Über Tangentencongruenzen einer Fläche

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule zu Prag.

1. Vorbemerkungen. Es seien die Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes a abhängig von den Parametern u, v und das Bogenelement sei dann

$$ds^2 = Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Setzt man

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_u, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = x_{uu}, \text{ etc.}$$

und

$$\Sigma x_u x_{uu} = m, \quad \Sigma x_u x_{uv} = m', \quad \Sigma x_u x_{vv} = m''$$
$$\Sigma x_v x_{uu} = n, \quad \Sigma x_v x_{uv} = n', \quad \Sigma x_v x_{vv} = n'',$$

so sei, wenn noch

$$T^2 = EG - F^2$$

gesetzt wird,

$$T^2 J_1 = Gm - Fn, \quad T^2 J_1' = Gm' - Fn', \quad T^2 J_1'' = Gm'' - Fn''$$
$$T^2 J_2 = En - Fm, \quad T^2 J_2' = En' - Fm', \quad T^2 J_2'' = En'' - Fm''$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien der Fläche lässt sich dann schreiben:[1]

$$\begin{vmatrix} J_1 du^2 + 2J_1' du\, dv + J_1'' dv^2 + d^2u, & du \\ J_2 du^2 + 2J_2' du\, dv + J_2'' dv^2 + d^2v, & dv \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

[1] Siehe für diese Formel und die früheren Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen, S. 73, 78 und 140.

Auf der Fläche liege nun eine Schaar S_1 von ∞^1 Curven vor, gegeben durch die Differentialgleichung:

$$Q du - P dv = 0. \tag{2}$$

Damit diese Curven sämmtlich geodätische Linien der Fläche sind, muss nach Formel (1) die Gleichung bestehen:

$$\Gamma \equiv \begin{vmatrix} J_1 P^2 + 2J_1' PQ + J_1'' Q^2 + P_u P + P_v Q, & P \\ J_2 P^2 + 2J_2' PQ + J_2'' Q^2 + Q_u P + Q_v Q, & Q \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Setzt man

$$\begin{vmatrix} J_1 P + J_1' Q + P_u, & P \\ J_2 P + J_2' Q + Q_u, & Q \end{vmatrix} = \lambda_1, \quad \begin{vmatrix} J_1' P + J_1'' Q + P_v, & P \\ J_2' P + J_2'' Q + Q_v, & Q \end{vmatrix} = \lambda_2, \tag{4}$$

so übergeht Gleichung (3) in

$$\Gamma \equiv P\lambda_1 + Q\lambda_2 = 0. \tag{5}$$

2. Brennpunkt einer Tangentencongruenz der Fläche. Die Tangenten t der Curven der Schaar S_1 bilden eine Strahlencongruenz. Sei t_a diejenige dieser Tangenten, welche die Fläche im Punkte a berührt. Dann ist a der eine Brennpunkt dieses Strahles t_a der Congruenz, der andere Brennpunkt sei a' Es sind die Coordinaten dieses Punktes a' zu bestimmen.

Die Coordinaten eines Nachbarpunktes des Punktes a auf der Fläche sind

$$x + x_u du + x_v dv, \quad y + y_u du + y_v dv, \quad z + z_u du + z_v dv.$$

Soll dieser Nachbarpunkt auf der Tangente t_a liegen, so muss $du:dv$ der Gleichung (2) genügen. Die Coordinaten dieses Nachbarpunktes sind demnach:

$$x + du\left(x_u + \frac{Q}{P} x_v\right), \quad y + du\left(y_u + \frac{Q}{P} y_v\right), \quad z + du\left(z_u + \frac{Q}{P} z_v\right);$$

daher sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente t_a, wenn μ einen beliebigen Werth hat:

$$x + \mu(P x_u + Q x_v), \quad y + \mu(P y_u + Q y_v), \quad z + \mu(P z_u + Q z_v). \tag{6}$$

Soll dieser Punkt der Brennpunkt a' der Tangente t_a sein, so muss μ einen bestimmten Werth haben, und wir werden zeigen, dass sich μ durch die beiden obigen Grössen λ_1, λ_2 in folgender Weise ausdrückt. Es ist

$$\frac{1}{\mu} = \frac{(PL+QM)\lambda_2-(PM+QN)\lambda_1}{LP^2+2MPQ+NQ^2},$$

wobei

$$L du^2+2 M du\, dv+N dv^2 \tag{7}$$

die Differentialform der Inflexionstangente der Fläche ist.

3. Beweis. Um dies zu zeigen, sei

$$a \equiv x\xi+y\eta+z\zeta+1 = 0$$

die Gleichung des Punktes a. Differentiirt man diese nach u und v, so erhält man die Gleichungen der unendlich-fernen Punkte

$$\left.\begin{aligned} b &\equiv x_u\xi+y_u\eta+z_u\zeta = 0 \\ c &\equiv x_v\xi+y_v\eta+z_v\zeta = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Es sind dies die unendlich-fernen Punkte der Tangenten an die Linien $v =$ const., $u =$ const. der Fläche. Ein beliebiger Punkt der Tangentialebene T_a des Punktes a hat dann die Gleichung

$$\lambda a+\sigma b+\tau c = 0.$$

und

$$a' \equiv \lambda a+Pb+Qc = 0 \tag{9}$$

ist die Gleichung eines Punktes der Tangente t_a. Der Parameter λ soll nun hier so bestimmt werden, dass dieser Punkt der Brennpunkt a' der Tangente t_a wird.

Die Tangente t_a hat zu Coordinaten die Determinanten der Matrix

$$|a, m|,$$

wobei

$$m \equiv Pb+Qc \tag{10}$$

der unendlich-ferne Punkt der Tangente t_a ist.

Differentiirt man diese Coordinaten nach u respective v, so erhält man die Coordinaten zweier linearen Complexe

$$|bm|+|am_u|, \quad |cm|+|am_v|. \tag{11}$$

Diese beiden linearen Complexe haben mit dem singulären linearen Complexe t_a ∞^1 Strahlen gemeinsam. Diese Strahlen sind nun[1] die Tangenten der Brennfläche der Strahlencongruenz in den Brennpunkten a und a' des Strahles t_a. Die Tangentialebene $T_{a'}$ der Brennfläche für den Punkt a' entspricht daher dem Brennpunkte a' in den Complexen, deren Coordinaten durch (11) gegeben sind.

Für zwei Punkte x, y, welche auf demselben Strahl dieser Complexe liegen, hat man nach (11) die Gleichungen

$$(bmxy)+(am_u xy) = 0, \quad (cmxy)+(am_v xy) = 0,$$

wobei ( ) die Determinante der vier innenstehenden Punkte bedeutet. Da nun die Ebene $T_{a'}$ Nullebene des Punktes a' für beide Complexe ist, so ist ihre Gleichung

$$(bma'x)+(am_u a'x) = 0 \tag{12}$$

oder

$$(cma'x)+(am_v a'x) = 0. \tag{13}$$

Setzen wir hier aus (9) den Werth von a' ein, so folgt aus Gleichung (12)

$$\begin{aligned}(b, m, \lambda a+m, x)+(am_u mx) &= \\ = \lambda(bmax)+(m_u max) &= (\lambda b+m_u, max) = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung muss nun mit der Gleichung der Tangentialebene $T_{a'}$, welche sich aus (13) in analoger Weise ergibt, nämlich mit

$$(\lambda c+m_v, max) = 0$$

identisch sein. Daher müssen die vier Punkte

$$\lambda b+m_u, \ \lambda c+m_v, \ m, \ a$$

in einer Ebene liegen. Da aber die ersten drei dieser Punkte im Unendlichen liegen, so muss hiezu ihre Determinante

$$(\lambda b+m_u, \lambda c+m_v, m) = 0$$

---

[1] Siehe: Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. Diese Sitzungsberichte, Bd. 100, S. 161.

sein. Hieraus ergibt sich für λ die Gleichung

$$\lambda\{(bm_v m)+(m_u cm)\}+(m_u m_v m) = 0.$$

Da aber $m = Pb+Qc$ ist, so folgt hieraus

$$-\lambda\{P(bcm_u)+Q(bcm_v)\}+(m_u m_v m) = 0. \tag{14}$$

Wenn nun die Punkte b und c [siehe Formel (8)] weiter nach u und v differentiirt werden, so erhält man in

$$\begin{aligned} e &\equiv x_{uu}\xi+y_{uu}\eta+z_{uu}\zeta = 0 \\ f &\equiv x_{uv}\xi+y_{uv}\eta+z_{uv}\zeta = 0 \\ g &\equiv x_{vv}\xi+y_{vv}\eta+z_{vv}\zeta = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen dieser Punkte c, f, g.

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} m_u &= P_u b+Q_u c+Pe+Qf \\ m_v &= P_v b+Q_v c+Pf+Qg \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

daher ist nach Formel (14)

$$-\lambda\{(bc,\, Pe+Qf)P+(bc,\, Pf+Qg)Q\}+(mm_u m_v) = 0.$$

Nun ist bekanntlich

$$(bce) = TL,\ (bcf) = TM,\ (bcg) = TN,$$

wobei L, M, N die Werthe in der Differentialform (7) sind, also ergibt sich

$$\lambda = \frac{\Delta}{TH}, \tag{16}$$

wobei $H = LP^2+2MPQ+NQ^2$ ist.

Wir bestimmen nun noch den Werth der Determinante $\Delta = (mm_u m_v)$.

Wenn der unendlich-ferne Punkt der Normale des Punktes a die Gleichung

$$A \equiv X\xi+Y\eta+Z\zeta = 0$$

hat, wobei XYZ die Richtungscosinus der Normale bedeuten, so ist [1]

---

[1] Siehe Knoblauch, l. c. S. 78.

$$
\begin{aligned}
e &= LA + J_1 b + J_2 c \\
f &= MA + J_1' b + J_2' c \\
g &= NA + J_1'' b + J_2'' c.
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Werthe in (15) ein und die gewonnenen Werthe von m_u und m_v in Δ, so erhält man Δ als Determinante der drei Reihen

$$
\begin{aligned}
&Pb + Qc, \\
&(P_u + PJ_1 + QJ_1')b + (Q_u + PJ_2 + QJ_2')c + (PL + QM)A \\
&(P_v + PJ_1' + QJ_1'')b + (Q_v + PJ_2' + QJ_2'')c + (PM + QN)A.
\end{aligned}
$$

Daher ist

$$
\begin{aligned}
\Delta = (bcA)\{&P(Q_u + PJ_2 + QJ_2')(PM + QN) \\
&- P(Q_v + PJ_2' + QJ_2'')(PL + QM) \\
&+ Q(P_v + PJ_1' + QJ_1'')(PL + QM) \\
&- Q(P_u + PJ_1 + QJ_1')(PM + QN)\}.
\end{aligned}
$$

Dies gibt aber, da $(bcA) = T$ ist, und vermöge Formel (4)

$$
\Delta = T\{-\lambda_1(PM + QN) + \lambda_2(PL + QM)\}.
$$

Nach Formel (16) ist daher der Schlusswerth von λ

$$
\lambda = \frac{\Delta}{TH} = \frac{(PL + QM)\lambda_2 - (PM + QN)\lambda_1}{LP^2 + 2MPQ + NQ^2}, \tag{17}
$$

wobei λ_1, λ_2 die Werthe (4) haben. Daher gibt Formel (6) für den Punkt a':

$$
a' \equiv a + \frac{1}{\lambda}(Pb + Qc). \tag{18}
$$

4. Specielle Curvenschaaren S_1. Ist in der letzten Formel $\lambda = \infty$, so fällt der Brennpunkt a' mit a zusammen. Die Tangente t_a ist Inflexionstangente der Fläche im Punkte a, und in der That gibt der Nenner $LP^2 + 2MQ + NQ^2 = 0$ die Werthe von $\frac{Q}{P}$, welche den Inflexionstangenten entsprechen.

Ist $\lambda = 0$, so fällt a' ins Unendliche. Es gibt dann einen zu t_a benachbarten Strahl t_a' der Congruenz, welcher t_a im unendlich-fernen Punkte a' schneidet, weiters einen zu t_a' benachbarten Congruenzstrahl t_a'', welcher durch a' geht u. s. f.

Daher besteht dann die Tangentencongruenz aus den Erzeugenden von ∞^1 Cylindern, welche der Fläche umschrieben sind. Diese Cylinder sind der Fläche längs der Curven einer Schaar umschrieben, und die gegebene Schaar S_1 ist conjugirt zu dieser Schaar. Der Zähler von λ gleich Null gesetzt, gibt also die Bedingung dafür, dass die Schaar S_1 eine conjugirte Schaar hat, längs deren Curven der Fläche Cylinder umschrieben sind.

Eliminirt man aus Formel (17) und aus der Gleichung (5) λ_1 oder λ_2, so erhält man:

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{P} - \frac{(PM+QN)\Gamma}{PH} = -\frac{\lambda_1}{\varphi} + \frac{(PL+QM)\Gamma}{QH}.$$

Sind daher die Curven der Schaar S_1 geodätische Linien der Fläche, ist also $\Gamma = 0$, so ergibt sich

$$\lambda_g = \frac{\lambda_2}{P} = -\frac{\lambda_1}{Q}. \tag{19}$$

Die Tangentencongruenz dieser Curvenschaar ist dann eine Normalencongruenz. Nach Formel (18) ist der zweite Brennpunkt a' der Tangente t_a gegeben durch

$$a' \equiv a + \frac{1}{\lambda_g}(Pb+Qc). \tag{20}$$

5. Anwendung für Flächen mit Liouville'schem Bogenelement. Es seien ∞^1 Schaaren S_1 auf der Fläche vorgelegt, P und Q der Gleichung (2) hängen also von einem Parameter α ab. Dann gibt jede der Curvenschaaren eine Curve, welche durch a geht, und diese hat eine Tangente t_a mit einem Brennpunkte a'. Für alle ∞^1 Curvenschaaren S_1 nimmt a' ∞^1 Lagen in der Tangentialebene T_a an; dieser Punkt a' beschreibt daher eine Curve $\mathfrak{A}$, deren Parameterdarstellung durch den Parameter α dann in (18) vorliegt.

Wir setzen nun voraus, dass das Bogenelement der vorgelegten Fläche die Form hat

$$ds^2 = \varepsilon^2(du^2+dv^2);$$

dann ist $E = G = \varepsilon^2$, und es ergibt sich aus Gleichung (4) und (19) für eine Schaar S_1 geodätischer Linien

$$Q\lambda_g = Q_u P - P_u Q - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon}(P^2+Q^2) \tag{21}$$

und als Gleichung des Brennpunktes a' nach (20)

$$a' \equiv a + \frac{1}{\lambda_g}(Pb+Qc) = 0. \tag{22}$$

Nun ist vermöge Formel (8)

$$\frac{b}{\varepsilon} \equiv \frac{x_u}{\varepsilon}\xi + \frac{y_u}{\varepsilon}\eta + \frac{z_u}{\varepsilon}\zeta,$$

worin $\frac{x_u}{\varepsilon}, \frac{y_u}{\varepsilon}, \frac{z_u}{\varepsilon}$ die Richtungscosinus der Tangente an die Curve $v = \text{const.}$ sind. Der Punkt

$$a + x\frac{b}{\varepsilon}$$

dieser Tangente hat dann von dem Punkte a den Abstand x. Ebenso sind in

$$a + x\frac{b}{\varepsilon} + y\frac{c}{\varepsilon} = 0$$

x und y die Cartesischen Coordinaten eines Punktes der Tangentialebene T_a in dem System, welches die Tangenten der Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ zu Axen hat. Daher sind nach Formel (22)

$$\mathfrak{x} = \frac{\varepsilon P}{\lambda_g} \quad \mathfrak{y} = \frac{\varepsilon Q}{\lambda_g} \tag{23}$$

die Coordinaten des Punktes a' in diesem System.

Hängen P und Q von einem Parameter α ab, so beschreibt dieser Punkt die Curve $\mathfrak{A}$. Diese Curve $\mathfrak{A}$ soll nun für diejenigen ∞^1 Schaaren geodätischer Linien bestimmt werden, welche sich bei den Flächen ergeben, deren Bogenelement die Liouville'sche Form hat.

Das Bogenelement habe also die Form

$$ds^2 = (U+V)(du^2+dv^2),$$

wo U eine Function von u, V eine Function von v allein ist. Eine Schaar geodätischer Linien ist gegeben durch die Gleichung

$$\sqrt{V+\alpha}\, du - \sqrt{U-\alpha}\, dv = 0;$$

es ist demnach $P = \sqrt{U-\alpha}$, $Q = \sqrt{V+\alpha}$ zu setzen, und es ergibt sich aus Formel (21)

$$PQ\lambda_g = -\frac{1}{2}(QU'+PV')$$

und aus (23)

$$\mathfrak{x}:\mathfrak{y}:1 = \varepsilon P^2 \quad \varepsilon PQ = -\frac{1}{2}\left(U'+\frac{P}{Q}V'\right)$$

führt man statt α den Parameter

$$\sqrt{\frac{U-\alpha}{V+\alpha}} = \frac{P}{Q} = \mathfrak{a}$$

ein, so übergehen diese Gleichungen in

$$\mathfrak{x} \quad \mathfrak{y} \quad 1 = \mathfrak{a}^2 \quad \mathfrak{a} \quad -\frac{1}{2}\varepsilon^{-3}(U'+\mathfrak{a}V')(1+\mathfrak{a}^2). \tag{24}$$

Hierin ist $\mathfrak{a}$ die Tangente des Winkels, welchen die geodätische Linie mit dem Parameter α mit der Linie $u =$ const. bildet.

Nun sind die geodätischen Krümmungen der Linien $u =$ $=$ const., $v =$ const., respective gleich

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial u}, \quad \gamma' = -\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial v},$$

so dass folgt:

$$\mathfrak{x} \quad \mathfrak{y} \quad 1 = \mathfrak{a}^2 \quad \mathfrak{a} \quad (\gamma'\mathfrak{a}-\gamma)(1+\mathfrak{a}^2). \tag{25}$$

Dies ist nun die Parameterdarstellung der Curve $\mathfrak{A}$. Sie ist eine Curve dritter Ordnung, welche durch die unendlich-fernen imaginären Kreispunkte geht, und sie hat im Punkte a einen Doppelpunkt, welcher die Tangenten an die Curven $u =$ const., $v =$ const. zu Tangenten hat. Diese Curve ist daher die allgemeine Strophoide, welche sich ergibt, indem man auf eine gleichseitige Hyperbel, welche den Mittelpunkt der Transformation enthält, eine Transformation mit reciproken Radien ausführt. Ihre Gleichung ist nach (25)

$$(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)(\gamma'\mathfrak{x}-\gamma\mathfrak{y})-\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0.^1 \tag{26}$$

6. Specielle Fälle. Für eine Fläche, die auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, ist $V = 0$, also $\gamma' = 0$, und die Strophoide zerfällt in die Gerade $\mathfrak{x} = 0$ und den Kreis

$$(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)\gamma'-\mathfrak{y} = 0,$$

dessen Durchmesser $\frac{1}{\gamma'}$ ist; dieser Durchmesser ist demnach gleich dem geodätischen Krümmungsradius der Curve $v =$ const. Diese Curve wickelt sich in einen Parallelkreis der Rotationsfläche ab, der geodätische Krümmungsmittelpunkt eines Punktes dieses Parallelkreises liegt auf der Rotationsaxe. Daher wird der Kreis $\mathfrak{A}$ für einen Punkt der Rotationsfläche die Rotationsaxe schneiden; seine Ebene steht senkrecht zur Meridianebene.

Ist der Meridian der Rotationsfläche die Tractrix der Axe, so sind diese Kreise $\mathfrak{A}$ alle gleich. Liegt nun eine Fläche constanter negativer Krümmung vor, so lässt sie sich auf diese Rotationsfläche, die Pseudosphäre, abwickeln. Daher kann man für die Flächen constanter negativer Krümmung eine Gruppirung der geodätischen Linien zu ∞^1 Schaaren S_1 angeben, so dass die entsprechenden Curven $\mathfrak{A}$ gleiche Kreise werden. Es können ∞^1 solche Gruppirungen gefunden werden, da diese Flächen ∞^1-mal auf die Pseudosphäre abwickelbar sind.

Ist in Formel (26) $\gamma = \gamma'$, also $U' = V'$, so ist $U' = V' =$ $=$ const., demnach $U = \alpha u+\beta$, $V = \alpha v+\gamma$. Dann lässt sich das Bogenelement in der Form schreiben:

$$ds^2 = (u+v)(du^2+dv^2);$$

und man hat die Lie'sche Flächenclasse, deren geodätische Curven zwei conforme und eine nichtconforme infinitesimale

---

[1] Diesen Satz habe ich bereits in einer Note: Sur les surfaces à élément de Liouville etc., Comptes rend., t. 116, p. 1435 mitgetheilt.

Transformation gestatten.[1] Hier sind die Strophoiden die gewöhnlichen Strophoiden; ihre Gleichung ist

$$(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2)(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\rho\mathfrak{x}\mathfrak{y}=0,$$

wobei ρ der Radius der geodätischen Krümmung der Curven $u=$ const., $v=$ const. ist.

1 Siehe Lie, Untersuchungen über geodätische Linien, Math. Ann., Bd. 20, S. 389.