

$$\Psi \equiv \Sigma\, C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_{r-1}^{\lambda_{r-1}} b_r^{\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n} . c_1^{\lambda_{r+1}} c_3^{\lambda_{r+2}} \ldots c_{n-r}^{\lambda_n} \tag{3}$$

diejenigen Glieder im Ausdruck von Φ durch die Wurzeln dargestellt, welche in den r Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ den höchsten Grad besitzen, wenn die Summe in Ψ über jene unter den Werthecombinationen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ erstreckt wird, für welche

$$1.\lambda_1+2.\lambda_2+\ldots(r-1).\lambda_{r-1}+r.(\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n)$$

den grössten Werth besitzt, und es werden durch den Ausdruck Ψ die Glieder von Φ dargestellt, welche in den $n-r$ Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ den niedrigsten Grad besitzen, wenn die Summe in Ψ über jene unter den Werthecombinationen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ausgedehnt wird, für welche

$$(n-r).\lambda_n+(n-r-1).\lambda_{n-1}+\ldots 2.\lambda_{r+2}+1\,\lambda_{r+1}$$

den kleinsten Werth hat.

Da für keine zwei Glieder des Polynoms Ψ all die Grössen $b_1, b_2, \ldots b_r$, $c_1, c_2, \ldots c_{n-r}$ dieselben Exponenten besitzen, und da jeder Coëfficient $C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ von Null verschieden vorausgesetzt ist, so kann dieses Polynom nicht gleich Null sein.

Denn man hätte sonst eine Relation zwischen den Grössen $b_1, b_2, \ldots b_r$, $c_1, c_2, \ldots c_{n-r}$, während diese Grössen ihrer Definition zufolge völlig von einander unabhängig sind.

Bezeichnen wir der Kürze halber den grössten, respective kleinsten Werth, den ein Ausdruck in den Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ für irgend ein Glied der Function Φ annimmt, dadurch, dass wir vor dem Ausdruck das Wort max., respective min. vorausschreiben, so haben wir den folgenden

Lehrsatz: In dem Ausdruck einer beliebigen ganzen Function der Coëfficienten $\Phi = \Sigma C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ durch die Wurzeln kommen nur solche Wurzelproducte als Posten vor, bei denen der Grad in r von den Wurzeln $(r = 1, 2, \ldots n)$ zwischen bestimmten Grenzen liegt. Man hat

$$\max\left[1 . \lambda_1 + 2 . \lambda_2 + \ldots (r-1) . \lambda_{r-1} + r(\lambda_r + \lambda_{r+1} + \ldots \lambda_n)\right] \geqq g_r \geqq$$
$$\geqq \min\left[r . \lambda_n + (r-1) . \lambda_{n-1} + \ldots 1 . \lambda_{n-r+1}\right]$$

und es sind stets einzelne Posten vorhanden, für welche der Grad die angegebenen Grenzen thatsächlich erreicht.

Bemerkt sei, dass die Angabe der Grenzen für den Grad in r Wurzeln ganz unmittelbar vollzogen werden könnte, und nur der Umstand, dass die Posten, bei denen der Grad g_r durch die eine oder die andere der Grenzen gegeben wird, sich untereinander nicht zerstören können, nicht so ganz selbstverständlich ist.

In unserem Lehrsatz liegt für $r = 1$ der Satz über den Grad einer symmetrischen Function, wonach der Grad in den Coëfficienten mit dem Grad in einer Wurzel übereinstimmt, und für $r = n$ der Satz über das Gewicht, wonach die Constanz des Gewichtes $1 . \lambda_1 + 2 . \lambda_2 + \ldots n\lambda_n$ für die Homogenität in den Wurzeln nothwendig und hinreichend ist.

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass im Falle die Function Φ der Coëfficienten isobar, also in den Wurzeln homogen ist, diejenigen Terme, welche in r Wurzeln einen höheren Grad besitzen als alle anderen, gleichzeitig in $n-r$ Wurzeln (nämlich den übrigen $n-r$) einen niedrigeren Grad besitzen als alle anderen, so dass in diesem Falle die Angabe der unteren Grenzen für die Gradzahlen g_r in Verbindung mit der Gleichung für das Gewicht den vollen Inhalt unseres Lehrsatzes wiedergibt.

2. Denken wir uns, um eine Anwendung von dem in Art. 1 bewiesenen Lehrsatz zu machen, die symmetrische Function der Wurzeln

$$\Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n} \qquad (\tau_1 \geqq \tau_2 \geqq \tau_3 \ldots \geqq \tau_n)$$

durch die Coëfficienten ausgedrückt. Ist

$$\Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n} = \Sigma C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}, \tag{4}$$

wo jedes $C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$ einen gewissen von Null verschiedenen Zahlencoëfficienten bedeutet und die Summe rechts über gewisse ganzzahlige Werthecombinationen der λ sich erstreckt, so fragt es sich, was unser Lehrsatz über diese Werthecombinationen aussagt.

Der volle Inhalt dieses Lehrsatzes wird nach Art. 1 wiedergegeben durch die $n-1$ Ungleichungen

$$r.\lambda_n + (r-1).\lambda_{n-1} + \ldots + 1\ \lambda_{n-r+1} \geqq \tau_n + \tau_{n-1} + \ldots \tau_{n-r+1}$$
$$(r = 1, 2, \ldots (n-1)) \tag{5}$$

in Verbindung mit der Gleichung

$$n.\lambda_n + (n-1)\lambda_{n-1} + \ldots 2.\lambda_2 + 1.\lambda_1 = \tau_n + \tau_{n-1} + \ldots \tau_2 + \tau_1,$$

wobei noch zu bemerken wäre, dass es einzelne Glieder in (4) geben muss, für die in den Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt.

Dem System dieser Beschränkungen für die auftretenden Werthecombinationen der λ wollen wir noch eine andere Form geben. Zu diesem Zwecke denken wir uns aus dem Gleichungssystem

$$r.\lambda_n + (r-1).\lambda_{r-1} + \ldots + 1.\lambda_{n-r+1} = \tau_n + \tau_{n-1} + \ldots \tau_{n-r+1}$$
$$(r = 1, 2, \ldots n),$$

welches entsteht, wenn man neben der Gewichtsgleichung auch in den Ungleichungen (5) das Gleichheitszeichen bestehen lässt, successive die Grössen $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots \lambda_1$ ausgerechnet. Man erhält offenbar wegen $\tau_n \leqq \tau_{n-1} \leqq \tau_{n-2} \ldots \leqq \tau_1$ für die genannten Grössen ganze positive Zahlenwerthe, welche wir respective mit

$$\varkappa_n, \varkappa_{n-1}, \ldots \varkappa_1$$

bezeichnen wollen. Das Coëfficientenproduct

$$a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots a_n^{\varkappa_n},$$

dessen Exponenten so definirt sind, ist nun, wie man sich sofort überzeugt, nichts Anderes als das zum Wurzelaggregat $\Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n}$ conjugirte Coëfficientenproduct, das längst in die Theorie der symmetrischen Functionen eingeführt ist, und die aus unserem Lehrsatz gezogenen Folgerungen lassen sich desshalb folgendermassen aussprechen:

Drückt man das Wurzelaggregat $\Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n}$, dessen conjugirtes Coëfficientenproduct $a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots a_n^{\varkappa_n}$ ist, durch die Coëfficienten aus, so kann dabei der Term

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

nur dann auftreten, wenn nebst der Gewichtsgleichung noch die $n-1$ Ungleichungen

$$r.\lambda_n + (r-1).\lambda_{n-1} + \ldots 1.\lambda_{n-r+1} \geqq$$
$$\geqq r.\varkappa_n + (r-1).\varkappa_{n-1} + \quad 1.\varkappa_{n-r+1} \qquad (r = 1, 2 \ldots (n-1))$$

erfüllt sind.

Aus diesem Satze lässt sich in einfachster Weise die Möglichkeit ableiten, den Tafeln für die einfachen symmetrischen Functionen eine solche Gestalt zu geben, dass jenseits einer der beiden Tafeldiagonalen immer lauter Nullen zu stehen kommen. Diese Möglichkeit, für welche meines Wissens bisher ein allgemeiner Beweis nicht publicirt wurde,[1] fliesst aus der folgenden Bemerkung:

Ordnet man die Glieder $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$, für welche das Gewicht $1.\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots n\lambda_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots \tau_n$ ist, erst in Gruppen nach dem Grad in den Coëfficienten und lässt immer die Gruppe niedri-

[1] Vergl. Durfee, Amer. Journal of Math., V, p. 348. Durfee stützt sich bei seinen Auseinandersetzungen auf einen Satz, den Cayley in den Philos. Transactions vom Jahre 1857 aufgestellt, aber, wie er ausdrücklich erwähnt, nicht allgemein bewiesen hat (»...I have not investigated the general proof«).

geren Grades der vom höheren Grade vorangehen, ordnet man ferner innerhalb einer Gruppe die Glieder so, dass von zwei Gliedern desselben Grades dasjenige vorangeht, bei dem a_n den höheren Exponenten hat, und wenn a_n in beiden Gliedern denselben Exponenten hat, dasjenige, für welches a_{n-1} den höheren Exponenten besitzt u. s. f., so kommen in dem Ausdruck des Wurzelaggregats $\Sigma \alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \alpha_n^{\varkappa_n}$ keine Glieder vor, welche auf das conjugirte Coëfficientenproduct folgen.

Die Richtigkeit dieser Bemerkung ergibt sich aus dem hier aufgestellten Satze sofort. Denn aus dem Satze über den Grad (der in unserer Ungleichung für $r = n-1$ liegt) fliesst, dass in dem Ausdruck von $\Sigma \alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \alpha_n^{\varkappa_n}$ kein Glied einer Gruppe vorkommen kann, welche auf die Gruppe folgt, der das conjugirte Coëfficientenproduct angehört. Innerhalb dieser Gruppe ist aber dieses Coëfficientenproduct das letzte Glied, denn für jedes folgende Glied $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ ist der Annahme nach für ein gewisses r

$$\lambda_{n-r} < \varkappa_{n-r},$$

während

$$\lambda_n = \varkappa_n, \quad \ldots \lambda_{n-r+1} = \varkappa_{n-r+1},$$

was mit der Ungleichung

$$(r+1)\lambda_n + r.\lambda_{n-1} + \ldots 1.\lambda_{n-r} \geqq (r+1).\varkappa_n + r.\varkappa_{n-1} + \ldots 1.\lambda_{n-r}$$

unverträglich ist.

Die Tafel für die symmetrischen Functionen $\Sigma \alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \alpha_n^{\varkappa_n}$ vom Grade p in den Wurzeln hat die Anordnung, dass jede Zeile der Tafel einer dieser Functionen, jede Colonne einem der Coëfficientenproducte $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ vom Gewichte p zugehört und an der Schnittstelle von Zeile und Colonne der Zahlenfactor eingetragen erscheint, den das der Colonne zugehörige Coëfficientenproduct im Ausdruck des der Zeile zugehörigen Wurzelaggregats besitzt.

Es mögen den Colonnen der Reihe nach von links nach rechts die Coëfficientenproducte $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ in der oben für sie festgesetzten Reihenfolge zugehören, und es mögen den ihnen beziehungsweise conjugirten Wurzelaggregaten der Reihe nach die Zeilen von unten nach oben zugewiesen sein. Dann wird die Zeile eines Wurzelaggregats immer von der Colonne des conjugirten Coëfficientenproductes in der Diagonale getroffen, welche die linke untere mit der rechten oberen Ecke der Tafel verbindet, und hinter dieser Schnittstelle werden der eben bewiesenen Bemerkung zufolge nur Nullen zu stehen kommen.

3. Ein zweites Beispiel für die Anwendung des in Art. 1 bewiesenen Lehrsatzes soll uns die Discriminante liefern.

Es sei

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2 = \\ = \Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2}\dots a_n^{\lambda_n},$$

wo $a_0=1$ dazu verwendet worden ist, den Ausdruck zu einem homogenen zu machen.

Da das Product der sämmtlichen quadrirten Wurzeldifferenzen den homogenen Factor vom Grade $r(r-1)$ in den r Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2\dots(\alpha_{r-1}-\alpha_r)^2 \qquad (r=2, 3, \dots n)$$

enthält, so kann in der Entwicklung dieses Productes kein Glied vorkommen, das in r Wurzeln $(r=2, 3, \dots n)$ einen Grad besitzt, der niedriger ist als $r(r-1)$. Es werden also nach unserem Lehrsatz in der Darstellung der Discriminante durch die Coëfficienten nur solche Posten $C_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1}\dots a_n^{\lambda_n}$ vorkommen können, für welche die $n-1$ Ungleichungen

$$r\lambda_n+(r-1)\lambda_{n-1}+\dots 1\,.\,\lambda_{n-r+1} \geqq r(r-1) \quad (r=2,3,\dots n-1) \tag{6}$$

und neben ihnen die Gleichungen für Gewicht und Grad

$$0\,.\,\lambda_0+1\,.\,\lambda_1+\dots n\lambda_n = n(n-1) \tag{7}$$

$$\lambda_0+\lambda_1+\ \ .\lambda_n = 2(n-1) \tag{8}$$

erfüllt sind.

Subtrahirt man von der Ungleichung (6) die Gleichung (7) und addirt die mit $(n-r)$ multiplicirte Gleichung (8), so resultirt:

$$(n-r)\,.\,\lambda_0+(n-r-1)\,.\,\lambda_1+\dots 1\,.\,\lambda_{n-r} \geqq (n-r)(n-r-1) \\ (r=2, 3, \dots n).$$

Wir finden:

In der als Function der Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ dargestellten Discriminante können nur solche Glieder $C_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ vorkommen, bei denen die Exponenten $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_n$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{array}{r} r.\lambda_r + (r-1).\lambda_{r-1} + \quad 1.\lambda_{n-r+1} \geqq r(r-1) \\ r.\lambda_0 + (r-1).\lambda_1 + \quad 1.\lambda_{r-1} \geqq r(r-1) \end{array}\right\} (r = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Für $r = 2$ sagt dieser Satz, dass die Discriminante in jeder der beiden Formen

$$a_n \varphi_0 + a_{n-1}^2 \varphi_1 \quad \text{und} \quad a_0 \psi_0 + a_1^2 \psi_1$$

sich darstellt, wo $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ ganze Functionen der Coëfficienten bedeuten. Dies ist aber ein sehr bekannter Satz, den Joachimsthal zuerst aufgestellt hat.

Eine Verallgemeinerung dieses Joachimsthal'schen Satzes hat Salmon ohne Beweis (Modern Algebra, sec. ed., p. 87, Fussnote) mitgetheilt, welche dahin geht, dass, wenn a_0 durch z^r, a_1 durch z^{r-1}, $\ldots a_{r-1}$ durch theilbar ist, die Discriminante durch $z^{r(r-1)}$ theilbar wird. Dies ist aber offenbar nur eine andere Form des hier aufgestellten Satzes. Es wäre nur zu bemerken, dass Salmon, wie er erwähnt, sein Resultat durch geometrische Überlegungen erlangt hat, während es hier als Ausdruck einer sehr einfachen algebraischen Bemerkung erscheint.

Man kann übrigens den Satz von Joachimsthal noch in anderer Richtung verallgemeinern:

Jede ganze symmetrische Function der Wurzeldifferenzen, die verschwindet, wenn r von den Wurzeln einander gleich gesetzt werden, besitzt die Form:

$$a_n \varphi_0 + a_{n-1} \varphi_1 + \ldots a_{n-r+2} \varphi_{r-2} + a_{n-r+1}^2 \varphi_{r-1},$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{r-1}$ ganze Functionen der Coëfficienten bedeuten, deren letzte nur von den Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_{n-r}$ abhängt.

Ein Beweis für diese Verallgemeinerung geht durch Specialisirung aus Art. 5 hervor.

4. Wir verwerthen jetzt die Entwicklungen des Art. 1 zum Beweis des folgenden Satzes, der als Hilfssatz bei manchen Untersuchungen gute Dienste leistet:

Hilfssatz: Ist r der kleinste Index, den der Schlusscoëfficient für ein Glied von $\Phi = \Sigma_\lambda C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$ besitzt, so ist auch r die kleinste Anzahl verschiedener Wurzeln, die als Factoren in einem Wurzelproduct vorkommen, das bei der Darstellung von Φ durch die Wurzeln als Posten resultirt. Ist überdies k die niedrigste Potenz, in welcher a_r als Schlusscoëfficient auftritt, so ist k auch die niedrigste Potenz, in welcher eine der r Wurzeln in einem Wurzelproducte mit nur r verschiedenen Wurzeln vorkommt.

Der erste Theil dieses Hilfssatzes ist eine Consequenz des in Art. 1 aufgestellten Lehrsatzes. Dass a_r Schlusscoëfficient in einem Gliede von Φ sein soll, heisst so viel, als dass für dieses Glied

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{r+1} = 0 \text{ und } \lambda_r > 0,$$

und dass r der kleinste Index eines Schlusscoëfficienten ist, heisst soviel, als dass für kein Glied von Φ

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda_{r+1} = \lambda_r = 0.$$

Aus diesen Voraussetzungen folgt die Gleichung

$$\min\left[(n-r)\,.\,\lambda_n + (n-r-1)\lambda_{n-1} + \quad 1\,.\,\lambda_{r+1}\right] = 0$$

und die Ungleichung

$$\min\left[(n-r+1)\,.\,\lambda_n + (n-r)\lambda_{n-1} + \quad 1\,.\,\lambda_r\right] > 0.$$

Dem Lehrsatz des Art. 1 zufolge sagt aber die Gleichung, dass in $\Phi = \Sigma_\tau [K_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n} \Sigma \alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \quad . \alpha_n^{\tau_n}]$ die Wurzelproducte $\alpha_1^{\tau_1} \alpha_2^{\tau_2} \ldots \alpha_n^{\tau_n}$ niedrigsten Grades in $n-r$ Wurzeln in diesen Wurzeln vom Grade Null sind und die Ungleichung, dass die Wurzelproducte vom niedrigsten Grade in $n-r+1$ Wurzeln in diesen Wurzeln einen von Null verschiedenen Grad besitzen. Das ist aber nur eine andere Ausdrucksform für die als Folge der Voraussetzungen im ersten Theil des Hilfssatzes behauptete Eigenschaft.

Um auch den zweiten Theil dieses Hilfssatzes zu beweisen, machen wir davon Gebrauch, dass nach Art. 1 die Summe der Glieder von $\Phi = \Sigma_\tau [K_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n} \Sigma \alpha_1^{\tau_1}\alpha_2^{\tau_2}\ldots\alpha_n^{\tau_n}]$, die in den $n-r$ Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}\ldots\alpha_n$ den niedrigsten Grad, d. i. im vorliegenden Fall den Grad Null, besitzen, angegeben werden kann. Der Ausdruck Ψ des Art. 1, der aufzustellen ist, schreibt sich im vorliegenden Specialfall

$$\Sigma_\lambda C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r 0 0\ldots 0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2}\ldots b_r^{\lambda_r},$$

weil die Summe in Ψ nach Art. 1 über alle in Φ vorhandenen Werthecombinationen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\lambda_n$ auszudehnen ist, für welche der Ausdruck $(n-r).\lambda_n+(n-r-1)\lambda_{n-1}+\ \ 1.\lambda_{r+1}$ seinen kleinsten Werth hat, d. h. im vorliegenden Fall über alle Werthecombinationen, für welche $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ .\lambda_{r+1} = 0$.

Nun besteht die Voraussetzung im zweiten Theil des Hilfssatzes darin, dass in den Werthecombinationen der λ, für welche $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots\lambda_{r+1} = 0$, k der kleinste Werth von λ_r ist. Es wird also dem Lehrsatz des Art. 1 zufolge durch k auch der niedrigste Grad gegeben sein, in dem eine der Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots\alpha_n$, deren elementare symmetrische Functionen die b sind, in einem Posten der durch die Wurzeln ausgedrückten Function $\Sigma_\lambda C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r 0 0\ldots 0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2}\ldots b_r^{\lambda_r}$ vorkommt. Somit ist auch der zweite Theil des Hilfssatzes bewiesen.

Es wird wohl kaum nöthig sein besonders hervorzuheben, dass der eben bewiesene Hilfssatz als Beispiel dafür aufzufassen ist, dass aus dem Ausdruck einer ganzen Function Φ der Coëfficienten, neben den im Lehrsatz des Art. 1 direct erwähnten noch andere complicirtere Gradzahlen durch Vergleichung der Exponenten λ in den einzelnen Posten von Φ zu erlangen sind. Der Ausdruck Ψ des Art. 1 ist nämlich eine ganze Function sowohl in den elementaren symmetrischen Functionen $b_1, b_2, \ldots b_r$ der r Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\alpha_r$, als auch in den elementaren symmetrischen Functionen $c_1, c_2, \ldots c_{n-r}$ der $n-r$ übrigen Wurzeln, und auf diese ganze Function kann man neuerdings die Betrachtungen des Art. 1 unmittelbar anwenden, da die Exponenten in den Gliedern von Ψ durch jene in den Gliedern von Φ mitgegeben sind. So findet man z. B.: Der Grad der Glieder von Φ, die in r Wurzeln vom

6. Eine Seminvariante kann definirt werden als ganze homogene symmetrische Function der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, welche bei Anwendung des Processes

$$\delta = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \ldots \frac{\partial}{\partial\alpha_r}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_{r+1}} + \frac{\partial}{\partial\alpha_{r+2}} + \ldots \frac{\partial}{\partial\alpha_n}\right) = \delta_b + \delta_c$$

das Resultat Null ergibt.

Schon in unserer Bezeichnung erscheint der Differentiationsprocess δ in zwei δ_b und δ_c zerlegt, wobei δ_b den ersten Klammerausdruck und δ_c den zweiten bedeuten soll. Der Process δ_b vermindert, sofern er ein von Null verschiedenes Resultat liefert, auf ein Wurzelproduct angewandt, dessen Grad in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ um eine Einheit und lässt den Grad in den Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ ungeändert, während der Process δ_c, wenn er nicht Null liefert, umgekehrt den Grad in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ ungeändert lässt und jenen in den Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ um eine Einheit verringert.

Ist jetzt Φ eine Summe von mit Zahlenfactoren versehenen Wurzelproducten und Ψ die Summe von denjenigen unter ihnen, welche in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ den höchsten Grad besitzen, so wird durch $\delta_c\Psi$ die Summe der Terme in dem Ausdruck

$$\delta\Phi = \delta_b\Phi + \delta_c\Phi$$

gegeben sein, die einen höheren Grad in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ besitzen als die übrigen Terme desselben Ausdruckes. Es wird desshalb, wenn $\delta\Phi = 0$ vorausgesetzt wird, die Richtigkeit der Gleichung $\delta_c\Psi = 0$ zu schliessen sein.

Es sei jetzt eine Seminvariante als Function der Coëfficienten gegeben durch den Ausdruck

$$\Phi = \Sigma_\lambda C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n},$$

der durch $a_0 = 1$ homogen gemacht ist, dann wird nach Art. 1

$$\Psi = \Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} a_0^{\lambda_0} b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \ldots b_{r-1}^{\lambda_{r-1}} b_r^{\lambda_r+\lambda_{r+1}\cdots\lambda_n} . c_1^{\lambda_{r+1}} c_2^{\lambda_{r+2}} \ldots c_{n-r}^{\lambda_n},$$

wo die b die elementaren symmetrischen Functionen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, die c jene von $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots \alpha_n$ bedeuten und die Summe über diejenigen Werthecombinationen der λ zu erstrecken ist, für welche $1.\lambda_1+2.\lambda_2+\ldots(r-1)\lambda_{r-1}+r(\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n)$ seinen grössten Werth annimmt.

Ist g der Grad von Φ, so hat man für jedes Werthesystem der λ

$$\lambda_0+\lambda_1+\ldots\lambda_n=g$$

und es ist

$$1.\lambda_1+2.\lambda_2+\ldots(r-1).\lambda_{r-1}+r(\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n)=$$
$$=rg-[r.\lambda_0+(r-1).\lambda_1+\ldots1.\lambda_{r-1}],$$

so dass wir auch sagen können, dass die Summe in dem Ausdruck von Ψ sich über jene Werthecombinationen der λ erstreckt, für welche

$$r.\lambda_0+(r-1).\lambda_1+\ldots1.\lambda_{r-1}$$

seinen kleinsten Werth annimmt.

Nach Qbigem ist nun

$$\delta_c\Psi=\Sigma[C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}a_0^{\lambda_0}b_1^{\lambda_1}\ldots b_{r-1}^{\lambda_{r-1}}b_1^{\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n}$$
$$.\delta_c(c_1^{\lambda_{r+1}}c_2^{\lambda_{r+2}}\ldots c_{n-r}^{\lambda_n})=0.$$

Das Verschwinden dieser ganzen homogenen Function der Grössen $a_0, b_1, b_2,\ldots b_r$ zieht aber weiterhin das Verschwinden ihrer Coëfficienten nach sich, da die Grössen $b_1, b_2,\ldots b_r$ ihrer Bedeutung zufolge von einander völlig unabhängig sind, d. h. es ist

$$\delta_c\Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}c_1^{\lambda_{r+1}}c_2^{\lambda_{r+2}}\ldots c_{n-r}^{\lambda_n}=0,$$

wo die Summe sich über jene Werthecombinationen erstreckt, welche durch irgend eine bestimmte Wahl von $\lambda_1, \lambda_2,\ldots\lambda_r$ resultiren, bei der $r\lambda_0+(r-1)\lambda_1+\ldots1.\lambda_{r-1}$ seinen kleinsten Werth hat.

Die ganze Function $\Sigma C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}c_1^{\lambda_{r+1}}c_2^{\lambda_{r+2}}\ldots c_n^{\lambda_n}$ der elementaren symmetrischen Functionen $c_1, c_2,\ldots c_{n-r}$ der Wurzeln $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2},\ldots\alpha_n$, von der eben nachgewiesen wurde, dass sie bei Anwendung des Processes

$$\delta_c=\frac{\partial}{\partial\alpha_{r+1}}+\frac{\partial}{\partial\alpha_{r+2}}+\ldots\frac{\partial}{\partial\alpha_n}$$

verschwindet, ist eine Seminvariante der Form

$$x_1^{n-r}-c_1x_1^{n-r-1}x_2+c_2x_1^{n-r-2}x_2^2-\ldots(-1)^{n-r}c_{n-r}x_2^{n-r},$$

höchsten Grade sind, in r' von diesen r Wurzeln ist durch den grössten Werth gegeben, den der Ausdruck $1.\lambda_1+2.\lambda_2+ + \ldots (r'-1)\lambda_{r'}+r'(\lambda_{r'}+\lambda_{r'+1}+\ldots+\lambda_n)$ für jene unter den Werthecombinationen der λ annimmt, für welche der Ausdruck $1.\lambda_1+2\lambda_2+\ldots(r-1).\lambda_{r-1}+r.(\lambda_r+\lambda_{r+1}+\ldots\lambda_n)$ den grössten Werth besitzt.

5. Nennt man ein Wurzelproduct nicht-unitär, wenn jede als Factor auftretende Wurzel in höherer als der ersten Potenz auftritt, so folgt aus dem Hilfssatz des letzten Artikels für $k=2$:

Damit in dem Ausdruck einer ganzen Function der Coëfficienten durch die Wurzeln, diejenigen als Posten auftretenden Wurzelproducte nicht-unitär sind, welche am wenigsten verschiedene Wurzeln als Factoren enthalten, ist hinreichend und erforderlich, dass diejenigen Glieder der Function mit einer höheren als ersten Potenz des Schlusscoëfficienten endigen, bei denen der Schlusscoëfficient den kleinsten Index hat.

Eine symmetrische Function heisst nicht-unitär (non-unitary), wenn in ihrem Ausdruck durch die Wurzeln ausschliesslich nicht-unitäre Wurzelproducte vorkommen. In einer nicht-unitären symmetrischen Function wird also jedes Glied, dessen Schlusscoëfficient den kleinsten Index hat, mit einer höheren als ersten Potenz desselben endigen. Allein dieselbe Eigenschaft wird auch schon gewissen Gruppen von Gliedern einer nicht-unitären symmetrischen Function zukommen, wie weiter unten deutlich wird.

Die nicht-unitären symmetrischen Functionen besitzen ein besonderes Interesse durch den innigen Zusammenhang, in dem sie nach einem schönen Satze von Mac Mahon zu den Seminvarianten,[1] d. i. den homogenen symmetrischen Functionen der Wurzeldifferenzen, stehen. Mac Mahon hat gezeigt,[2] dass

---

[1] Wir brauchen den Ausdruck »Seminvariante« statt »Semiinvariante« nach dem Vorgang von Prof. F. Meyer.

[2] Amer. Journ. of Math., VI, p. 131.

man eine Seminvariante bekommt, wenn man in einer isobaren nicht-unitären symmetrischen Function jeden Coëfficienten durch sein Product in einen gewissen numerischen Factor ersetzt und dass auch umgekehrt jede Seminvariante auf diese Weise zu erlangen ist. Daraus schliessen wir, dass in einer Seminvariante genau dieselben Glieder mit von Null verschiedenen Zahlencoëfficienten vorkommen wie in einer isobaren, nicht-unitären, symmetrischen Function. Wir können desshalb den Satz aussprechen:

Jedes Glied einer Seminvariante mit dem Schlusscoëfficienten von kleinstem Index endet mit einer höheren als ersten Potenz dieses Coëfficienten.

Der im Eingange dieses Artikels gemachten Bemerkung zufolge sagt dieser Satz, dass im Ausdrucke einer Seminvariante durch die Wurzeln die Wurzelproducte nicht-unitär sind, die am wenigsten verschiedene Wurzeln als Factoren enthalten.

Was wir über den Ausdruck einer Seminvariante durch die Coëfficienten gesagt haben, ist nur die erste aus einer Reihe von analogen Bemerkungen. Wir haben z. B. den Satz:

Greift man unter den Gliedern der mit Hilfe von $a_0 = 1$ homogen gemachten Seminvariante

$$\Phi = \Sigma\, C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

alle jene heraus, bei welchen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ bestimmte, aber solche Werthe haben, für welche der Ausdruck $r\lambda_0 + (r-1).\lambda_1 + \quad 1.\lambda_{r-1}$ seinen kleinsten Werth annimmt, so hat man eine Gruppe von Gliedern, so beschaffen, dass jene unter den Gliedern der Gruppe, bei denen der Schlusscoëfficient den kleinsten Index hat, wenn dieser $> r$ ist, mit einer höheren als der ersten Potenz des Schlusscoëfficienten endigen.

Wir könnten diesen Satz durch Nachweis des gleichlautenden für nicht-unitäre symmetrische Functionen beweisen, allein wir unterlassen es, weil nach dem, was wir im nächsten Artikel über die Structur der Seminvarianten entwickeln, dieser Satz als Consequenz seines einfachsten Specialfalles $r = 0$ erscheint, welcher in diesem Artikel bewiesen wurde.

denn sie ist auch isobar, weil

$$1 . \lambda_{r+1} + 2 . \lambda_{r+2} + \ldots (n-r) . \lambda_n =$$
$$= (1 . \lambda_1 + 2 . \lambda_2 + \quad . n\lambda_n) - (1 . \lambda_1 + 2 . \lambda_2 + \ldots (r-1) \lambda_{r-1})$$
$$+ r(\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots \lambda_{r-1}) - rg$$

Das gefundene Resultat kann man in der Gestalt des folgenden Satzes festlegen:

Es sei eine Seminvariante

$$\Phi = \Sigma\, C_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

der binären Form

$$a_0 x_1^n - a_1 x_1^{n-1} x_2 + a_2 x_1^{n-2} x_2^2 - \ldots (-1)^n a_n x_2^n$$

vorgelegt. Wählt man irgend ein System von Werthen von $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{r-1}$, für welches

$$r . \lambda_0 + (r-1) . \lambda_1 + \quad 1 . \lambda_{r-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1)$$

seinen kleinsten Werth annimmt, und hebt aus allen Gliedern von Φ, in denen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{r-1}$ die gewählten Werthe haben, den Factor

$$a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_{r-1}^{\lambda_{r-1}}$$

heraus, so bleibt eine Seminvariante der Form

$$a_r x_1^{n-r} - a_{r+1} x_1^{n-r-1} x_2 + a_{r+2} x_1^{n-r-2} x_2^2 - \ldots (-1)^{n-r} a_n x_2^{n-r}$$

in der Klammer.

Dieser Satz, welcher lehrt, wie aus einer hingeschriebenen Seminvariante einer binären Form unmittelbar Seminvarianten von Formen niedrigerer Ordnungen zu entnehmen sind, kann natürlich auf die so abgeleiteten Seminvarianten neuerdings angewandt werden.

Bisher ist nur der einfachste Fall dieses Satzes (nämlich $r = 1$) aufgestellt worden.
