Zur Theorie der astronomischen Refraction

Dr. J. v. Hepperger,
Professor an der k. k. Universität in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1893.)

Die Theorie der astronomischen Strahlenbrechung ist durch die hervorragenden Arbeiten so vieler Forscher, wie Laplace, Bessel, Young, Schmidt, Ivory, Lubbock und Gyldèn bereits in so trefflicher Weise ausgebildet worden, dass eine neuerliche Behandlung dieses Gegenstandes ohne genügende Berücksichtigung der Veränderlichkeit der meteorologischen Elemente, was bei dem heutigen Stande der Meteorologie noch nicht möglich ist, der praktischen Astronomie überhaupt nur wenig nützen kann. Die nachstehenden Untersuchungen verfolgen auch nicht den Zweck, eine Verbesserung der bisher gewonnenen Resultate zu erzielen, sondern sind hauptsächlich aus dem Grunde angestellt worden, um die analytischen Entwicklungen etwas einfacher zu gestalten, allerdings ohne die Genauigkeit derselben empfindlich zu schädigen. Es kann nämlich wohl nicht geläugnet werden, dass alle eingangs erwähnten Theorien, namentlich aber die auf breitester Grundlage aufgebaute Theorie Gyldèn's, sich für den akademischen Vortrag nicht gut eignen, theils wegen der Weitläufigkeit des Verfahrens, theils weil hierin Capitel aus der höheren Analysis gestreift werden, welche den wenigsten Hörern geläufig sind und daher zu langer intraductorischer Auseinandersetzungen bedürfen. Und bei der Wichtigkeit der Refraction für die beobachtende Astronomie sollte doch gewiss die vollständige theoretische Ableitung der Formeln, nach welchen Beobachtungen vom Einflusse der Strahlenbrechung befreit werden, Gegenstand des Vortrags sein.

Nachdem die brechende Kraft von Gasen, also auch der Luft, eine Function der Dichte ist, und letztere wiederum von Druck und Temperatur abhängt, so müssten zur genauen Bestimmung der Lichtcurve für alle Punkte derselben Druck und Temperatur als gegebene Grössen betrachtet werden können. Nun wissen wir aber über die Temperaturverhältnisse in den höheren Luftschichten sehr wenig, indem fast nur die mittlere Temperaturabnahme und diese nur bis zu Höhen von einigen tausend Metern so ziemlich bekannt ist, und können daher keine Formel aufstellen, nach welcher die Dichte der Luftschichten, aus deren Höhe auch nur einigermassen sicher erhältlich wäre. Es würde desshalb mit sehr grossen Schwierigkeiten verknüpft sein, die beobachteten Refractionen durch eine Theorie befriedigend darzustellen, wenn uns nicht der Umstand zu statten käme, dass fehlerhafte Annahmen über die Änderungen der Dichte einen nur geringen Einfluss auf den Betrag der Refraction ausüben, wie schon daraus hervorgeht, dass die Annahme einer Atmosphäre von gleicher Dichte die Refraction bis zu 80° Zenithdistanz ganz gut darstellt.

Nachdem die Temperatur der Atmosphäre in erster Linie von der absorbirenden Wirkung derselben auf die Wärmestrahlung der Sonne abhängt, darf man erwarten, durch alleinige Berücksichtigung derselben zu einem Ausdrucke zu gelangen, welcher die Temperaturänderungen in verticaler Richtung genähert darstellt. Betrachten wir den sogenannten mittleren Zustand der Atmosphäre, wo an allen Punkten der untersten Schicht derselbe Druck und dieselbe Temperatur obwalten und eine Änderung dieser Grössen nur in verticaler Richtung erfolgen soll, so können wir uns denselben durch eine von aussen her concentrisch eindringende Wärmestrahlung von constanter Intensität hervorgebracht denken. Da hiebei ein seitlicher Abfluss von Wärme nicht stattfindet, genügt es, die Wärmebewegung in der Richtung der Verticalen allein zu berücksichtigen. Der Absorptionscoëfficient der Luft ist für Wärmestrahlen von verschiedener Wellenlänge auch verschieden gross und hängt zweifellos ausser vom Drucke, unter welchem die Luft steht, auch von der Temperatur derselben ab. Doch wird die Annahme, dass der Absorptionscoëfficient innerhalb der hier auftretenden Grenzen von Druck und Temperatur ersterem proportional, von letzterer aber unabhängig sei, von der Wahrheit nicht zu sehr abweichen. Unter dieser Voraussetzung ist auch der Coëfficient der allgemeinen Absorption, den ich α nenne, dem Drucke proportional.

Bedeutet ρ, p, g Dichte, Druck der Luft und Schwerkraft in der Entfernung r vom Erdmittelpunkt, ρ_0, p_0, g_0 dasselbe für die Erdoberfläche, a den Erdradius und

$$s = \frac{r-a}{a},$$

so ist

$$\partial p = -\rho g a \partial s.$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetze allein wäre

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0},$$

demnach bei Ausserachtlassung der geringen Veränderlichkeit von g

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{\rho_0 g_0 a}{p_0} \partial s.$$

Ist

$$\frac{p_0}{\rho_0 g_0} = l_0,$$

so wird

$$p = p_0 e^{-\frac{a}{l_0} s}$$

Bedeutet α_0 den dem Drucke p_0 entsprechenden Absorptionscoëfficienten, so ist auch

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\frac{a}{l_0} s} \tag{1}$$

Wird die Intensität der Strahlung durch i ausgedrückt, so ist

$$\partial i = \alpha . i a \partial s = \alpha_0 i a e^{-\frac{a}{l_0} s} \partial s,$$

woraus folgt

$$\log \text{nat.} \frac{i}{i_0} = \alpha_0 l_0 \left(1 - e^{-\frac{a}{l_0} s}\right), \tag{2}$$

wo i_0 die Intensität an der unteren Grenze der Atmosphäre bedeutet. Bezeichnet i_1 den Anfangswerth von i, so wäre derselbe, da $e^{-\frac{a}{l_0} s}$ für die Grenze der Atmosphäre von Null sehr wenig verschieden ist

$$i_1 = i_0 e^{\alpha_0 l_0},$$

während für die untersten Luftschichten

$$i = i_0 e^{\alpha_0 a s}.$$

Nimmt man noch an, dass die Temperatursteigerung proportional sei der absorbirten Intensität der Wärmestrahlung, also

$$T + t = C . \alpha i$$

$$T + t_0 = C \alpha_0 i_0,$$

so wird

$$t - t_0 = -C \alpha_0 i_0 \left(1 - e^{-\left[\frac{1}{l_0} - \alpha_0\right] a s}\right),$$

wofür man, da hierin s bereits als klein vorausgesetzt wurde, auch schreiben kann

$$t - t_0 = -C \alpha_0 i_0 \left(\frac{1}{l_0} - \alpha_0\right) a s.$$

Da nach 1) für die Grenze der Atmosphäre $\alpha = 0$ wird, so erhält man, wenn t_1 die Temperatur der äussersten Luftschicht bedeutet

$$T + t_1 = 0$$

$$C \alpha_0 i_0 = t_0 - t_1$$

und daher

$$t - t_0 = -(t_0 - t_1) \left(\frac{1}{l_0} - \alpha_0\right) a s. \tag{3}$$

Bezeichnet m den Ausdehnungscoëfficienten der Luft, so ist

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{1 + m t_0}{1 + m t}$$

Je geringer die Werthe von s sind, desto genauer wird

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = 1 - \frac{m(t-t_0)}{1+mt_0}$$

Durch Einführung der Bezeichnung

$$\omega = (t_0 - t_1)\left(\frac{1}{l_0} - \alpha_0\right); \qquad \omega' = \frac{m\omega}{1+mt_0}$$

wird

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = 1 + \frac{m\omega as}{1+mt_0} = 1 + \omega' as,$$

oder mit demselben Grade der Annäherung

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = e^{\omega' as}$$

und hieraus durch Beibehaltung des Näherungswerthes für $\frac{p}{p_0}$.

$$\rho = \rho_0 e^{-\left(\frac{1}{l_0} - \omega'\right) as}$$

oder, wenn

$$\left(\frac{1}{l_0} - \omega'\right) a = \varkappa$$

genommen wird

$$\rho = \rho_0 e^{-\varkappa s}. \tag{4}$$

Man gelangt sonach auf diesem Wege zur Formel, welche Bessel seinen Untersuchungen zu Grunde gelegt hat.

Bedeutet z die scheinbare Zenithdistanz und n, n_0 die absoluten Brechungscoëfficienten der Luft in den Entfernungen r, a vom Erdcentrum, so lautet die Differentialgleichung, aus welcher die Refraction R zu bestimmen ist

$$\partial R = -\frac{\partial n}{n} \frac{\sin z}{\sqrt{\left(\frac{nr}{n_0 a}\right)^2 - \sin^2 z}}.$$

Aus der Proportionalität von brechender Kraft und Dichte folgt

$$n^2 - 1 = c\rho = c\rho_0 e^{-\varkappa s}$$
$$n_0^2 - 1 = c\rho_0.$$

Führt man eine neue Variable w ein durch die Gleichung

$$e^{-\varkappa s} = 1 - w, \tag{5}$$

so wird

$$-\frac{\partial n}{n} = \frac{c\rho_0 \partial w}{2n^2}$$

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = 1 - \frac{c\rho_0 w}{1+c\rho_0}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + 2s + s^2.$$

Da die unteren Luftschichten wegen ihrer grösseren Dichte auch am stärksten das Licht brechen, kann man bei der relativ geringen Höhe der Erdatmosphäre s^2 vernachlässigen und erhält, indem man

$$\frac{c\rho_0}{1+c\rho_0} = \beta$$

setzt,

$$\partial R = \frac{\beta \sin z \partial w}{2(1-\beta w)\sqrt{(1-\beta w)(1+2s) - \sin^2 z}}. \tag{6}$$

Ist die Höhe der Atmosphäre $= H$, so wären die Grenzen von w

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = 1 - e^{-\frac{\varkappa H}{a}},$$

wofür man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, die Grenzen 0 und 1 setzen kann, nachdem $\varkappa$ beiläufig 700 ist. Den ausserhalb des Wurzelzeichens befindlichen Factor $1-\beta w$ werde ich vorläufig $= 1$ annehmen, wodurch, da β circa $\frac{1}{2000}$ ist, ein nur sehr geringer Fehler entsteht, welcher übrigens noch nachträglich behoben werden kann. Gewöhnlich setzt man $1-\beta w = 1 - \frac{1}{2}\beta$, welcher Mittelwerth bei circa $z = 84°$, wo ein Einfluss 0ʺ14 beträgt, noch das Hundertstel der Secunde genau liefert, in grösseren Zenithdistanzen jedoch zu grosse Werthe gibt. Bei $z = 90°$ erhält man nämlich hiernach 0ʺ59, während $1-\beta w$ die Zahl 0ʺ34 gibt.

In dem Radicale jedoch, das bei $z = 90°$ an der Erdoberfläche $= 0$ wird, muss besonders für sehr kleine Werthe von s jede Ungenauigkeit vermieden werden. Wenn man, um s durch w auszudrücken, annehmen würde

$$1+2s = e^{2s} = (1-w)^{-\frac{2}{\varkappa}},$$

was, nachdem s^2 bereits vernachlässigt wurde, unbedenklich geschehen könnte, so erhielte man durch Entwicklung des Binoms

$$1+2s = 1+\frac{2}{\varkappa}w+\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{2}{\varkappa}+1\right)w^2+$$

welche Reihe, da $\varkappa$ circa 700 ist, ihrer schwachen Convergenz halber, aber nur für sehr kleine Werthe von w benützt werden könnte. Ich nehme an

$$1+2s = \frac{1-\mu w}{1-\nu w} \tag{7}$$

und bestimme die Coëfficienten μ und ν so, dass die Gleichung sowohl für sehr kleine Werthe von s Geltung hat, als auch für einen grösseren Werth von s genau erfüllt ist.

Ist s sehr klein, so gibt die Gleichung 5)

$$w = \varkappa s.$$

Und sonach

$$1+2s = \frac{1-\mu\varkappa s}{1-\nu\varkappa s}$$

$$\nu-\mu = \frac{2}{\varkappa}.$$

Soll die Gleichung 7) einem bestimmten grösseren Werthe von s, wofür ich $\frac{1}{\varkappa}$ gewählt habe, genau entsprechen, so muss

$$1+\frac{2}{\varkappa} = \frac{1-\mu\left(1-\frac{1}{e}\right)}{1-\nu\left(1-\frac{1}{e}\right)}$$

sein, woraus folgt

$$\nu = \frac{1}{e-1}; \quad \nu-\mu = \frac{2}{\varkappa}. \tag{8}$$

Die Annahme von $s = \frac{1}{\varkappa}$ zur Bestimmung der Coëfficienten ist gewiss nicht die beste; ich habe sie nur wegen ihrer Einfachheit und des vorwiegenden Einflusses der unteren Luftschichten gemacht.

Es wird nun

$$\partial R = \frac{\beta \sin z}{2} \frac{\sqrt{1-\nu w}\,\partial w}{\sqrt{(1-\beta w)(1-\mu w)-(1-\nu w)\sin^2 z}}.$$

Die Substitutionen

$$2c = \frac{\nu \sin^2 z - \beta - \mu}{\beta\mu}; \quad a^2 = \frac{\cos^2 z}{\beta\mu} \tag{9}$$

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\nu w}\,\partial w}{\sqrt{w^2+2cw+a^2}}$$

ergeben

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\mu}}\sin z \,.\, J. \tag{10}$$

Um die Reduction von J auszuführen, kann man annehmen

$$\sqrt{1-\nu w} = h \operatorname{tg} \psi, \tag{11}$$

wo h eine noch näher zu bestimmende Constante bedeutet, und erhält

$$\partial w = -\frac{2h^2 \operatorname{tg}\psi}{\nu \cos^2\psi}\partial\psi$$

$$\nu^2(w^2+2cw+a^2) = 1+2c\nu+\nu^2 a^2 - 2h^2(1+c\nu)\operatorname{tg}^2\psi + h^4 \operatorname{tg}^4\psi.$$

Es ist aber nach 9)

$$1+2c\nu+\nu^2 a^2 = 1+\frac{\nu^2-\nu(\beta+\mu)}{\beta\mu}$$

mithin constant, und da $\nu-\mu = \frac{2}{\varkappa}$ und $\beta < \frac{2}{\varkappa}$ auch positiv; diese Grösse soll mit h^4 benannt werden.

$$h^4 = 1+2c\nu+\nu^2 a^2 = 1+\frac{\nu^2-\nu(\beta+\mu)}{\beta\mu} \tag{12}$$

$$\nu^2(w^2+2cw+a^2) = h^4\left(1-2\frac{1+c\nu}{h^2}\operatorname{tg}^2\psi+\operatorname{tg}^4\psi\right).$$

Man erhält nun, indem man das negative Vorzeichen durch Vertauschung der Integrationsgrenzen beseitigt

$$J = 2h\int\frac{\operatorname{tg}^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+c\nu}{h^2}\right)\sin^2 2\psi}} \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\psi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}; \quad \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{1}{h}.$$

Die weitere Behandlung dieses Integrals hängt vom Coëfficienten $1+\frac{1+c\nu}{h^2}$ ab.

Für $z = 0$ wird nach 9)

$$2c = -\frac{\mu+\beta}{\beta\mu}; \quad a^2 = \frac{1}{\beta\mu}; \quad c^2-a^2 = \left(\frac{\mu-\beta}{2\beta\mu}\right)^2.$$

Es ist sonach c negativ, c^2-a^2 positiv. Nach 12) ist

$$(1+c\nu)^2 = h^4+\nu^2(c^2-a^2).$$

Daher

$$\frac{(1+c\nu)^2}{h^4} > 1,$$

also auch der absolute Werth von $\frac{1+c\nu}{h^2} > 1$. Nachdem $h > 1$ und c hier negativ ist, muss auch $\frac{1+c\nu}{h^2}$ negativ sein und ebenso

$$1+\frac{1+c\nu}{h^2}$$

einen negativen Werth erhalten.

Während die Werthe von c mit wachsendem z sich der Null nähern und dann positiv werden, wird, da a continuirlich gegen Null abnimmt, c^2-a^2 zweimal gleich Null, indem zuerst

$-c = a$, dann $+c = a$. Die Werthe von z, für welche $c^2 = a^2$, seien z_1 und z_2, wobei $z_2 > z_1$ sein soll. Sie sind Wurzeln der Gleichung

$$h^4 = (1+c\nu)^2,$$

woraus sich ergibt

$$\begin{aligned} 1+c_1\nu &= -h^2 \\ 1+c_2\nu &= +h^2 \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} 1-\frac{\nu\cos z_1}{\sqrt{\beta\mu}} &= -h^2 \\ 1+\frac{\nu\cos z_2}{\sqrt{\beta\mu}} &= h^2, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos z_1 - \cos z_2 &= \frac{2\sqrt{\beta\mu}}{\nu} \\ \cos z_1 + \cos z_2 &= \frac{2h^2\sqrt{\beta\mu}}{\nu}. \end{aligned} \tag{14}$$

Nachdem für $z = z_1$

$$1+\frac{1+c\nu}{h^2} = 0,$$

für $z = z_2$

$$1+\frac{1+c\nu}{h^2} = 2$$

ist leicht ersichtlich, dass die folgenden Relationen bestehen.

$0 \leqq z < z_1$	$1+\frac{1+c\nu}{h^2} < 0$	$c^2 > a^2$	c negativ
$z_1 < z < z_2$	$0 < 1+\frac{1+c\nu}{h^2} < 2$	$c^2 < a^2$	$c \mp$
$z_2 < z$	$2 < 1+\frac{1+c\nu}{h^2}$	$c^2 > a^2$	c positiv

Betrachten wir zunächst die beiden Fälle, in welchen $z = z_1$ und $z = z_2$ wird.

$$z = z_1.$$

Die Gleichung 13) gibt hiefür

$$J = 2h\int \operatorname{tg}^2\psi\, d\psi$$

oder

$$J = 2h\{\operatorname{tg}\psi_2 - \operatorname{tg}\psi_1 - (\psi_2 - \psi_1)\}.$$

$$z = z_2$$

$$J = 2h\int \frac{\operatorname{tg}^2\psi\, d\psi}{\cos 2\psi}$$

$$J = 2h\left[\frac{1}{2}\log.\,\text{nat.}\,\frac{\operatorname{tg}(45+\psi_2)}{\operatorname{tg}(45+\psi_1)} - \operatorname{tg}\psi_2 + \operatorname{tg}\psi_1\right]$$

Diese beiden Fälle sind die einzigen, in welchen sich J durch Logarithmen, trigonometrische Functionen und Kreisbögen vollständig ausdrücken lässt.

I.

$$0 \leqq z < z_1.$$

Durch Einführung eines Hilfswinkels γ entsprechend der Gleichung

$$\frac{1+c\nu}{h^2} = -\frac{1}{\cos\gamma},$$

wo γ im ersten Quadranten liegt, wird

$$1 + \frac{1+c\nu}{h^2} = -\frac{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}$$

und nach 13)

$$J = 2h\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}\int \frac{\operatorname{tg}^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\cos^2 2\psi}}$$

Nimmt man

$$\psi = 45 - \frac{1}{2}\chi$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = k, \qquad k^2 < 1,$$

so wird

$$J = 2h\sqrt{1-k^2}\int\frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\left(45-\frac{1}{2}\chi\right)d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}$$

$$\mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi_1\right) = \frac{1}{h}; \qquad \mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi_2\right) = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}$$

Es ist

$$\mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi\right) = \frac{1-\sin\chi}{\cos\chi}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\left(45-\frac{1}{2}\chi\right) = \frac{1-\sin\chi}{\cos^2\chi} - \frac{1}{2}.$$

Setzt man

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\chi} = \Delta$$

$$\int\frac{d\chi}{\Delta} = F$$

$$\int\Delta\, d\chi = E,$$

wobei die Grenzen χ_1 und χ_2 sein sollen, so hat man

$$d(\Delta\,\mathrm{tg}\,\chi) = \left(\frac{1-k^2}{\Delta\cos^2\chi} + \Delta - \frac{1-k^2}{\Delta}\right)d\chi$$

$$d\left(\frac{\Delta}{\cos\chi}\right) = \frac{(1-k^2)\sin\chi}{\Delta\cos^2\chi}\,d\chi$$

und daher

$$J = \frac{2h}{\sqrt{1-k^2}}\left[\frac{1}{2}(1-k^2)F - E - \Delta_2\,.\,\mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi_2\right) + \right.$$

$$\left. + \Delta_1\,\mathrm{tg}\left(45-\frac{1}{2}\chi_1\right)\right] \qquad 15)$$

worin Δ_1 und Δ_2 aus Δ hervorgehen, wenn man für χ einsetzt χ_1 respective χ_2.

Die Werthe F und E können den Legendre'schen Tafeln der elliptischen Integrale entnommen werden, deren Argument Θ aus den Gleichungen erhalten wird

$$\cos\gamma = -\frac{h^2}{1+c\nu} = \frac{2h^2}{\nu^2 a^2 - h^4 - 1}$$

oder wenn man γ direct als Function von z berechnen will

$$\cos\gamma = \frac{\frac{2h^2}{h^4+1}}{\frac{\nu^2\cos^2 z}{\beta\mu(h^4+1)}-1}$$

$$\sin\Theta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma.$$

II.

$$z_1 < z < z_2.$$

Setzt man in diesem Falle

$$\cos 2\Theta = -\frac{1+c\nu}{h^2} = \frac{\nu^2 a^2 - h^4 - 1}{2h^2},$$

so wird

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+c\nu}{h^2}\right) = k^2 = \sin^2\Theta.$$

Ist ferner

$$\psi = \frac{1}{2}\chi$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h};\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_2 = \frac{1}{h},$$

so wird

$$J = 2h\int\frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\chi\, d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}.$$

Zur Berechnung dieses Integrals dienen die Formeln

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi = \frac{1-\cos\chi}{\sin\chi};$$

$$d(\Delta\operatorname{cotg}\chi) = -\frac{d\chi}{\Delta\sin^2\chi} - \Delta d\chi + \frac{d\chi}{\Delta};$$

$$d\left(\frac{\Delta}{\sin\chi}\right) = -\frac{\cos\chi\, d\chi}{\Delta\sin^2\chi},$$

wonach man erhält

$$J = 2h\left[\frac{1}{2}F - E + \Delta_2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_2 - \Delta_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_1\right] \qquad 16)$$

Die Grenzwerthe von χ sind hier durch die Gleichungen gegeben

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}; \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\chi_2 = \frac{1}{h}$$

Wie man sofort sieht, ist der Zusammenhang zwischen diesen Grenzen von χ, die ich jetzt mit χ' bezeichne, und den in I vorkommenden, folgender

$$\chi_1' = 90 - \chi_2$$
$$\chi_2' = 90 - \chi_1.$$

Die Grenzwerthe sind sonach durchaus constant.

III.

$$z_2 < z \leqq 90.$$

Nachdem hiefür $1 + \frac{1+c\nu}{h^2} > 2$, würde der Modul grösser als Eins, und daher die unmittelbare Auswerthung der elliptischen Integrale durch die Tafeln nicht möglich. Durch die Substitution

$$\nu^2(c^2 - a^2) = \delta^2$$

erhält man

$$h^4 = (1 + c\nu + \delta)(1 + c\nu - \delta).$$

Die Einführung eines Winkels φ durch die Gleichung

$$1 - \nu w = (1 + c\nu - \delta)\sin^2\varphi$$

gibt

$$\nu^2(w^2 + 2cw + a^2) = h^4 \cos^2\varphi\left(1 - \frac{1+c\nu-\delta}{1+c\nu+\delta}\sin^2\varphi\right).$$

Es sei wieder

$$\frac{1+c\nu-\delta}{1+c\nu+\delta} = k^2,$$

so wird

$$1+c\nu-\delta = h^2 k$$

$$1+c\nu+\delta = \frac{h^2}{k}$$

$$-\nu dw = 2h^2 k \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi.$$

Die ursprüngliche Form von J geht nun über in

$$J = \frac{2h}{\sqrt{k}} \int \frac{k^2 \sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h\sqrt{k}}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{1}{h\sqrt{k}}.$$

Es sei wieder

$$F = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$E = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

so wird

$$J = \frac{2h}{\sqrt{k}}(F-E). \tag{17}$$

k kann auch berechnet werden aus den Formeln

$$\sin\gamma = \frac{h^2}{1+c\nu} = \frac{2h^2}{h^4+1-\nu^2 a^2},$$

$$k = \sin\Theta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma.$$

Für $z = 90$ wird $k = \frac{1}{h^2}$; $\varphi_2 = 90$.

Ad I.

Nachdem für mässige Werthe von z der Hilfswinkel γ gross ausfällt und daher $k = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$ von der Einheit nicht zu weit entfernt ist, kann man durch Einführung des Complimentärmoduls k_1, wo $k_1^2 = 1-k^2$, die Grösse J bequemer durch Integration einer nach Potenzen von k_1 fortschreitenden Reihe erhalten.

Da

$$J = 2hk_1 \int \frac{\operatorname{tg}^2 \psi \, d\psi}{\sqrt{\sin^2 2\psi + k_1^2 \cos^2 2\psi}},$$

so wird

$$\operatorname{tg}^2 \psi = x$$

gesetzt,

$$\operatorname{tg}^2 \psi d\psi = \frac{\sqrt{x}\, dx}{2(1+x)},$$

$$\sin 2\psi = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \quad \cos 2\psi = \frac{1-x}{1+x}$$

$$J = \frac{hk_1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + k_1^2 \frac{(1-x)^2}{4x}}}.$$

$$x_1 = \frac{1-\nu}{h^2}, \quad x_2 = \frac{1}{h^2}.$$

Setzt man

$$X_m = \int \left(\frac{1}{x^m} + x^m \right) dx,$$

so wird

$$\xi_1 = \int \frac{(1-x)^2 dx}{x} = X_1 - 2(x_2 - x_1),$$

$$\xi_2 = \int \frac{(1-x)^4 dx}{x^2} = X_2 - 4X_1 + 6(x_2 - x_1),$$

$$J = \frac{hk_1}{2} \left[x_2 - x_1 - \frac{1}{8} k_1^2 \xi_1 + \frac{3}{128} k_1^4 \xi_2 - \frac{5}{1024} k_1^6 \xi_3 + \quad .. \right] \qquad 18)$$

Indem man in dieser Reihe das mit k^{12} multiplicirte Glied noch berücksichtigt, erhält man J noch für $z = 80°$ bis auf sechs Decimalstellen genau. Aus vorstehender Reihe lässt sich dann auch auf eine sehr einfache Weise die Grösse $\frac{\partial J}{\partial c}$ bestimmen.

Um den Einfluss zu ermitteln, welchen Änderungen der Constanten auf die Refraction ausüben, braucht man bloss die Gleichung 10) zu differenziren und erhält für die Änderung des Logarithmus von R

$$d \log R = d \log g + d \log J,$$

$$g = \sqrt{\frac{\beta}{\mu}} \tag{19}$$

Nachdem

$$h^4 = 1 + 2c\nu + \nu^2 a^2$$

ist, kann man J als Function von c und h betrachten, wo c implicite ebenfalls von h abhängt, und schreiben

$$J = \nu \int \frac{\sqrt{1-\nu w}\, dw}{\sqrt{\nu^2 w^2 - 2c\nu(1-\nu w) + h^4 - 1}},$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \nu^2 \int \frac{(1-\nu w)^{\frac{3}{2}}\, dw}{[\nu^2 w^2 - 2c\nu(1-\nu w) + h^4 - 1]^{\frac{3}{2}}},$$

$$= \frac{1}{\nu} \int \frac{(1-\nu w)^{\frac{3}{2}}\, dw}{(w^2 + 2cw + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und erhält nach 11)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial c} &= \frac{2\nu}{h} \int \frac{\sin^4 \psi\, d\psi}{\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+c\nu}{h^2}\right)\sin^2 2\psi\right]^{\frac{3}{2}}} \\
2 \sin^4 \psi &= 1 - \cos 2\psi - \frac{1}{2} \sin^2 2\psi \\
\frac{\partial J}{\partial h} &= - \int \frac{\sin^2 2\psi\, d\psi}{\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+c\nu}{h^2}\right)\sin^2 2\psi\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}, \qquad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{1}{h}$$

Bei der Reduction dieser Integrale werden wieder die Fälle I, II, III zu unterscheiden sein.

I.

$$0 \leqq z < z_1; \quad 2\psi = 90 - \chi; \quad 1 + \frac{1+c\nu}{h^2} = -\frac{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = k; \quad \operatorname{tg}\left(45 - \frac{1}{2}\chi_1\right) = \frac{1}{h}; \quad \operatorname{tg}\left(45 - \frac{1}{2}\chi_2\right) = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}$$

Setzt man

$$\frac{1}{2}(1-k^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{F-E}{k^2} + \frac{\sin\chi_2\cos\chi_2}{\Delta_2} - \frac{\sin\chi_1\cos\chi_1}{\Delta_1}\right] = A,$$

$$\sqrt{1-k^2}\cos\gamma\left[F + \frac{\cos\chi_2}{\Delta_2} - \frac{\cos\chi_1}{\Delta_1}\right] = B,$$

so wird

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu}{2h\cos\gamma}(B-A); \qquad \frac{\partial J}{\partial h} = -A. \tag{21}$$

c ist eine Function von β und μ, welche selbst wieder als Functionen von g und h aufgefasst werden können, nachdem

$$\beta = g\sqrt{\beta\mu},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{\beta\mu}}{g}$$

und aus 12) sich ergibt

$$\frac{h^4-1}{\nu}\beta\mu = \nu - \frac{1+g^2}{g}\sqrt{\beta\mu}.$$

Durch Differenzirung erhält man

$$\frac{1}{2}\left(h^4 - 1 + \frac{\nu^2}{\beta\mu}\right)\frac{\partial(\beta\mu)}{\beta\mu} = -4h^4\frac{\partial h}{h} + \frac{\nu(1-g^2)}{\beta}\frac{\partial g}{g}.$$

Nach 12) ist auch

$$c\nu\partial\log c = 2h^4\partial\log h - \nu^2 a^2\partial\log a$$

$$= 2h^4\partial\log h + \frac{1}{2}\nu^2 a^2\partial\log(\beta\mu)$$

und daher

$$c\nu\partial\log c = 2h^4\left(1-\frac{2\nu^2\cos^2 z}{\nu^2+(h^4-1)\beta\mu}\right)\partial\log h+$$
$$+\frac{\nu^3(1-g^2)\cos^2 z}{\beta[\nu^2+(h^4-1)\beta\mu]}\,\partial\log g \qquad 22)$$

Durch Einsetzung dieses Ausdruckes in Gleichung 19), welche sich auch folgendermassen schreiben lässt

$$d\log R = d\log g+\frac{c}{J}\frac{\partial J}{\partial c}\,d\log c+\frac{h}{J}\frac{\partial J}{\partial h}\,d\log h \qquad 23)$$

ist unter Benützung der Gleichungen 21) die Beziehung zwischen der Änderung der Refraction und jener der Constanten hergestellt.

Bis zur Zenithdistanz von 80° erhält man die Änderungen von J bequemer und sicherer durch Reihenentwicklung. Setzt man nämlich, wie in ad I $\operatorname{tg}^2\psi = x$, so wird

$$\sin^4\psi = \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \qquad k_1^2 = 1-k^2$$

$$1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+c\nu}{h^2}\right)\sin^2 2\psi = \frac{1}{k_1^2}(\sin^2 2\psi+k_1^2\cos^2 2\psi),$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu k_1^3}{8h}\int\frac{dx}{\left[1+k_1^2\frac{(1-x)^2}{4x}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{k_1^3}{4}\int\frac{dx}{x\left[1+k_1^2\frac{(1-x)^2}{4x}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

So erhält man für $\frac{\partial J}{\partial c}$ eine Reihe, welche sich von der in 18) nur durch die Binomialcoëfficienten unterscheidet

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu k_1^3}{8h}\left[x_2-x_1-\frac{3}{8}k_1^2\xi_1+\frac{15}{128}k_1^4\xi_2-\frac{35}{1024}k_1^6\xi_3\ldots\right] \qquad 24)$$

Durch ähnliche Behandlung ergibt sich die Reihe für $\frac{\partial J}{\partial h}$

Es sei

$$Y_m = \int \left(\frac{1}{x^{m+1}} + x^{m-1} \right) dx,$$

so wird

$$\eta_1 = \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx = Y_1 - 2 \log \text{nat.} \frac{x_2}{x_1},$$

$$\eta_2 = \int \frac{(1-x)^4}{x^3} dx = Y_2 - 4 Y_1 + 6 \log \text{nat.} \frac{x_2}{x_1},$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{k^3}{4} \left[\log \text{nat.} \frac{x_2}{x_1} - \frac{3}{8} k_1^2 \eta_1 + \frac{15}{128} k_1^4 \eta_2 - \frac{35}{1024} k_1^6 \eta_3 + \ldots \right] \qquad 25)$$

II.

$$z_1 < z < z_2.$$

$$\cos 2\Theta = -\frac{1+c\nu}{h^2}; \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+c\nu}{h^2}\right) = k^2 = \sin^2 \Theta,$$

$$\psi = \frac{1}{2}\chi; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h}; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}\chi_2 = \frac{1}{h}.$$

Nach Formel 20) hat man

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu}{2h} \int \frac{\left(1 - \cos\chi - \frac{1}{2}\sin^2\chi\right) d\chi}{(1-k^2 \sin^2 \chi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 \chi \, d\chi}{(1-k^2 \sin^2 \chi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet man

$$\frac{1}{2\cos^2\Theta}\left(\frac{E-F\cos^2\Theta}{\sin^2\Theta} - \frac{\sin\chi_2 \cos\chi_2}{\Delta_2} + \frac{\sin\chi_1 \cos\chi_1}{\Delta_1}\right) = C$$

$$F - \frac{\sin\chi_2}{\Delta_2} + \frac{\sin\chi_1}{\Delta_1} = D$$

so wird

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\nu}{2h}[D - C\cos 2\Theta]; \quad \frac{\partial J}{\partial h} = -C.$$

$$d\log J = \frac{c\nu}{2hJ}[D - C\cos 2\Theta]\, d\log c - \frac{h}{J}\, C\, d\log h. \qquad 26)$$

Diese Gleichung in Verbindung mit 22), welche allgemein gilt, stellt den Zusammenhang der Incremente von J, h und g dar.

III.

$$z_2 < z \leqq 90.$$

$$\sin\gamma = \frac{h^2}{1+c\nu}; \quad k = \sin\Theta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

$$1 + c\nu - \delta = h^2 k; \quad 1 + c\nu + \delta = \frac{h^2}{k};$$

$$1 - \nu w = h^2 k \sin^2\varphi; \quad \sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{1-\nu}}{h\sqrt{k}}; \quad \sin\varphi_2 = \frac{1}{h\sqrt{k}}.$$

Die Formel für J, aus welcher die Gleichungen 20) abgeleitet wurden, gibt im vorliegenden Falle

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{1}{\nu}\int \frac{(1-\nu w)^{\frac{3}{2}}\, dw}{(w^2 + 2cw + a^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{2h^3}{\nu^2}\int \frac{\sqrt{1-\nu w}\, dw}{(w^2 + 2cw + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Durch die Substitution der Variablen φ wird

$$w^2 + 2cw + a^2 = \frac{h^4\cos^2\varphi}{\nu^2}(1 - k^2\sin^2\varphi)$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{2\nu}{h} k^{\frac{5}{2}} \int \frac{\operatorname{tg}^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -4k^{\frac{3}{2}} \int \frac{\mathrm{tg}^2 \varphi \, d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Nachdem

$$\mathrm{tg}^2 \varphi \sin^2 \varphi = \mathrm{tg}^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

ist, so wird durch Annahme der Bezeichnung

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta,$$

$$(1-k^2)F - 2E + \Delta_2 \,\mathrm{tg}\, \varphi_2 - \Delta_1 \,\mathrm{tg}\, \varphi_1 +$$
$$+ k^2 \left(\frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\Delta_2} - \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\Delta_1} \right) = M$$

$$E - (1-k^2)F - k^2 \left(\frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\Delta_2} - \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\Delta_1} \right) = N;$$

$$\int \frac{\mathrm{tg}^2 \varphi}{\Delta^3} d\varphi = \frac{M}{(1-k^2)^2}; \quad \int \frac{\sin^2 \varphi}{\Delta^3} d\varphi = \frac{N}{k^2(1-k^2)};$$

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{2\nu \sin^{\frac{1}{2}} \Theta}{h \cos^2 \Theta} (M \,\mathrm{tg}^2 \Theta - N);$$

$$\frac{\partial J}{\partial h} = -\frac{4 \sin^{\frac{3}{2}} \Theta}{\cos^4 \Theta} M;$$

$$d \log J = \frac{2c\nu \sin^{\frac{1}{2}} \Theta}{hJ \cos^2 \Theta} (M \,\mathrm{tg}^2 \Theta - N) \, d \log c - \frac{4h \sin^{\frac{3}{2}} \Theta}{J \cos^4 \Theta} M \, d \log h \qquad 27)$$

Die Grösse $d \log c$ ist durch Formel 22) gegeben.

Für

$$z = 90°$$

wird

$$\delta = c\nu, \quad \sin \Theta = \frac{1}{h^2}, \quad c\nu d \log c = 2h^4 d \log h,$$

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{1-\nu}, \quad \varphi_2 = 90°$$

und daher

$$d \log J = -\frac{4h^2}{(h^4-1)J} \left[F - h^4 (F-E) + \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\Delta_1} \right] d \log h.$$

Um den allgemeinen Factor in Gleichung 6) $\frac{1}{1-\beta w}$ zu berücksichtigen, kann man hiefür setzen $1+\beta w$, wodurch sich zu J noch das Increment

$$\Delta J = \beta \int \frac{w\sqrt{1-\nu w}\, dw}{\sqrt{w^2+2cw+a^2}}$$

gesellt, wofür man auch schreiben kann

$$\Delta J = \frac{\beta}{\nu}\left[J - \int \frac{(1-\nu w)^{\frac{3}{2}} dw}{\sqrt{w^2+2cw+a^2}}\right].$$

Bezeichnet man

$$f = E - \Delta_2 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 + \Delta_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1,$$

so wird z. B. für den Fall III

$$\int \frac{(1-\nu w^{\frac{3}{2}} dw}{\sqrt{w^2+2cw+a^2}} = \frac{h^2}{3k}\left[(2+k^2)J - 2hk^{\frac{3}{2}} f\right].$$

Es sei ΔR die durch ΔJ bewirkte Refractionsänderung, $\Delta' R$ die Änderung, welche R erfährt, wenn man für $\frac{1}{1-\beta w}$ setzt $\frac{1}{1-\frac{1}{2}\beta}$, so findet man

	ΔR	$\Delta' R$
90°0	+0"34	+0·59
89·5	0·33	0·48
89·0	0·31	0·41
88·5	0·29	0·35
88·0	0·26	0·31
87·5	0·24	0·27
87·0	0·22	0·24
86·5	0·20	0·22
86·0	0·18	0·20
85·5	0·17	0·18
85·0	+0·16	+0·16

Für kleinere Zenithdistanzen wird der Unterschied unmerklich.

Nachdem ich einige Werthe der mittleren Refraction mittelst der Bessel'schen Refractionsconstante und des Werthes $\varkappa = 700$ berechnet hatte, fand ich unter nur oberflächlicher Berücksichtigung des Einflusses von ∂g und ∂h auf R, dass man zu einem befriedigenden Resultate gelangt, wenn man annimmt

$$\log g = 8\cdot 4925500; \quad \log h = 0\cdot 1786500.$$

Hieraus folgt

$$\log \beta = 6\cdot 7478447; \quad \log \mu = 9\cdot 7627446;$$

$$\varkappa = 692\cdot 3544.$$

Nach 4) ist

$$\varkappa = \frac{a}{l_0} - a\omega'$$

Der Werth von $\frac{a}{l_0}$ ist nach Bessel $773\cdot 726$, nach Gyldèn $773\cdot 136$; man kann sonach annehmen

$$a\omega' = 81\cdot 0.$$

Aus der zur Ableitung der Gleichung 4) benützten Formel

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = e^{\omega' as}$$

würde mithin folgen, dass die Höhe, in welcher $t_0 - t = 1°$ C. $[m = 0\cdot 00367]$ 280^m beträgt, während sie in Wirklichkeit ungefähr 190^m ist. Eine bessere Übereinstimmung war auch nicht zu erwarten, nachdem in der Ableitung der Formeln 2) und 3) nur die directe Wärmestrahlung der Sonne berücksichtigt wurde und die Rückstrahlung seitens der Erde vernachlässigt worden ist. Wenngleich die Intensität dieser Strahlung eine viel geringere ist, so hat sie doch besonders auf die Temperaturvertheilung in den untersten Luftschichten einen sehr merklichen Einfluss, da sie durch die Atmosphäre erfahrungsgemäss eine wesentlich stärkere Absorption erfährt, als die directe

Strahlung der Sonne und hiedurch die untersten Luftschichten sowohl wegen ihrer geringeren Entfernung von dieser Wärmequelle, als auch wegen ihrer grösseren Dichte sich am meisten erwärmen, was eine raschere Temperaturabnahme in der Richtung der Verticalen zur Folge hat. Es wäre nicht schwierig, auch den Einfluss der Rückstrahlung in Rechnung zu ziehen; man würde jedoch ohne gleichzeitige Verbesserung der Formel für die Druckvertheilung, wodurch die Ableitung der Refraction bedeutend erschwert wird, kaum wesentlich bessere Resultate erzielen.

Die Temperatur der äussersten Luftschicht wäre nach der gegebenen Ableitung bestimmt durch

$$t_0 - t_1 = \frac{1+mt_0}{m} \cdot \frac{a\omega'}{\frac{a}{l_0}(1-\alpha_0 l_0)},$$

worin

$$\alpha_0 l_0 = \log \operatorname{nat} \frac{i_1}{i_0}.$$

Da unsere Atmosphäre beiläufig $50^0/_0$ der Wärmestrahlen der Sonne absorbirt, ist $\frac{i_1}{i_0}$ ungefähr gleich 2.

Für

$$\left.\begin{array}{l} \frac{i_1}{i_0} = 2, \quad t_0 = 9^\circ 3 \text{ C. wird } t_0 - t_1 = 96^\circ \\ \frac{i_1}{i_0} = 2\cdot 2, \; t_0 = 9\;\; 3 \text{ C. wird } t_0 - t_1 = 140 \end{array}\right| \begin{array}{l} a\omega' = 81\cdot 0 \\ \frac{a}{l_0} = 773\cdot 35 \end{array}$$

Bei Annahme einer Absorption von $55^0/_0$ erhielte man sonach den Pouillet'schen Werth für die Temperatur an der Grenze unserer Atmosphäre. Der Werth von α_0 wäre in diesem Falle $0\cdot000096$.

Die in die Refractionsgleichung aufgenommene Formel

$$\frac{1+mt_0}{1+mt} = e^{\omega' as}$$

bedarf zu ihrer allgemeinen Giltigkeit der Voraussetzung einer gewissermassen unendlichen Ausdehnung der Atmosphäre und gibt eine continuirliche Temperaturabnahme gegen den Grenzwerth $-\frac{1}{m} = -272°$. Für den angenommenen Werth von $a\omega'$ würde $t_0 - t = 140°$ in einer Höhe von 54 *km*.

Zur Ausführung des Überganges von der mittleren zur wahren Refraction bedarf man der Kenntniss des Einflusses, welchen Änderungen von t_0 und p_0 auf die Constanten der Refraction β, μ oder g, h nehmen. Bei der ausserordentlichen Beweglichkeit der Atmosphäre und des hiedurch ermöglichten raschen Wechsels von Temperatur und Druck ist weder die Refraction selbst, noch ihre Änderung nur von den Angaben der meteorologischen Instrumente an der Erdoberfläche abhängig. Man ist daher angewiesen, die Berechnung der Refractionsänderungen unter gewissen Voraussetzungen zu machen, wie dies ja auch bei der Ableitung der mittleren Refraction geschehen ist. Es ist nun am einfachsten anzunehmen, dass die Gesetze, nach welchen die Änderungen von Druck und Temperatur in der Verticalen vor sich gehen, von den Anfangswerthen dieser Grössen unabhängig seien und in einer solchen Ausdehnung gelten, dass für alle Punkte der Lichtcurve nur die Daten der Beobachtungsstation massgebend sind. Diese Voraussetzung führt uns wieder auf einen mittleren Zustand der Atmosphäre, welcher sich vom Normalzustande hauptsächlich nur durch seine Beschränkung auf die Gegend des Beobachtungsortes unterscheidet.

Doch wird im Allgemeinen eine Verschiedenheit bestehen zwischen der Art und Weise, in welcher die Änderungen von Normal-Temperatur und -Druck hervorgebracht werden. Während nämlich erstere vorwiegend durch seitliche Strömungen bedingt werden, welche Luft aus nördlichen oder südlichen Gegenden zuführen, dürften letztere mehr durch Hebung und Senkung des Luftmeeres nach Art der Gezeiten zu Stande kommen.

Der im Früheren behandelte Normalzustand wird genähert für zwei Zonen in mittleren Breiten Geltung haben. Gegen den Äquator hin erreicht t_0 in Folge der intensiveren Wärmewirkung der Sonne grössere Werthe, gegen die Pole hin kleinere. Nach den gegebenen Gesichtspunkten erscheinen diese Änderungen von t_0 hervorgerufen durch Änderungen der mittleren Strahlungs-Intensität i_1. Und so wird, wenn wir uns auf die gemässigte Zone beschränken, der wahre Temperaturzustand der Atmosphäre an irgend einer Beobachtungsstation gleich dem mittleren Zustande derselben für eine Zone, in welcher der beobachtete Thermometerstand der mittlere ist. Für die Rechnung bleibt es sich gleich, ob man annimmt, dass an Stelle der ursprünglichen normal temperirten Luftsäule durch seitliche Strömungen eine andere getreten ist, die dem wahren Temperaturzustande entspricht, oder ob man sich an Ort und Stelle den wahren Temperaturzustand aus dem normalen durch Änderung der Strahlungsintensität entstanden denkt.

Die Änderung des Normaldrucks lässt sich leicht berücksichtigen, da die Formel für die Druckvertheilung auch im Falle einer Erhöhung oder Erniedrigung der Atmosphäre anwendbar bleibt. Da aber ω', welches den Zusammenhang von t_0 und t_1 gibt, wobei t_1 als durchaus constant zu betrachten ist, auch von α_0 abhängt, und letztere Grösse dem Drucke proportional gesetzt worden ist, so entsteht die Frage, ob bei einer Änderung des Normaldrucks deren Einfluss auf den Temperaturcoëfficienten ω' zu berücksichtigen ist oder nicht. Wenn durch längere Zeit hindurch bei ruhiger und klarer Luft ein gleichmässiger Druck zu beobachten wäre, so müsste gewiss auch α_0 dementsprechend abgeändert werden. Nachdem aber in den meisten Fällen diese Voraussetzung nicht zutrifft und z. B. eine Druckänderung bei Nacht die Absorption der Sonnenstrahlung natürlich gar nicht, bei Tag und bedecktem Himmel nur theilweise beeinflussen würde, so kann man im Allgemeinen die Abhängigkeit der Grösse ω' vom Druck nicht bestimmen; man wird daher annehmen müssen $\frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0$.

Unter Beibehaltung des Index 0 zur Bezeichnung jener Grössen, welche sich auf den Normalzustand beziehen, werde ich die dem wahren Zustande der Atmosphäre an der Erdoberfläche entsprechenden Bestimmungsstücke im Folgenden ohne jeglichen Index geben.

Es sei D die Dichte des Quecksilbers bei 0°, b der auf die Temperatur 0 reducirte Barometerstand, (ρ) die Dichte der Luft für $t = 0$ und $b = 0 \cdot 760$, so wird

$$p = Dgb; \qquad \rho = (\rho)\frac{\dfrac{b}{0\cdot 760}}{1+mt};$$

$$l = \frac{p}{\rho g} = \frac{D}{(\rho)} \times 0\cdot 760(1+mt);$$

$$\beta = \frac{c\rho}{1+c\rho}; \quad \mu = \frac{1}{e-1} - \frac{2}{\varkappa}; \quad \varkappa = a\left(\frac{1}{l} - \omega'\right);$$

$$\omega' = \frac{m(t-t_1)}{1+mt}\left(\frac{1}{l} - \alpha\right).$$

Durch Differentiation erhält man bei Vernachlässigung von β^2

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{m}{1+mt}\rho; \qquad \frac{\partial\rho}{\partial b} = \frac{\rho}{b};$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = -\frac{m\beta}{1+mt}; \qquad \frac{\partial\beta}{\partial b} = \frac{\beta}{b};$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{m}{1+mt}l; \qquad \frac{\partial l}{\partial b} = 0.$$

Indem man α als constant betrachtet und die Bezeichnung wählt

$$\sigma = \frac{m(t-t_1)}{1+mt}$$

wird ferner, da t_1 constant ist

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{m}{1+mt}(1-\sigma);$$

$$\frac{\partial\omega'}{\partial t} = \frac{m}{1+mt}\left(\frac{1-\sigma}{l} - \alpha - \omega'\right);$$

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial t} = -\frac{am}{1+mt}(1-\sigma)\left(\frac{2}{l} - \alpha\right),$$

wofür man durch Elimination von α und l auch schreiben kann

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial t} = -\frac{m}{1+mt}\varkappa\left\{1 - \left(\sigma - \frac{a\omega'}{\varkappa}\,\frac{1-\sigma^2}{\sigma}\right)\right\},$$

während

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial b} = 0.$$

Setzt man

$$\Delta = -\left(\sigma - \frac{a\omega'}{\varkappa}\frac{1-\sigma^2}{\sigma}\right),$$

so ergibt sich hiefür unter Annahme nachstehender Werthe von $\frac{i_1}{i_0}$ Folgendes.

$\frac{i_1}{i_0}$	1·9	2·0	2·1	2·2
σ	0·292	0·341	0·406	0·495
t_0-t_1	82°	96°	114°	140°
Δ	+0·073	—0·038	—0·165	—0·317

Für $\frac{i_1}{i_0} = 1 \cdot 97$ würde sonach Δ nahezu gleich Null, während t_0—t_1 beiläufig 90° betrüge.

In Ermanglung einer genaueren Kenntniss des Verhältnisses der Strahlungsintensitäten, sowie der Temperatur an der Grenze der Atmosphäre lässt sich der Werth von Δ nicht bestimmen und wird man daher keine wesentlich bessere Annahme machen können, als $\Delta = 0$ zu setzen, was darauf hinauskommt

$$\omega = (t-t_1)\left(\frac{1}{l} - \alpha\right)$$

als constant zu betrachten.

Aus dem Bisherigen geht zur Genüge hervor, dass man bei Berechnung der wahren Refraction aus der mittleren nur die Hauptglieder zu berücksichtigen hat und die Einbeziehung der zweiten Differentialquotienten nur eine illusorische Erhöhung der Genauigkeit gibt.

Bezeichnet man

$$P = \frac{\partial \log R}{\partial \log g}; \quad Q = \frac{\partial \log R}{\partial \log h},$$

so wird

$$d \log R = Pd \log g + Qd \log h.$$

Aus

$$\frac{h^4-1}{\nu}\beta\mu = \nu-\mu-\beta; \quad \nu-\mu = \frac{2}{\varkappa};$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{2}{\varkappa^2}\frac{\partial\varkappa}{\partial t} = -\frac{m}{1+mt}\,\frac{1}{\varkappa}; \quad \frac{\partial\mu}{\partial b} = 0$$

folgt, wenn zur Abkürzung

$$m' = \frac{m}{1+mt}$$

gesetzt wird,

$$\frac{4h^3\beta\mu}{\nu}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{2m'}{\varkappa}\left(1+\frac{\nu-\beta}{\mu}\right);$$

$$\frac{4h^3\beta\mu}{\nu}\frac{\partial h}{\partial b} = -\frac{2}{\varkappa b}.$$

Indem man in der ersten Gleichung β gegen ν vernachlässigt, erhält man

$$\frac{\partial \log h}{\partial t} = \text{Mod.}\frac{2m'\nu}{4h^4\beta\varkappa\mu}\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right).$$

$$\frac{\partial \log h}{\partial b} = -\text{Mod.}\frac{\nu}{2\,h^4\beta\varkappa\mu b}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus

$$g^2 = \frac{\beta}{\mu}$$

$$\frac{\partial \log g}{\partial t} = -\text{Mod.}\frac{m'}{2}\left(1-\frac{2}{\varkappa\mu}\right);$$

$$\frac{\partial \log g}{\partial b} = \frac{\text{Mod.}}{2b}.$$

Führt man, um auf den Bessel'schen Ausdruck für die an die mittlere Refraction anzubringende Correction überzugehen, die Bezeichnungen ein

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\mu\varkappa}\right)P - \frac{\nu}{2h^4\beta\varkappa\mu}\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)Q,$$

$$A = \frac{1}{2}\left(P - Q\frac{\nu}{h^4\beta\varkappa\mu}\right),$$

so wird

$$\frac{\partial \log R}{\partial t} = -\text{Mod. } m'\lambda,$$

$$\frac{\partial \log R}{\partial b} = \frac{\text{Mod.}}{b}A.$$

Ferners kann man sich erlauben anzunehmen

$$-\text{Mod. } m'dt = -\frac{m \text{ Mod.}}{1+m\frac{t+t_0}{2}}(t-t_0),$$

(wofür nach Bessel die Bezeichnung $\log \gamma$ zu wählen ist) und

$$\text{Mod.}\frac{db}{b} = d\log b = \log b - \log b_0.$$

Ist b' der bei einer Temperatur τ (inneres Thermometer) abgelesene Barometerstand, ε der Ausdehnungscoëfficient des Quecksilbers, so wird

$$b = \frac{b'}{1+\varepsilon\tau},$$

oder wenn gesetzt wird

$$T = \frac{1}{1+\varepsilon\tau}; \quad \log B = \log b' - \log b_0;$$

$$\log b = \log b' + \log T;$$

$$\log b - \log b_0 = \log B + \log T.$$

Es wird sonach

$$d\log R = A(\log B + \log T) + \lambda \log \gamma.$$

Im Folgenden sind die unter Zugrundelegung von

$$\log g = 8\cdot4925500,$$
$$\log h = 0\cdot1786500$$

berechneten Werthe von

$$R = \frac{1}{2} g \sin z (J + \Delta J),$$

sowie der Logarithmen von R, P, Q zusammengestellt, und auch die Differenzen beigefügt, welche zwischen den von mir erhaltenen Werthen für die mittlere Refraction und jenen von Bessel (B) und Gyldèn (G) angegebenen bestehen.

Nachdem in der Refractionstafel nach Bessel die Werthe für $85° \leqq z \leqq 90°$ unmittelbar aus Beobachtungen von Argelander abgeleitet sind, habe ich die Unterbrechungsstelle in der Continuität der Tafelwerthe durch einen Strich gekennzeichnet.

	log R	log P	log Q	R	$B-H$	$G-H$	$B-G$
90°	3·32048	0·0000	0″3773	2091″60	+15″50	—29″90	+45″40
	3·23674	0·0713	0″2859	1724·81	+18·99	—12·15	+31·14
89	3·16300	0·1196	0″2013	1455·46	+ 9·17	— 5·36	+14·53
	3·09703	0·1546	0″1213	1250·36	+ 0·58	— 3·32	+ 3·90
88	3·03740	0·1811	0″0448	1089·93	— 1·35	— 2·33	+ 0·98
	2·98308	0·2015	9″9715	961·80	— 0·88	— 2·09	+ 1·21
87	2·93331	0·2176	9″9012	857·66	— 3·10	— 1·83	— 1·27
	2·88749	0·2304	9″8339	771·77	— 3·44	— 1·55	— 1·89
86	2·84511	0·2406	9″7698	700·02	— 1·09	— 1·30	+ 0·21
	2·80578	0·2489	9″7087	639·41	+ 0·18	— 1·11	+ 1·29
85	2·76912	0·2557	9″6506	587·66	— 3·05	— 0·96	— 2·09
	2·73486	0·2613	9″5954	543·07	— 1·18	— 0·83	— 0·35
84	2·70271	0·2659	9″5432	504·32	— 1·01	— 0·69	— 0·32
	2·67246	0·2698	9″4937	470·39	— 0·87	— 0·49	— 0·38
83	2·64391	0 2731	9″4468	440·47	— 0·78	— 0·41	— 0·37
	2·61690	0·2758	9″4023	413·91	— 0·66	— 0·30	— 0·36
82	2·59127	0·2782	9″3602	390·19	— 0·56	— 0·21	— 0·35
	2·56690	0·2803	9″3202	368·89	— 0·48	— 0·14	— 0·34
81	2·54367	0·2820	9″2822	349·68	— 0 40	— 0·08	— 0·32
	2·52148	0 2835	9″2462	332·26	— 0·31	— 0·04	— 0·27

	log R	log P	log Q	R	$B-H$	$G-H$	$B-G$
80°	2·50024	0·2848	9″2120	316″41	— 0″25	0″00	— 0″25
	2·47988	0·2860	9″1795	301·91	— 0·19	+ 0·03	— 0·22
79	2·46032	0·2870	9″1485	288·62	— 0·15	+ 0·06	— 0·21
	2·44150	0·2879	9″1190	276·38	— 0·10	+ 0·08	— 0·18
78	2·42337	0·2888	9″0910	265·07	— 0·07	+ 0·10	— 0·17
	2·40586	0·2895	9″0642	254·60	— 0·04	+ 0·12	— 0·16
77	2·38895	0·2901	9″0387	244·88	— 0·01	+ 0·13	— 0·14
	2·37258	0·2907	9″0144	235·82	+ 0·01	+ 0·15	— 0·14
76	2·35673	0·2913	8″9912	227·36	+ 0·03	+ 0·15	— 0·12
	2·34134	0·2917	8″9690	219·45	+ 0·04	+ 0·15	— 0·11
75	2·32641	0·2922	8″9478	212·04	+ 0·05	+ 0·15	— 0·10
	2·31189	0·2926	8″9276	205·07	+ 0·06	+ 0·15	— 0·09
74	2·29776	0·2929	8″9082	198·50	+ 0·08	+ 0·16	— 0·08
	2·28400	0·2932	8″8896	192·31	+ 0·09	+ 0·16	— 0·07
73	2·27058	0·2936	8″8719	186·46	+ 0·10	+ 0·16	— 0·06
	2·25749	0·2938	8″8549	180·92	+ 0·10	+ 0·16	— 0·06
72	2·24470	0·2941	8″8386	175·67	+ 0·11	+ 0·16	— 0 05
	2·23220	0·2943	8″8229	170·69	+ 0·11	+ 0·16	— 0·05
71	2·21998	0·2946	8″8079	165·95	+ 0·12	+ 0·17	— 0·05
	2·20801	0·2948	8″7936	161·44	+ 0·12	+ 0·16	— 0·04
70	2·19629	0·2950	8″7798	157·14	+ 0·13	+ 0·16	— 0·03
70	2·19629	0·2950	8″7798	157·14	+ 0·13	+ 0·16	
69	2·17353	0·2953	8″7538	149·12	+ 0·13	+ 0·16	
68	2·15160	0·2956	8″7299	141·78	+ 0·13	+ 0·16	
67	2·13043	0·2958	8″7077	135·03	+ 0·13	+ 0·16	
66	2·10993	0·2961	8″6872	128·80	+ 0·14	+ 0·15	
65	2·09005	0·2963	8″6682	123·04	+ 0·13	+ 0·15	
64	2·07072	0·2965	8″6506	117·68	+ 0·14	+ 0·15	
63	2·05190	0·2966	8″6342	112·69	+ 0·13	+ 0·14	
62	2·03354	0·2968	8″6190	108·03	+ 0·13	+ 0·14	
61	2·01560	0·2969	8″6048	103·66	+ 0·12	+ 0·13	
60	1·99803	0·2970	8″5916	99·55	+ 0·12	+ 0·13	

berechneten Werthe von

$$R = \frac{1}{2} g \sin z (J+\Delta J),$$

sowie der Logarithmen von R, P, Q zusammengestellt, und auch die Differenzen beigefügt, welche zwischen den von mir erhaltenen Werthen für die mittlere Refraction und jenen von Bessel (B) und Gyldèn (G) angegebenen bestehen.

Nachdem in der Refractionstafel nach Bessel die Werthe für $85° \leqq z \leqq 90°$ unmittelbar aus Beobachtungen von Argelander abgeleitet sind, habe ich die Unterbrechungsstelle in der Continuität der Tafelwerthe durch einen Strich gekennzeichnet.

	$\log R$	$\log P$	$\log Q$	R	$B-H$	$G-H$	$B-G$
90°	3·32048	0·0000	0″3773	2091″60	+15″50	—29″90	+45″40
	3·23674	0·0713	0″2859	1724·81	+18·99	—12·15	+31·14
89	3·16300	0·1196	0″2013	1455·46	+ 9·17	— 5·36	+14·53
	3·09703	0·1546	0″1213	1250·36	+ 0·58	— 3·32	+ 3·90
88	3·03740	0·1811	0″0448	1089·93	— 1·35	— 2·33	+ 0·98
	2·98308	0·2015	9″9715	961·80	— 0·88	— 2·09	+ 1·21
87	2·93331	0·2176	9″9012	857·66	— 3·10	— 1·83	— 1·27
	2·88749	0·2304	9″8339	771·77	— 3·44	— 1·55	— 1·89
86	2·84511	0·2406	9″7698	700·02	— 1·09	— 1·30	+ 0·21
	2·80578	0·2489	9″7087	639·41	+ 0·18	— 1·11	+ 1·29
85	2·76912	0·2557	9″6506	587·66	— 3·05	— 0·96	— 2·09
	2·73486	0·2613	9″5954	543·07	— 1·18	— 0·83	— 0·35
84	2·70271	0·2659	9″5432	504·32	— 1·01	— 0·69	— 0·32
	2·67246	0·2698	9″4937	470·39	— 0·87	— 0·49	— 0·38
83	2·64391	0 2731	9″4468	440·47	— 0·78	— 0·41	— 0·37
	2·61690	0·2758	9″4023	413·91	— 0·66	— 0·30	— 0·36
82	2·59127	0·2782	9″3602	390·19	— 0·56	— 0·21	— 0·35
	2·56690	0·2803	9″3202	368·89	— 0·48	— 0·14	— 0·34
81	2·54367	0·2820	9″2822	349·68	— 0 40	— 0·08	— 0·32
	2·52148	0 2835	9″2462	332·26	— 0·31	— 0·04	— 0·27

	log R	log P	log Q	R	$B-H$	$G-H$	$B-G$
80°	2·50024	0·2848	9^{n}2120	316″41	— 0″25	0″00	— 0″25
	2·47988	0·2860	9^{n}1795	301·91	— 0·19	+ 0·03	— 0·22
79	2·46032	0·2870	9^{n}1485	288·62	— 0·15	+ 0·06	— 0·21
	2·44150	0·2879	9^{n}1190	276·38	— 0·10	+ 0·08	— 0·18
78	2·42337	0·2888	9^{n}0910	265·07	— 0·07	+ 0·10	— 0·17
	2·40586	0·2895	9^{n}0642	254·60	— 0·04	+ 0·12	— 0·16
77	2·38895	0·2901	9^{n}0387	244·88	— 0·01	+ 0·13	— 0·14
	2·37258	0·2907	9^{n}0144	235·82	+ 0·01	+ 0·15	— 0·14
76	2·35673	0·2913	8^{n}9912	227·36	+ 0·03	+ 0·15	— 0·12
	2·34134	0·2917	8^{n}9690	219·45	+ 0·04	+ 0·15	— 0·11
75	2·32641	0·2922	8^{n}9478	212·04	+ 0·05	+ 0·15	— 0·10
	2·31189	0·2926	8^{n}9276	205·07	+ 0·06	+ 0·15	— 0·09
74	2·29776	0·2929	8^{n}9082	198·50	+ 0·08	+ 0·16	— 0·08
	2·28400	0·2932	8^{n}8896	192·31	+ 0·09	+ 0·16	— 0·07
73	2·27058	0·2936	8^{n}8719	186·46	+ 0·10	+ 0·16	— 0·06
	2·25749	0·2938	8^{n}8549	180·92	+ 0·10	+ 0·16	— 0·06
72	2·24470	0·2941	8^{n}8386	175·67	+ 0·11	+ 0·16	— 0 05
	2·23220	0·2943	8^{n}8229	170·69	+ 0·11	+ 0·16	— 0·05
71	2·21998	0·2946	8^{n}8079	165·95	+ 0·12	+ 0·17	— 0·05
	2·20801	0·2948	8^{n}7936	161·44	+ 0·12	+ 0·16	— 0·04
70	2·19629	0·2950	8^{n}7798	157·14	+ 0·13	+ 0·16	— 0·03
70	2·19629	0·2950	8^{n}7798	157·14	+ 0·13	+ 0·16	
69	2·17353	0·2953	8^{n}7538	149·12	+ 0·13	+ 0·16	
68	2·15160	0·2956	8^{n}7299	141·78	+ 0·13	+ 0·16	
67	2·13043	0·2958	8^{n}7077	135·03	+ 0·13	+ 0·16	
66	2·10993	0·2961	8^{n}6872	128·80	+ 0·14	+ 0·15	
65	2·09005	0·2963	8^{n}6682	123·04	+ 0·13	+ 0·15	
64	2·07072	0·2965	8^{n}6506	117·68	+ 0·14	+ 0·15	
63	2·05190	0·2966	8^{n}6342	112·69	+ 0·13	+ 0·14	
62	2·03354	0·2968	8^{n}6190	108·03	+ 0·13	+ 0·14	
61	2·01560	0·2969	8^{n}6048	103·66	+ 0·12	+ 0·13	
60	1·99803	0·2970	8^{n}5916	99·55	+ 0·12	+ 0·13	

	log R	log P	log Q	R	$B-H$	$G-H$
59°	1·98080	0·2971	8''5792	95''68	+ 0''12	+ 0''12
58	1·96389	0·2972	8''5677	92·02	+ 0·12	+ 0·12
57	1·94725	0·2973	8''5570	88·56	+ 0·12	+ 0·12
56	1·93086	0·2974	8''5469	85·28	+ 0·11	+ 0·12
55	1·91469	0·2975	8''5375	82·17	+ 0·11	+ 0 12
54	1·89873	0·2975	8''5286	79·20	+ 0·11	+ 0·11
53	1·88294	0·2976	8''5203	76·37	+ 0·11	+ 0·11
52	1·86730	0·2976	8''5126	73·67	+ 0·11	+ 0·11
51	1·85179	0·2977	8''5052	71·09	+ 0·10	+ 0·10
50	1·83640	0·2977	8''4984	68·61	+ 0·10	+ 0·10
49	1·82109	0·2978	8''4919	66·24	+ 0·09	+ 0·09
48	1·80586	0·2978	8''4858	63·95	+ 0·09	+ 0·09
47	1·79068	0·2979	8''4800	61·76	+ 0·08	+ 0·08
46	1·77554	0·2979	8''4746	59·64	+ 0·09	+ 0·09
45	1·76041	0·2979	8''4695	57·60	+ 0·08	+ 0·08
44	1·74528	0·2980	8''4647	55·63	+ 0·08	+ 0·08
43	1·73013	0·2980	8''4602	53·72	+ 0·08	+ 0·08
42	1·71494	0·2980	8''4559	51·87	+ 0·08	+ 0·08
41	1·69969	0·2980	8''4518	50·08	+ 0·08	+ 0·08
40	1·68436	0·2981	8''4480	48·35	+ 0·07	+ 0·07

	log $\frac{R}{\mathrm{tg}\, z}$	log P	log Q	R	$B-H$
40°	1·76055	0·2981	8''4480	48''35	+0''07
38	59	81	4409	45·02	0·07
36	63	82	4346	41·87	0·06
34	67	82	4289	38·87	0·06
32	70	82	4238	36·01	0·06
30	73	82	4192	33·28	0·05
28	75	83	4152	30·65	0·05
26	77	83	4115	28·12	0·04
24	79	83	4083	25·67	0·04
22	81	83	4054	23·30	0·03
20	82	83	4028	20·90	0·03
18	83	84	4006	18·73	0·03
16	84	84	3986	16·53	0·03
14	85	84	3969	14·37	0·03
12	86	84	3955	12·25	0·02
10	87	84	3943	10·16	0·02
8	87	84	3933	8·10	0·01
6	88	84	3926	6·06	0·01
4	88	84	3920	4·03	0·01
2	88	84	3917	2·01	0·01
0	1·76088	0·2984	8''3916	0·00	0·00

Durch passende Änderung von g und h könnten die Werthe von R noch in etwas bessere Übereinstimmung mit den Tafeln von Bessel oder Gyldèn gebracht werden. Wenn man aber nach Bessel annehmen darf, dass der wahrscheinliche Fehler seiner Tafelwerthe bei 45° = ±0"27, bei 81° ±1 beträgt, so wären die Abweichungen noch immer zu gering, um eine neuerliche Bestimmung der Refractionsconstanten zu rechtfertigen, so lange nicht genauere Daten für die Refractionen in grossen Zenithdistanzen vorliegen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Hepperger Josef von

Artikel/Article: Zur Theorie der astronomischen Refraction. 321-355