Erklärung des Ferranti'schen Phänomens

J. Sahulka.

Aus dem Elektrotechnischen Institute der k. k. technischen Hochschule in Wien.

Mit dem Namen Ferranti'sches Phänomen bezeichnet man eine Reihe von Erscheinungen, welche sich darbieten, wenn der secundäre Kreis eines Transformators, dessen primärer Kreis mit einer Wechselstrommaschine verbunden ist, durch einen Condensator geschlossen wird. Die merkwürdigste dieser Erscheinungen ist die, dass das Umsetzungsverhältniss des Transformators steigt. Gleichzeitig wird auch die primäre Spannungsdifferenz grösser und der primäre Strom schwächer. Der Condensator darf nicht eine zu grosse Capacität haben, da sehr grosse Condensatoren im Wechselstrombetriebe nur einen kleinen scheinbaren Widerstand haben und ein Condensator von unendlich grosser Capacität dieselbe Wirkung hätte, als ob der secundäre Kreis durch ein Drahtstück kurz geschlossen würde. Das Umsetzungsverhältniss kann durch Einschaltung des Condensators in den secundären Kreis grösser werden als das Verhältniss der Windungszahlen des Transformators.[1] Eine richtige Erklärung dieser Erscheinung ist bisher nicht gegeben worden. Dieselbe hat, wie im Folgenden theoretisch gezeigt wird, nur in der sogenannten Streuung der magnetischen Kraftlinien im Transformator ihre Ursache; dies

[1] Diese Erscheinung wurde in der Deptforter Centrale an Transformatoren beobachtet, welche einen Wechselstrom von 2500 auf 10.000 Volt transformirten, wenn an den secundären Kreis die Ferranti'schen concentrischen Kabel angeschlossen wurden, welche infolge ihrer Länge von 10 *km* eine beträchtliche Capacität hatten.

wurde auch durch das Experiment bestätigt. Würden alle vom primären Kreise erzeugten magnetischen Kraftlinien sämmtliche Windungen des secundären Kreises durchsetzen und umgekehrt, so würde das Ferranti'sche Phänomen nicht auftreten.

Theoretischer Nachweis.

Betrachten wir zunächst den Fall, wenn der secundäre Kreis des Transformators nicht durch einen Condensator, sondern durch irgend einen Widerstand r_2 geschlossen ist, der weder Selbstinduction, noch Capacität hat. Die primäre Spannungsdifferenz sei $\Delta_1 \sin 2\pi n t$, wobei n die Zahl der Perioden des Wechselstromes pro Secunde vorstellt. Der Ohm'sche Widerstand der primären Wickelung sei R_1, der Ohm'sche Widerstand des ganzen secundären Kreises R_2, die Coëfficienten der Selbstinduction seien $L_1 L_2$, der der gegenseitigen Induction M. Bezeichnet man mit $i_1 i_2$ die veränderlichen Werthe des primären und secundären Stromes, so müssen bekanntlich die Maxwell'schen Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 \sin 2\pi n t &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned}\right\}. \qquad 1)$$

Bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} p &= 2\pi n \\ k &= \frac{Mp}{\sqrt{R_1^2 + p^2 L_1^2}} \end{aligned} \qquad 2)$$

so ergibt sich nach der Maxwell'schen Formel für die Amplitude der Stromstärke im secundären Kreise der Werth:

$$J_2 = \frac{\Delta_1 k}{\sqrt{(R_2 + k^2 R_1)^2 + p^2 (L_2 - k^2 L_1)^2}}.$$

Die Amplitude der secundären Klemmenspannung ist $\Delta_2 = J_2 r_2$, das Umsetzungsverhältniss ist

$$u = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{k r_2}{\sqrt{(R_2 + k^2 R_1)^2 + p^2 (L_2 - k^2 L_1)^2}}. \qquad 3)$$

Die Grösse R_1 ist stets klein und kann vernachlässigt werden. Da auch in der Regel der Ohm'sche Widerstand der secundären Wickelung sehr klein ist, so kann man, wenn der secundäre Kreis durch einen grossen Widerstand r_2 geschlossen ist, annähernd setzen: $r_2 = R_2$. Man erhält aus den Formeln 2) und 3):

$$k = \frac{M}{L_1}$$

$$u = \frac{M}{L_1} \; \frac{r_2}{\sqrt{R_2^2 + p^2\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)^2}}. \qquad 4)$$

Ist der Transformator ein vollkommener, d. h. wenn keine Streuung von Kraftlinien stattfindet, so ist:

$$M^2 = L_1 L_2$$

und daher

$$u = \frac{M}{L_1} \; \frac{r_2}{R_2}.$$

Die Werthe von L_1 und L_2 verhalten sich in diesem Falle wie die Quadrate der Windungszahlen N_1 und N_2 der primären und secundären Wickelung; daher ist

$$u = \frac{N_2}{N_1} \; \frac{r_2}{R_2}$$

Wenn r_2 sehr gross ist oder der secundäre Kreis unterbrochen ist, so erhält man:

$$u = \frac{N_2}{N_1}.$$

Findet im Transformator eine Streuung von magnetischen Kraftlinien statt, so ist $M^2 < L_1 L_2$. Es bleibt dann in der Formel 4) das zweite Glied im Nenner stehen und folglich ist

$$u < \frac{M}{L_1}.$$

Nun ist überdies in diesem Falle $\frac{M}{L_1} < \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$; daher folgt:

$$u < \frac{N_2}{N_1}.$$

Bei starker Streuung der Kraftlinien kann das Umsetzungsverhältniss beträchtlich kleiner sein als das Verhältniss der Windungszahlen.

Denken wir uns nun den secundären Kreis durch einen Condensator von der Capacität C geschlossen, so hat man in den Maxwell'schen Gleichungen nur an Stelle des L_2 zu setzen $L_2 - \frac{1}{p^2 C}$, weil der Condensator den scheinbaren negativen Selbstinductionscoëfficienten $\frac{1}{p^2 C}$ hat. Die Formel für J_2 ist in gleicher Weise zu ändern, der Ausdruck für k bleibt ungeändert. Unter R_2 hat man in diesem Falle nur den Drahtwiderstand der secundären Wickelung zu verstehen; es ist daher R_2 ebenso wie R_1 sehr klein. Die Amplitude Δ_2 der Klemmenspannung im secundären Kreise wird erhalten, wenn man J_2 mit dem scheinbaren Widerstande des Condensators multiplicirt; dieser ist $\frac{1}{pC}$ Daher erhält man:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1 k}{pC\sqrt{(R_2+k^2R_1)^2+p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}-k^2L_1\right)^2}}. \tag{5}$$

Wenn man R_1 und R_2 vernachlässigt und für k seinen Werth substituirt, so folgt:

$$u = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{M}{L_1 p^2 C\left[L_2 - \frac{M^2}{L_1} - \frac{1}{p^2 C}\right]}. \tag{6}$$

Findet keine Streuung von Kraftlinien statt, so ist $M^2 = L_1 L_2$ zu setzen. Es ergibt sich, da das Vorzeichen nicht in Betracht kommt:

$$u = \frac{N_2}{N_1}$$

Das Umsetzungsverhältniss bei einem vollkommenen Transformator bleibt dasselbe, ob der secundäre Kreis offen oder durch einen Condensator oder grossen Widerstand geschlossen ist.

Wenn aber Streuung von Kraftlinien stattfindet, so ist in der Formel 6) im Nenner die Grösse $L_2 - \frac{M^2}{L_1}$ von Null verschieden. Da der Nenner eine Differenz ist, gibt es für C passende Werthe, welche die Differenz sehr klein machen; dann kann aber der Quotient gross sein. In diesem Falle wird infolge der Einschaltung des Condensators das Umsetzungsverhältniss bedeutend erhöht werden können und von der Capacität des Condensators abhängen. Bei der Beurtheilung des Werthes von u aus der Formel 6) darf man jedoch nicht übersehen, dass in der Formel 5) die Grösse $R_2+k^2R_1$ vernachlässigt wurde, und dass dies nur gestattet ist, wenn das zweite Glied einen grossen Werth hat.

Die zweite gleichzeitig beobachtete Erscheinung, dass die primäre Spannungsdifferenz eines Transformators etwas grösser wird, wenn der secundäre Kreis durch einen Condensator geschlossen wird, und dass gleichzeitig der primäre Strom etwas schwächer wird, ist dadurch begründet, dass der scheinbare Widerstand des primären Kreises zunimmt. Ist nämlich der secundäre Kreis offen, so hat der primäre Kreis den scheinbaren Widerstand

$$\sqrt{R_1^2+p^2L_1^2}.$$

Ist er durch einen Condensator geschlossen, so hat man an Stelle von R_1 und pL_1 zu setzen die sogenannten effectiven Widerstände R_1' und pL_1', welche von Maxwell berechnet wurden, nur hat man an Stelle von L_2 wieder zu schreiben $L_2-\frac{1}{p^2C}$; es ist

$$R_1' = R_1 + \frac{M^2p^2R_2}{R_2^2+p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}\right)^2}$$

$$L_1' = L_1 - \frac{M^2p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}\right)}{R_2^2+p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}\right)^2}$$

$$R_1'^2+p^2L_1'^2 = (R_1^2+p^2L_1^2)+ \\ + \frac{M^2p^2\left(M^2p^2+2R_1R_2-2p^2L_1L_2+\frac{2L_1}{C}\right)}{R_2^2+p^2\left(L_2-\frac{1}{p^2C}\right)^2}. \qquad 7)$$

In der Formel 7) hat der Nenner des zweiten Gliedes sicher einen positiven Werth, im Zähler steht eine Differenz. Wenn C klein ist, so ist $\frac{2L_1}{C}$ gross, dann ist das zweite Glied positiv und somit

$$R_1'^2+p^2L_1'^2 > R_1^2+p^2L_1^2.$$

Die Erhöhung des scheinbaren Widerstandes der primären Wickelung hat eine Erhöhung des Δ_1 und eine Abnahme des J_1 zur Folge.

Versuche.

Das Ergebniss der Berechnung, dass die Ursache des Ferranti'schen Phänomens in der Streuung der magnetischen Kraftlinien gelegen ist, wurde auch durch den Versuch bestätigt. Es wurde zu diesem Zwecke ein besonderer Transformator verfertigt. Der cylindrische, gerade Kern bestand aus ungefähr 2000 gefirnissten Eisendrähten, welche 1 *mm* dick und 41 *cm* lang waren. Die ganze Länge wurde in zwei ungleiche Theile getheilt. In dem kleineren Theile, welcher ein Viertel der Länge einnahm, wurden zunächst drei Lagen isolirten Kupferdrahtes von je 73 Windungen gewickelt; darüber kam noch eine einfache Lage von 73 Windungen. In dem langen Theile wurden drei Lagen von je 219 Windungen gewickelt und darüber noch eine einfache Lage von 219 Windungen. Die einzelnen Lagen wurden von einander durch schellackirtes Papier gut isolirt. Die Drähte waren dünn, weil der Transformator nicht zur Abgabe von Strömen bestimmt war und jeder einzelne Versuch nur kurze Zeit dauerte. Wenn sämmtliche 292 Windungen in dem ersten Viertel der Transformatorlänge als primäre Wickelung verwendet wurden und alle anderen (876 Windungen) als secundäre Wickelung, so war eine sehr ungleichförmige Vertheilung der Windungen und daher starke Streuung vorhanden. Das Verhältniss der Windungszahlen ist 1 : 3. Wenn die beiden äusseren einfachen Lagen von zusammen 292 Windungen als primäre Wickelung, die beiden inneren Spulen von zusammen 876 Windungen als secundäre Wickelung verwendet wurden, so war eine gleichförmigere Vertheilung der Windungen und daher geringere Streuung vorhanden; das Verhältniss der Windungszahlen ist dasselbe.

Der zur Verfügung stehende Wechselstrom hatte 105 Volt Spannungsdifferenz und 5000 Richtungswechsel in der Minute. Dem Primärkreis des beschriebenen Transformators wurde noch ein Widerstand vorgeschaltet. Die primäre Spannungsdifferenz Δ_1 wurde mit einem Hitzdraht-Voltmeter, die secundäre Δ_2 beim ersten und dritten Versuche mit einem Elektrometer (Multicellular-Voltmeter von W Thomson), beim zweiten Versuche mit einem Hitzdraht-Voltmeter (von Hartmann und Braun) gemessen.

1. Versuch bei ungleichförmiger Vertheilung der Windungen. Bei offenem secundären Kreise war $\Delta_1 = 74 \cdot 0$, $\Delta_2 = 102 \cdot 0$ Volt, $u = 1 \cdot 38$, $J_1 = 7 \cdot 6$ Ampère. Schaltete man in den secundären Kreis einen Condensator von 5·15 Mikrofarad (Condensator mit paraffinirtem Papier), so war $\Delta_1 = 75 \cdot 3$, $\Delta_2 = 122 \cdot 7$, $u = 1 \cdot 63$, $J_1 = 7\ 5$. Das Umsetzungsverhältniss u stieg demnach um $18^0/_0$. Bei Einschaltung von Condensatoren mit kleinerer Capacität stieg u um weniger. Dass das Umsetzungsverhältniss beträchtlich kleiner ist als das Verhältniss der Windungszahlen, kann wegen der starken Streuung der Kraftlinien nicht überraschen.

2. Versuch bei ungleichförmiger Vertheilung der Windungen. Die Spannungsdifferenz Δ_2 wurde mit einem Hitzdraht-Voltmeter gemessen. Da der Widerstand desselben circa 550 Ohm war, floss im secundären Kreise ausser dem Ladestrom des Condensators noch der Strom im Hitzdraht-Voltmeter, wodurch die Erscheinungen des Ferranti'schen Phänomens etwas schwächer auftraten. Es ergab sich ohne Einschaltung eines Condensators: $\Delta_1 = 63 \cdot 1$, $\Delta_2 = 85$, $u = 1 \cdot 35$; nach Einschaltung des Condensators von 5·15 Mikrofarad war $\Delta_1 = 63 \cdot 7$, $\Delta_2 = 96$, $u = 1\ 51$. Die Erhöhung des Umsetzungsverhältnisses ist in diesem Falle geringer, sie beträgt nur $11 \cdot 9^0/_0$. Dass das Umsetzungsverhältniss ohne Einschaltung des Condensators kleiner ist als beim ersten Versuche, kann nicht überraschen, weil das Hitzdraht-Voltmeter Strom braucht und der Widerstand der secundären Wickelung 5 45 Ohm betrug. Die primäre Stromstärke war 6·6 Ampère.

3. Versuch bei gleichförmiger Vertheilung der Windungen. Es ergab sich ohne Condensator $\Delta_1 = 55 \cdot 6$, $\Delta_2 = 150$, $u = 2 \cdot 70$, nach Einschaltung des Condensators von 5·15 Mikrofarad $\Delta_1 = 56 \cdot 6$, $\Delta_2 = 154 \cdot 9$, $u = 2 \cdot 74$. Die primäre Stromstärke nahm ab von 7·8 bis 7·7 Ampère. Das Umsetzungsverhältniss stieg bei Einschaltung des Condensators in diesem Falle nur um 1·5%. Bei den drei Versuchen mussten der primären Wickelung verschiedene Widerstände vorgeschaltet werden, damit die primäre Stromstärke, respective die Erwärmung der primären Wickelung nicht zu gross werde.