

Über die Wirkung gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction

(II. Mittheilung)

Prof. **J. Puluj.**

(Mit 6 Textfiguren.)

In der ersten Abhandlung¹ wurde als Ergebniss einer theoretischen sowohl als experimentellen Untersuchung mitgetheilt, dass die mittlere Stromstärke von der Selbstinduction des Stromkreises unabhängig ist, wenn die elektromotorische Kraft dem reinen Sinusgesetze folgt und in der neutralen Ebene des magnetischen Feldes momentan commutirt wird. Bei der theoretischen Untersuchung liess ich mich von dem Gedanken leiten, für die sinusartige elektromotorische Kraft einen einheitlichen, für jeden Werth der Zeit t geltenden, analytischen Ausdruck zu finden.

Die Anwendung der Fourier'schen Reihe ergab für die besagte elektromotorische Kraft den Ausdruck:

$$E = \frac{2}{\pi} E_0 \left[1 - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos \frac{4\pi}{T} t - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos \frac{8\pi}{T} t - \dots \right],$$

welcher in Verbindung mit der Differentialgleichung

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E$$

¹ Diese Sitzungsberichte, Bd. 100, S. 767, Mai 1891. — Elektrotechnische Zeitschrift, S. 498.

für die momentane Stromstärke und für die stationäre Strömung eine stark convergente unendliche Reihe liefert

$$i = \frac{2}{\pi} \left[\frac{E_0}{R} - \frac{2}{1 \cdot 3} \frac{E_0 \cos\left(\frac{4\pi}{T}t - \psi_1\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}} - \frac{2}{3 \cdot 5} \frac{E_0 \cos\left(\frac{8\pi}{T}t - \psi_2\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{8\pi L}{T}\right)^2}} - \dots \right]$$

Die Phasenverschiebungen ψ_1, ψ_2, \dots sind durch die Gleichung

$$\tan \psi_k = \frac{4k\pi L}{RT}$$

bestimmt, in welcher L den Selbstinductionscoëfficienten in Erdquadranten, R den Ohm'schen Widerstand und $\frac{1}{2}T$ die halbe Periode bedeutet, in welcher die elektromotorische Kraft nacheinander den Werth Null erreicht. Die mittlere Stromstärke ist von der Selbstinduction unabhängig und gleich

$$M(i) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R}$$

Herr Lohnstein¹ gelangt zu demselben theoretischen Resultate, jedoch auf einem anderen Wege; er »beschreibt« mit Hilfe der mathematischen Symbole den physikalischen Vorgang für jede Halbperiode und setzt

$$Ri + L \frac{di}{dt} = +E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \quad 1)$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = -E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \quad 2)$$

Es wird zuerst die Gleichung 1) mit der Anfangsbedingung $t=0, i=0$ integrirt. Es ergibt sich i als Function von t , welche

¹ Elektrotechnische Zeitschrift, 1892, Heft 12.

für Werthe $t = 0$ bis $t = \frac{T}{2}$ Geltung hat und für $t = \frac{T}{2}$ den Strom $i\left(\frac{T}{2}\right)$ liefert. Alsdann wird die Gleichung 2) angewendet mit der Bedingung, dass für $t = \frac{T}{2}$ die Stromstärke den bereits bestimmten Werth $i\left(\frac{T}{2}\right)$ erreichen muss. Dieser Ausdruck liefert wieder für $t = T$ den Stromwerth $i(T)$. Sodann wird wieder die Gleichung 1) mit der Anfangsbedingung $i = i(T)$ integrirt u. s. w. Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen 1) und 2) wird auf die angegebene Weise für die $2n + 1^{\text{te}}$ Halbperiode ein Ausdruck abgeleitet, welcher nach Einsetzung von $t = nT + \tau$ für $n = \infty$ und für endliche Werthe von L einen endlichen Ausdruck für die momentane Stromstärke liefert

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}} \left[\sin\left(\frac{2\pi\tau}{T} - \psi\right) + 2 \sin\psi \frac{e^{-\frac{RT}{L}}}{1 - e^{-\frac{RT}{2L}}} \right],$$

in welchem Ausdrucke ψ die Phasenverschiebung bedeutet und bestimmt ist durch die Formel

$$\tan \psi = \frac{2\pi L}{RT}.$$

Der Ausdruck für i gibt den Stromverlauf innerhalb jeder Halbperiode unter der Voraussetzung des reinen Sinusgesetzes und der stationären Strömung, die Zeit τ nimmt also nur Werthe von 0 bis $\frac{T}{2}$ an.

Mit Zugrundelegung des vorletzten Ausdruckes ergab die Rechnung für die mittlere Stromstärke übereinstimmend den Werth

$$M(i) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R}.$$

Herr Lohnstein suchte dieses durch seine Rechnung bestätigte Resultat noch auf experimentellem Wege zu prüfen und verwendete zu diesem Zwecke eine kleine, mit zweitheiligem Commutator versehene Magnetinductionsmaschine,

gesetze variirt,¹ sondern von Viertelperiode zu Viertelperiode linear zwischen Null und einem Maximalwerthe E_0 abwechselnd wächst und fällt, wie in Fig. 1 durch die Zickzacklinie $ABCDE$ dargestellt ist.

Es ist nicht schwer eine solche elektromotorische Kraft mit Hilfe der Fourier'schen Reihe zu bestimmen, und man findet für dieselbe

$$E = \frac{E_0}{2} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{4\pi}{T} t + \frac{1}{3^2} \cos 3 \frac{4\pi}{T} t + \frac{1}{5^2} \cos 5 \frac{4\pi}{T} t + \dots \right) \right] \quad 3)$$

Diese unendliche Reihe in Verbindung mit der Differentialgleichung

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E$$

liefert in derselben Weise, wie in der ersten Abhandlung dargelegt wurde, für die momentane Stromstärke und bei stationärer Elektrizitätsströmung den Ausdruck

$$i = \frac{1}{2} \frac{E_0}{R} - \frac{4}{\pi^2} \frac{E_0 \cos \left(\frac{4\pi}{T} t - \psi_1 \right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T} \right)^2}} - \frac{1}{3^2} \frac{4}{\pi^2} \frac{E_0 \cos \left(3 \frac{4\pi}{T} t - \psi_3 \right)}{\sqrt{R^2 + \left(3 \frac{4\pi L}{T} \right)^2}} \quad 4)$$

in welcher Reihe die Phasenverschiebungen $\psi_1, \psi_3, \psi_5, \dots$ durch die Beziehung

$$\tan \psi_{2k+1} = (2k+1) \frac{4\pi L}{RT}$$

bestimmt sind.

Für die mittlere Stromstärke ergibt sich, da allgemein

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \cos \left[(2k+1) \frac{4\pi}{T} t - \psi_{2k+1} \right] dt = 0$$

¹ In einer früheren Abhandlung wurde von mir die Unabhängigkeit der mittleren elektromotorischen Kraft von der Selbstinduction auch für den Fall nachgewiesen, dass $E = E_0 \sin^2 \frac{2\pi}{T} L$ ist. Elektrotechnische Zeitschrift, 1891, Heft 32.

ist, der einfache Ausdruck

$$M(i) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{1}{2} \frac{E_0}{R}. \quad 5)$$

Die mittlere Stromstärke ist also von der Selbstinduction unabhängig, wiewohl die untersuchte elektromotorische Kraft dem reinen Sinusgesetze nicht folgt, sondern in der in Fig. 1 dargestellten Weise sich ändert.

Im Nachfolgenden ist noch die Berechnung der mittleren Stromstärke mitgetheilt, wie sich dieselbe im angenommenen Falle unter Anwendung des Lohnstein'schen Verfahrens ergeben würde.

Die elektromotorische Kraft ist für die Zeit

von $t = nT$	bis $nT + \frac{T}{4}$	$E = -4 E_0 \left(n - \frac{t}{T} \right)$
$t = nT + \frac{T}{4}$	bis $nT + \frac{T}{2}$	$E = +4 E_0 \left(\frac{2n+1}{2} - \frac{t}{T} \right)$
$t = nT + \frac{T}{2}$	bis $nT + \frac{3}{4} T$	$E = -4 E_0 \left(\frac{2n+1}{2} - \frac{t}{T} \right)$
$t = nT + \frac{3}{4} T$	bis $nT + T$	$E = +4 E_0 \left(n + 1 - \frac{t}{T} \right)$

Die elektromotorische Kraft nimmt somit für die erste, zweite, dritte, vierte Viertelperiode die Werthe an

$$E = 4 E_0 \frac{t}{T}, \quad 4 E_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right), \quad -4 E_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T} \right), \quad +4 E_0 \left(1 - \frac{t}{T} \right).$$

Das allgemeine Integral der Gleichung

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E$$

ist bekanntlich

$$i = \frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{L} \left[\int E e^{\frac{R}{L}t} dt + C \right]. \quad 6)$$

Durch Einsetzung von $E = \frac{4E_0}{T}t$ ergibt sich zunächst unter der Bedingung, dass für $t = 0, i = 0$ ist,

$$i = \frac{4E_0}{RT}t - \frac{4E_0L}{R^2T} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

und zwar mit den Giltigkeitsgrenzen von $t = 0$ bis $t = \frac{T}{4}$. Für die letzte Grenze ist

$$i\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{E_0}{R} - \frac{4E_0L}{R^2T} \left(1 - e^{-\frac{RT}{4L}}\right). \quad (7)$$

Für die zweite Viertelperiode ergibt sich nach Einsetzung des Werthes

$$E = 4E_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right)$$

in das allgemeine Integral 6) und unter Berücksichtigung der Bedingung 7)

$$i = \frac{2E_0}{R} - \frac{4E_0}{RT}t + \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 + e^{-\frac{R}{L}t} - 2e^{\frac{R}{L}\left(\frac{T}{4}-t\right)}\right]$$

mit den Giltigkeitsgrenzen $t = \frac{T}{4}$ und $t = \frac{T}{2}$ und der weiteren Grenzbedingung

$$i\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{4E_0L}{R^2T} \left(1 + e^{-\frac{RT}{2L}} - 2e^{-\frac{RT}{4L}}\right). \quad (8)$$

Ähnlich findet man von $t = \frac{T}{2}$ bis $t = \frac{3}{4}T$

$$i = -\frac{2E_0}{R} + \frac{4E_0}{RT}t - \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 - e^{-\frac{R}{L}t} + 2e^{\frac{R}{L}\left(\frac{T}{4}-t\right)} - 2e^{\frac{R}{L}\left(\frac{2T}{4}-t\right)}\right]$$

und

$$i\left(\frac{3T}{4}\right) = \frac{E_0}{R} - \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 - e^{-\frac{3RT}{4L}} + 2e^{-\frac{2RT}{4L}} - 2e^{-\frac{RT}{4L}}\right],$$

allgemein von $t = nT$ bis $t = nT + \frac{T}{4}$

$$i_1 = -\frac{4E_0}{R} \left(n - \frac{t}{T} \right) - \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 - e^{-\frac{Rt}{L}} + 2e^{\frac{R}{L} \left(\frac{T}{4} - t \right)} - 2e^{\frac{R}{L} \left(\frac{4nT}{4} - t \right)} \right], \quad (9)$$

und von $t = nT + \frac{T}{4}$ bis $t = nT + \frac{T}{2}$,

$$i_2 = \frac{4E_0}{R} \left(\frac{2n+1}{2} - \frac{t}{T} \right) + \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 + e^{-\frac{Rt}{L}} - 2e^{\frac{R}{L} \left(\frac{T}{4} - t \right)} - 2e^{\frac{R}{L} \left(\frac{4n+1}{4} T - t \right)} \right] \quad (10)$$

Wird mit τ die während einer Viertelperiode veränderliche Zeit bezeichnet, so ergibt sich nach Einsetzung von $t = nT + \tau$ in die Gleichung 9 zunächst

$$i_1 = \frac{4E_0\tau}{RT} - \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 - 2e^{-\frac{R\tau}{L}} \left(1 - e^{-\frac{RT}{4L}} + e^{-\frac{2RT}{4L}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{4nRT}{4L}} \right) \right]$$

und für $n = \infty$, also für die stationäre Elektrizitätsströmung

$$i_1 = \frac{4E_0\tau}{RT} - \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 - \frac{2e^{-\frac{R\tau}{L}}}{1 + e^{-\frac{RT}{4L}}} \right]. \quad (11)$$

Nach Einsetzung von $t = nT + \tau$ in die Gleichung 10) erhält man in derselben Weise

$$i_2 = \frac{4E_0}{RT} \left(\frac{T}{2} - \tau \right) + \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 - \frac{2e^{-\frac{R}{L} \left(\tau - \frac{T}{4} \right)}}{1 + e^{-\frac{RT}{4L}}} \right]. \quad (12)$$

Für $L = \infty$ ist $i_1 = i_2 = \frac{1}{2} \frac{E_0}{R}$ und ferner für $t = \frac{T}{4}$

$$i_1\left(\frac{T}{4}\right) = i_2\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{E_0}{R} - \frac{4E_0L}{R^2T} \left[1 - \frac{2e^{-\frac{RT}{4L}}}{1 + e^{-\frac{RT}{4L}}} \right].$$

Zum Schluss ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichungen 11 und 12 als mittlere Stromstärke bei stationärer Strömung

$$M(i) = \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} i_1 d\tau + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} i_2 d\tau \right] = \frac{1}{2} \frac{E_0}{R}$$

ein Werth, den auch die Methode der unendlichen Reihe geliefert hat.

Herr Lohnstein sagt von seinem Verfahren, dasselbe sei zwar anscheinend complicirter, liefere aber schliesslich einen einfachen endlichen Ausdruck für i , während aus der von mir angegebenen Cosinusreihe weder auf graphischem, noch auf rechnerischem Wege der Stromverlauf leicht ersichtlich sei.¹

Dem gegenüber sei es bemerkt, dass die Reihen für die momentane elektromotorische Kraft und Stromstärke schon bei mässiger Selbstinduction stark convergiren und wenige Anfangsglieder der Reihe genügen, um für jede Zeit t die entsprechenden Grössen zu berechnen und dieselben graphisch darzustellen, wie das im Nachfolgenden des Vergleiches halber unter der Annahme geschehen ist, dass $E_0 = 30$ V., der Ohm'sche Widerstand $R = 1\Omega$ und der scheinbare Widerstand $R_1 = 5\Omega$ ist. In diesem Falle genügen schon drei Cosinusglieder. Es ist

$$\frac{4\pi L}{T} = 4.899, \quad \tan \psi_{2k+1} = 4.899(2k+1)$$

und

$$i = \frac{E_0}{2} \left[1 - 0.162114 \cos\left(\frac{4\pi t}{T} - 78^\circ 27' 47''\right) - 0.006114 \cos\left(3\frac{4\pi t}{T} - 86^\circ 6' 27''\right) - 0.001323 \cos\left(5\frac{4\pi t}{T} - 87^\circ 39' 44''\right) \right].$$

¹ Elektrotechnische Zeitschrift, 1892, Heft 12, Seite 151.

Nach Herrn Lohnstein wäre die Stromstärke dagegen zu berechnen nach der Formel:

$$i_1 = -46 \cdot 663 + 120 \frac{t}{T} + 61 \cdot 167 e^{-2 \cdot 57164 \frac{t}{T}}$$

von $t = 0$ bis $t = \frac{T}{4}$ u. s. f. und nach

$$i_2 = 106 \cdot 663 - 120 \frac{t}{T} - 116 \cdot 339 e^{-2 \cdot 57164 \frac{t}{T}}$$

von $t = \frac{T}{4}$ bis $t = \frac{T}{2}$ u. s. w.

In der nachfolgenden Tabelle sind die berechneten Werthe der Stromstärke für verschiedene Zeiten zusammengestellt.

t	Nach Lohnstein	Nach Puluj	
		a	b
0	$i_1 = 14 \cdot 51$ A.	14·51 A.	14·72 A.
$\frac{1}{12} T$	$i_1 = 12 \cdot 71$	12·71	12·72
$\frac{2}{12} T$	$i_1 = 13 \cdot 18$	13·19	13·17
$\frac{3}{12} T$	$i_1 = 15 \cdot 50$	15·49	15·49
	$i_2 = 15 \cdot 50$	—	—
$\frac{4}{12} T$	$i_2 = 17 \cdot 30$	17·29	17·30
$\frac{5}{12} T$	$i_2 = 16 \cdot 82$	16·82	16·83
$\frac{6}{12} T$	$i_2 = 14 \cdot 51$	14·51	14·72

In der Spalte a sind die Werthe mit Hilfe von drei Cosinusgliedern, in b mit Vernachlässigung des letzten Cosinusgliedes der Reihe, berechnet. Aus dieser Zusammenstellung ist zu ersehen, dass die endliche Reihe selbst mit nur zwei Cosinus-

gliedern Werthe für die Stromstärke liefert, welche mit den nach Herrn Lohnstein berechneten Werthen sehr gut übereinstimmen.

In Fig. 2 ist die Stromcurve NN auf Grund der in Spalte a stehenden Werthe graphisch dargestellt, wobei $T = 60 \text{ mm}$ und $E_0 = 30 \text{ mm}$ angenommen wurde. Die Gerade NN repräsentirt die mittlere Stromstärke. Zum Vergleich wurde unter gleichen Verhältnissen die momentane Stromstärke für den Fall berechnet, dass die elektromotorische Kraft dem Sinusgesetze folgt. In diesem Falle genügen zur Berechnung drei Anfangsglieder der unendlichen Reihe

$$i = \frac{2}{\pi} E_0 \left[1 - 0.133333 \cos \left(\frac{4\pi t}{T} - 78^\circ 27' 47'' \right) - 0.01358 \cos \left(2 \frac{4\pi t}{T} - 84^\circ 10' 21'' \right) \right].$$

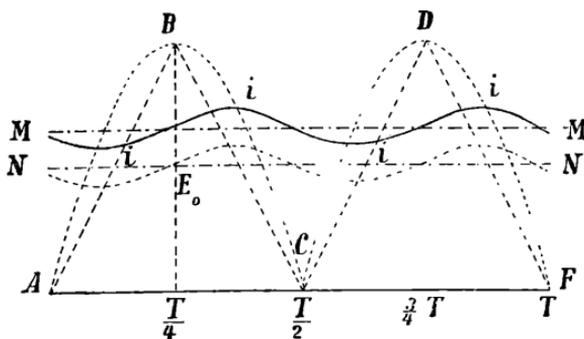


Fig. 2.

In Fig. 2 ist auch die sinusartige elektromotorische Kraft durch die Curve $ABCDEF$, die momentane Stromstärke durch die wellenförmige Curve MM und die mittlere Stromstärke durch die gerade Linie NN dargestellt.

Es entsteht nun die Frage, worin die Ursache der Nicht-übereinstimmung der beobachteten und berechneten mittleren Stromstärke zu suchen ist, welche die Versuche des Herrn Lohnstein im Gegensatz zu meinem Versuchsergebnisse ergeben haben.

Sowohl den theoretischen Betrachtungen des Herrn Lohnstein, als denen, welche in meiner Abhandlung dargelegt wurden, liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass der Strom in

der neutralen Ebene des magnetischen Feldes momentan commutirt wird. Eine Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung wird daher nur dann zu erwarten sein, wenn die zur Commutation des Stromes erforderliche Zeit unendlich klein, praktisch genommen, gleich Null ist. Eine solche Commutation ist wenigstens für schwache Ströme dann möglich, wenn die Contactflächen der schleifenden Bürsten ebenso breit sind wie die Isolation zwischen den Collectorsegmenten. Das war der Fall bei dem von mir verwendeten Erdinductor, dessen Commutator in Fig. 3 in einem Drittel natürlicher Grösse dargestellt ist. Derselbe besteht aus zwei kreisförmigen Segmenten aus

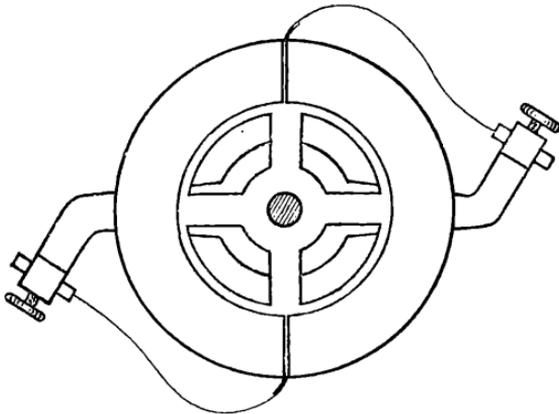


Fig. 3.

Silberblech von 119.6 mm Durchmesser, welche genau diametral durch zwei 0.6 mm dicke Elfenbeinplättchen von einander isolirt sind. Die schleifenden Bürsten sind an ihren aus Platinblech bestehenden Enden ebenfalls 0.6 mm dick.

Bei den Versuchen des Herrn Lohnstein wird diese Bedingung der momentanen Commutation nicht erfüllt gewesen sein, und die Contactflächen der Bürsten werden wahrscheinlich breiter gewesen sein als die Dicke der Isolation zwischen den Commutatorsegmenten. Es ist nun klar, dass in einem solchen Falle die Armaturspule in der neutralen Ebene des magnetischen Feldes während des Durchganges eine Zeit lang kurz geschlossen sein wird, die von der Breite der Contactfläche der Bürsten abhängt.

Es ist nicht schwer zu ermitteln, wie die mittlere Stromstärke von der zur Commutation erforderlichen Zeit abhängt, wenn der Stromkreis keine Selbstinduction besitzt. Eine im magnetischen Felde rotirende Spule vom Widerstande w_0 liefere den Strom für einen Galvanometerstromkreis vom Widerstande w . Die Bürsten seien gegen den Durchmesser der Stromwendung symmetrisch aber so eingestellt, dass die Spule beim Verlassen der neutralen Ebene während der Zeit t_1 kurz geschlossen bleibt. Zur Zeit t_1 ist die Spule und der Galvanometerkreis hintereinander geschaltet. Zur Zeit $\frac{T}{2} - t_2$ werden beide wieder kurz geschlossen und bleiben in Parallelschaltung von $\frac{T}{2} - t_2$ bis $\frac{T}{2} + t_1$; zur Zeit $\frac{T}{2} + t_1$ werden dieselben wieder hintereinander, aber umgekehrt geschaltet u. s. f. Die Zeit der Commutation ist $t = t_1 + t_2$.

Die mittlere Stromstärke in der rotirenden Spule ist offenbar

$$i_0 = \frac{E_0}{w_0 + w} \cdot \frac{1}{\frac{T}{2} - (t_1 + t_2)} \int_{t_1}^{\frac{T}{2} - t_2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cdot dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0 + w} \frac{T}{T - 2t} \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) \cdot \cos\frac{\pi}{T}(t_2 - t_1)$$

und die vom Galvanometer angezeigte mittlere Stromstärke

$$i = \frac{0 \times t + i_0 \left(\frac{T}{2} - t\right)}{\frac{T}{2}}$$

oder

$$i = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0 + w} \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) \cos\frac{\pi}{T}(t_2 - t_1). \quad (13)$$

Die Zeiten t_1 und t_2 hängen von der Stellung der Bürsten gegen die neutrale Ebene des magnetischen Feldes ab und die mittlere Stromstärke erreicht, wie aus 13 zu ersehen ist, den maximalen Werth für $t_1 = t_2$, in welchem Falle die gleich

$$* B = A e^{\sigma T_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi T_2}{T} - \varphi\right) e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)} - \sin\left(\frac{\pi T_1}{T} - \varphi\right)}{1 - e^{-\sigma' T - (\sigma - \sigma')(T_2 - T_1)}}$$

$$\tan \varphi = \frac{n^2 \pi 10^{-8}}{\rho (w_0 + w) T} = \frac{\pi L}{T},$$

$$\sigma = \frac{\rho (w_0 + w) 10^8}{n^2} = \frac{w_0 + w}{L}, \quad \sigma' = \frac{\rho w 10^8}{n^2} = \frac{w}{L}.$$

Um die mittlere Stromstärke im äusseren Stromkreise berechnen zu können, muss noch die momentane Stromstärke von T_2 bis $T + T_1$ u. s. w. bekannt sein. Diese ist

$$i_2 = \frac{\rho M_2}{n} e^{-\sigma'(t-T_2)}, **$$

$$M_2 = A \sin\left(\frac{\pi T_2}{T} - \varphi\right) + B e^{-\sigma T_2},$$

und die Zahl der Kraftlinien im äusseren aus einem Elektromagnet bestehenden Stromkreise

$$m = M_2 e^{-\sigma'(t-T_2)}, **$$

Mit Hilfe der Ausdrücke i_1 und i_2 lässt sich die mittlere Stromstärke $M(i)$ im äusseren Stromkreise leicht berechnen. Diese ist

$$M(i) = \frac{1}{T} \left[\int_{T_1}^{T_2} i_1 dt + \int_{T_2}^{T+T_1} i_2 dt \right]$$

Nach der Ausführung der Integration innerhalb der angegebenen Grenzen und nach einigen Reductionen erhält man:

* In der Abhandlung des Herrn Steinmetz steht irrtümlich:

$$B = A e^{\sigma T_1} \frac{\sin\left(\frac{\pi T_2}{T} - \varphi\right) - \sin\left(\frac{\pi T_1}{T} - \varphi\right)}{1 - e^{-\sigma' T + (\sigma' - \sigma)(T_2 - T_1)}}.$$

** In der Abhandlung des Herrn Steinmetz stehen die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{\rho M_2}{n} e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)}, \\ m &= M_2 e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)}. \end{aligned} \right\} 2+.$$

$$M(i) = \frac{E_0}{\sqrt{(w+w_0)^2 + \left(\frac{\pi L}{T}\right)^2}} \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi(T_2 - T_1)}{2T} \sin \left[\frac{\pi(T_1 + T_2)}{2T} - \varphi \right] + \frac{S_2}{T} \sin \left(\frac{\pi T_2}{T} - \varphi \right) - \frac{S_1}{T} \sin \left(\frac{\pi T_1}{T} - \varphi \right) \right], \quad (14)$$

worin die von der Selbstinduction und der Zeit der Commutation abhängigen Constanten S_2 und S_1 folgende Bedeutung haben:

$$S_2 = \frac{\sigma [1 - e^{-\sigma(T+T_1-T_2)}] + \sigma' [1 - e^{-\sigma(T_2-T_1)}] e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)}}{\sigma \sigma' [1 - e^{-\sigma'(T+T_1-T_2) - \sigma(T_2-T_1)}]},$$

$$S_1 = \frac{\sigma' [1 - e^{-\sigma(T_2-T_1)}] + \sigma [1 - e^{-\sigma'(T+T_1-T_2)}] e^{-\sigma(T_2-T_1)}}{\sigma \sigma' [1 - e^{-\sigma'(T+T_1-T_2) - \sigma(T_2-T_1)}}}.$$

Für $L = 0$ verschwinden die Grössen S_2 und S_1 , und man erhält in diesem Falle für die mittlere Stromstärke den Grenzwert

$$M(i) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w+w_0} \sin \frac{\pi(T_2 - T_1)}{2T} \sin \frac{\pi(T_1 + T_2)}{2T}, \quad (15)$$

welcher nach Einsetzung von $\frac{T}{2}$ statt T , τ_1 statt T_1 und $\frac{T}{2} - \tau_2$ statt T_2 identisch wird mit 13.

Für sehr grosse Werthe von L wird dagegen das erste Glied innerhalb der Klammer verschwindend klein und erreicht für $L = \infty$ den Werth Null.¹ Die mittlere Stromstärke ist dann:

$$M(i) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w+w_0} \frac{T_2 - T_1}{T} \sin \frac{\pi(T_2 - T_1)}{2T} \sin \frac{\pi(T_1 + T_2)}{2T} \quad (16)$$

Wie aus diesen Formeln zu ersehen ist, ist die mittlere Stromstärke des commutirten Stromes, wenn die Commutation nicht momentan erfolgt, abhängig: erstens von der Zeit der Commutation $t = T + T_1 - T_2$, also von der Breite der Contactflächen der Bürsten, zweitens von der Stellung der Bürsten gegen die neutrale Ebene des magnetischen Feldes und drittens von der Selbstinduction. Dass die letztere Abhängigkeit nicht

¹ Was die Controverse bezüglich des Falles $L = \infty$ betrifft, so glaube ich, dass die Einwände des Herrn Lohnstein bereits durch die treffende Darlegung des Herrn H. Teege im Novemberheft 48 der Elektrotechnischen Zeitschrift vom Jahre 1892 zur Genüge widerlegt sind.

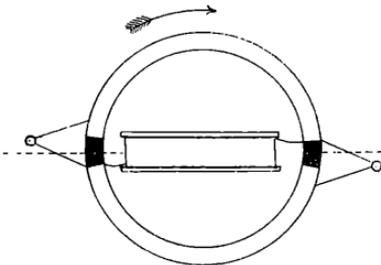
breiten Contactflächen der Bürsten von dem Durchmesser der Stromwendung halbiert werden.

Aus 13 ergibt sich

$$\text{für } t_1 = 0 \quad t_2 = t \quad i_1 = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0 + w} \cos^2 \left(\frac{\pi}{T} t \right)$$

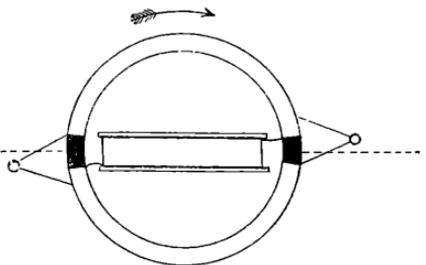
$$t_2 = 0 \quad t_1 = t \quad i_2 = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0 + w} \cos^2 \frac{\pi}{T} t$$

$$t_1 = t_2 \quad i_3 = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0 + w} \cos \frac{\pi}{T} t,$$



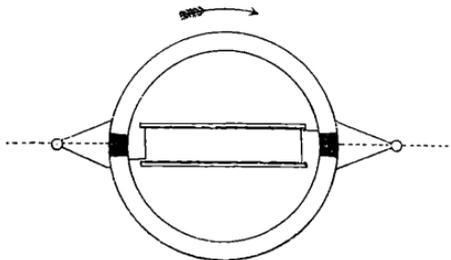
$$t_1 = t \quad t_2 = 0$$

Fig. 4.



$$t_1 = 0 \quad t_2 = t$$

Fig. 5.



$$t_1 = t_2$$

Fig. 6.

somit

$$i_1 \quad i_2 \quad i_3 = \cos \frac{\pi}{T} t : \cos \frac{\pi}{T} t \quad 1.$$

Diese drei Fälle der Bürstenstellung sind in den Figuren 4, 5 und 6 dargestellt.

Der allgemeinere Fall, dass der äussere Stromkreis noch eine Selbstinduction L besitzt, wurde vom Herrn Steinmetz¹ in einem Aufsatze theoretisch behandelt, auf den ich vom Herrn Verfasser nach der Veröffentlichung meiner ersten Mittheilung durch Übersendung des Separatabdruckes aufmerksam gemacht wurde. Unter der Voraussetzung, dass die Armaturspule und der äussere Stromkreis von der Zeit 0 bis T_1 kurz geschlossen sind, zur Zeit T_1 der Kurzschluss entfernt wird, von der Zeit T_2 bis $T+T_1$ beide Stromkreise wieder kurz geschlossen werden, zur Zeit T die elektromotorische Kraft der Armaturspule den Nullwerth erreicht, also T die halbe Periode bedeutet, dass ferner zur Zeit $T+T_1$ der Kurzschluss durch Rotation des Commutators wieder entfernt und beide Stromkreise in umgekehrter Richtung mit einander verbunden werden, zur Zeit $T+T_2$ die Armaturspule wieder kurz geschlossen wird u. s. f. ergab die Rechnung für die momentane Stromstärke im äusseren Stromkreise während der Zeit von T_1 bis T_2 , von $T+T_1$ bis $T+T_2$ u. s. f. den endlichen² Werth:

$$i_1 = \frac{\rho A}{n} \sin\left(\frac{\pi t}{T} - \varphi\right) + \frac{\rho B}{n} e^{-\sigma t}.$$

Die Grössen A , φ , σ und B sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$A = \frac{nE_0}{\sqrt{\rho^2(n_0+n)^2 + \frac{n^4\pi^2 10^{-10}}{T^2}}}$$

¹ Steinmetz, Der Einfluss der Selbstinduction auf pulsirende Ströme. Elektrotechnische Zeitschrift, Heft 36, 1890.

² Herr Steinmetz bemerkt in der Elektrotechnischen Zeitschrift vom 3. Juni 1892, ich hätte an der Lösung der Differentialgleichung »evidenterweise verzweifelt«, da ich die letztere durch eine unendliche Reihe und nicht durch endliche Formeln wie er integrierte. Herr Steinmetz ahnte jedenfalls nicht, dass seine Bemerkung der Vermuthung Raum gibt, dass er beim Anblick einer unendlichen Reihe, wenn diese zur wirklichen Berechnung dienen soll, in eine verzweifelnnde Stimmung geräth, ohne zu wissen, dass unendliche Reihen schon oft und auf verschiedenen Gebieten der experimentellen Forschung mit Nutzen angewendet wurden.

unbedeutend sein kann, folgt schon aus den Grenzwerten für $L = 0$ und $L = \infty$.

Die durch eine sehr grosse Selbstinduction herbeigeführte maximale Änderung der mittleren Stromstärke, ausgedrückt in Procenten, ist angenähert gegeben durch die Beziehung

$$\Delta = \frac{100 w_0 t}{(w + w_0)T - w_0 t},$$

ist somit von der Zeit der Commutation abhängig.

Für den vom Herrn Steinmetz in seiner Abhandlung betrachteten Fall, $E_0 = 100 \text{ V}$, $w = 5 \Omega$, $w_0 = 10 \Omega$, $T = 0.005 \text{ s}$, $T_1 = 0.0007 \text{ s}$, $T_2 = 0.00415 \text{ s}$ und $L = 0.04$ Erdquadranten, ergeben sich nach 14, 15 und 16 die mittleren Stromstärken:

für $L = 0.04 \text{ E. Q.}$	$M(i) = 4.706 \text{ Ampère,}$
$L = 0$	3.747
$L = \infty$	4.723

Bei ungeänderter Stellung der Bürsten gegen den Commutator kann also schon eine Selbstinduction von 0.04 Erdquadranten die mittlere Stromstärke des commutirten Stromes um 25.6% erhöhen. Bei weiterer Vergrößerung der Selbstinduction von 0.04 Erdquadranten bis ins Unendliche würde die mittlere Stromstärke nur unbedeutend steigen und für $L = \infty$ den bereits angegebenen Werth 4.723 Ampère erreichen, welcher nur noch um 0.4% grösser ist als die mittlere Stromstärke bei der Selbstinduction $L = 0.04 \text{ Q.}$

Aus dem Gesagten geht nun hervor, dass die vom Herrn Steinmetz »unter Verweisung auf zwei Diagramme«¹ ausgesprochene Ansicht, nach welcher die Selbstinduction auf die mittlere Stromstärke eines in endlicher Zeit commutirten, pulsirenden Stromes »fast gar keinen« Einfluss haben soll, nicht richtig ist, im Gegentheil, dass dieser Einfluss unter Umständen sogar ein bedeutender sein kann.

Damit erledigt sich von selbst die vom Herrn Steinmetz aufgeworfene Prioritätsfrage bezüglich der Unabhängigkeit der mittleren Stromstärke von der Selbstinduction. Eine solche

¹ Elektrotechnische Zeitschrift, 1890, Heft 36 und 1892, Heft 23, S. 298.

Unabhängigkeit der mittleren Stromstärke konnte bei endlicher Commutation sich weder aus den Diagrammen des Herrn Steinmetz, noch aus seinen Formeln ergeben, sie folgt aber aus dem oben gegebenen Ausdrücke für die mittlere Stromstärke für den Fall einer momentanen Commutation, welche aber Herr Steinmetz für eine »physikalische Unmöglichkeit« hielt und dieselbe weder theoretisch näher untersucht, noch experimentell geprüft hat, weil dieser Specialfall nach seiner Ansicht »praktisch von keinerlei Interesse sei«.

Setzt man in dem Ausdrücke 14 die Zeit der Commutation $T + T_1 - T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = T$, so erhält man für beliebige Selbstinduction die mittlere Stromstärke

$$M(i_0) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0 \cos \varphi}{\sqrt{(w_0 + w)^2 + \left(\frac{\pi L}{T}\right)^2}} + \frac{2 E_0 \sin \varphi}{\pi \sqrt{(w_0 + w)^2 + \left(\frac{\pi L}{T}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0 + w} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{w_0 + w}, \quad (17)$$

welcher Werth von der Selbstinduction ganz unabhängig ist.

Es muss noch bemerkt werden, dass der unter 14) gegebene Ausdruck der mittleren Stromstärke nicht genügt, um die Versuche des Herrn Lohnstein vollständig zu erklären, denn es wurde von demselben beobachtet, dass bei einer bestimmten, aber unveränderten Bürstenstellung die Verminderung der Selbstinduction eine Vergrößerung der mittleren Stromstärke herbeiführte. Dagegen ist aus dem Ausdrücke für die mittlere Stromstärke 14 und den Grenzwerten derselben 15 und 16 zu ersehen, dass bei unveränderter Bürstenstellung die Verminderung der Selbstinduction auch eine Verminderung der mittleren Stromstärke zur Folge haben müsste. Weitere Versuche zeigten noch, dass es eine Bürstenstellung gibt, in welcher die Änderungen der Selbstinduction ohne Einwirkung auf die mittlere Stromstärke sind. Wurden aber die Bürsten über diese »Nullstellung« hinaus verschoben, so hatte die Verminderung der Selbstinduction eine Verringerung der am Galvanometer beobachteten mittleren Stromstärke zur Folge.

Herr Steinmetz glaubt diese Versuche durch den einfachen Hinweis erklären zu können, dass nach seinen Formeln

die mittlere Stromstärke, je nach der Wahl von T_1 und T_2 , durch die Selbstinduction vermindert oder vergrößert werden kann. Eine solche Erklärung ist aber nicht zutreffend, wie dies am besten aus den hier zusammengestellten Resultaten zu ersehen ist, die sich nach den Formeln 14, 15, 16 und 17 für zwei vom Herrn Steinmetz angenommene Fälle ergeben.

1. Fall.

$$\begin{aligned}
 T &= 0.00500 \text{ S.} & E_0 &= 100 \text{ V} \\
 T_1 &= 0.00070 & w_0 &= 5 \Omega \\
 T_2 &= 0.00415 & w &= 10 \Omega \\
 & & L &= 0.04 \times 10^9 \text{ c.} \\
 T + T_1 - T_2 &= 0, & M(i_0) &= 6.366 \text{ A.} \\
 L &= 0, & M(i) &= 5.150 \\
 L &= 0.04 \times 10^9 \text{ c.,} & & 5.990 \\
 L &= \infty, & & 6.438 \text{ »}
 \end{aligned}$$

2. Fall.

$$\begin{aligned}
 T &= 0.005 \text{ S.} & E_0 &= 100 \text{ V} \\
 T_1 &= 0.001 & w_0 &= 5 \Omega \\
 T_2 &= 0.004 & w &= 5 \Omega \\
 & & L &= 0.008 \times 10^9 \text{ c.} \\
 T + T_1 - T_2 &= 0, & M(i_0) &= 4.244 \text{ A.} \\
 L &= 0, & M(i) &= 3.747 \\
 L &= 0.008 \times 10^9 \text{ c.,} & & 4.705 \\
 L &= \infty, & & 4.723
 \end{aligned}$$

Im ersten Fall ist die mittlere Stromstärke bei endlicher Commutation in einem Stromkreise bei der Selbstinduction $0.04 \times 10^9 \text{ c.}$ kleiner als die mittlere Stromstärke bei momentaner Commutation, 5.990 A. gegen 6.366 A. , im zweiten Falle ist dieselbe grösser, 4.705 A. gegen 4.244 A. Was aber die Abhängigkeit der mittleren Stromstärke von der Selbstinduction bei endlicher Commutation betrifft, so ist aus beiden Fällen zu ersehen, dass dieselbe bei unveränderter Bürstenstellung mit der Selbstinduction zunimmt, und zwar differiren die beiden Grenzwerte für $L = 0$ und $L = \infty$ im ersten Falle um 25% , im zweiten um 25.9% von einander.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: [102_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Puluj J.

Artikel/Article: [Über die Wirkung gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction. 219-238](#)