Über eine Eigenschaft der Invarianten von Covarianten

Dr. **Gustav Kohn,**
Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1893.)

Im vierten Bande der Math. Annalen[1] hat Gordan die Discriminanten und Resultanten für einige Covarianten aufgestellt und sie haben sich durch gewisse Potenzen der Discriminanten und Resultanten der Stammformen theilbar ergeben. Ich habe dann diese Erscheinung weiter verfolgt[2] und bin zu allgemeinen Resultaten gelangt. Indessen war dieselbe damit noch nicht in ihrem vollen Umfang erkannt und auf ihre einfachsten Gründe zurückgeführt, wie aus der vorliegenden Note hervorgeht. Hier wird in einfachster Weise gezeigt, dass überhaupt Invarianten (nicht bloss Discriminanten und Resultanten) von Covarianten in einer ausgedehnten Reihe von Fällen durch gewisse Potenzen der Discriminanten und Resultanten der Stammformen theilbar sind, und die Bestimmung der Potenzexponenten führt auf gewisse, bisher in die Theorie nicht eingeführte Gradzahlen von Invarianten und Seminvarianten, von welchen auch andere Eigenschaften dieser Gebilde abhängen dürften.

1. Es lässt sich fast unmittelbar ein Kriterium angeben, welches nicht nur die Theilbarkeit einer vorgelegten Invariante durch die Discriminante einer Stammform zu erkennen, sondern

---

[1] Resultanten von Covarianten, S. 169.

[2] Zur Theorie der associirten Formen, diese Berichte, Bd. C, S. 865. — Über die Resultante einer Covariante und einer Grundform, ebenda, S. 1013.

auch den Exponenten der höchsten Potenz dieser Discriminante zu bestimmen lehrt, welche in der Invariante aufgeht.

Ist

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 +$$

eine der Stammformen und J eine Invariante, welche durch die Discriminante von f D_f theilbar ist, so wird J verschwinden, wenn $a_0 = a_1 = 0$ gesetzt wird (weil dann zwei Wurzeln von f einander gleich, nämlich $= 0$ sind), d. h. es ist

$$J = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1, \tag{1}$$

wo φ_0 und φ_1 ganze Functionen der Coëfficienten bedeuten. Besitzt umgekehrt die Invariante J die Form (1), so wird sie durch die Discriminante D_f theilbar sein, weil sie verschwindet, wenn zwei Wurzeln von f in dem Werthe Null zusammenfallen und desshalb als Invariante verschwinden wird, wenn überhaupt zwei Wurzeln von f einander gleich werden.

Wie bekannt hat die Discriminante von f die Gestalt

$$D_f = a_0 \psi_0 + a_1^2 \psi_1,$$

wo ψ_0 und ψ_1 ganze Functionen der Coëfficienten von f sind, die nicht verschwinden, wenn $a_0 = a_1 = 0$ gesetzt wird. Setzen wir a_0 durch die zweite, a_1 durch die erste Potenz einer unbestimmten Grösse t theilbar voraus, so wird also die zweite und keine höhere Potenz von t in D_f aufgehen.

Wenn jetzt die Annahme gemacht wird, die Invariante J sei durch die k^{te} $(k \geqq 0)$ und keine höhere Potenz der Discriminante von f theilbar, d. h. es sei

$$J = D_f^k J_1 \qquad k \geqq 0,$$

wo J_1 eine Invariante bedeutet, die nicht durch die Discriminante theilbar ist, so wird J durch die $2k^{\text{te}}$ und keine höhere Potenz von t theilbar sein. Denn D_f^k ist durch die $2k^{\text{te}}$ und keine höhere Potenz von t theilbar, und in J_1 geht t überhaupt nicht auf, weil sonst diese Invariante die Form (1) haben müsste und dann nach Obigem der Voraussetzung entgegen durch D_f theilbar wäre.

Wir gelangen zu dem folgenden Resultat:

Ist $J = \Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \dots a_n^{\lambda_n}$ eine als Function der Coëfficienten a_0, a_1, a_n der Stammform f geschriebene Invariante, so wird der Exponent der höchsten Potenz der Discriminante von f, welche in J aufgeht, gegeben durch die Hälfte des kleinsten Werthes, den $2\lambda_0 + \lambda_1$ für ein Glied von J annimmt.

Ein analoger Satz lässt sich auch aufstellen, wenn statt binärer Stammformen solche mit beliebig vielen Variabeln zu Grunde gelegt werden.

2. In ähnlicher Weise, wie man aus einer hingeschriebenen Invariante entnehmen kann, durch welche Potenz der Discriminante einer Stammform sie theilbar ist, kann man auch entnehmen, durch welche Potenz der Resultante von zwei Stammformen sie theilbar ist.

Die Stammformen

$$f = a_0 x_1^n + \qquad \text{und} \quad f_1 = a_0' x_1^{n'} +$$

haben die gemeinsame Wurzel Null, wenn $a_0 = a_0' = 0$. Eine Invariante J, welche die Resultante von f und f_1 R_{ff_1} als Factor enthält, wird also die Form haben

$$J = a_0 \varphi + a_0' \varphi_1, \tag{2}$$

wo φ und φ_1 ganze Functionen der Coëfficienten bedeuten. Umgekehrt wird eine Invariante J immer, wenn sie die Form (2) besitzt, durch die Resultante R_{ff_1} theilbar sein. Denn J verschwindet dann, wenn der Nullwerth eine gemeinsame Wurzel von f und f_1 ist, also wegen der Invarianteneigenschaft immer, wenn f und f_1 eine gemeinsame Wurzel haben.

Im Besonderen hat, wie bekannt, die Resultante R_{ff_1} die Form

$$R_{ff_1} = a_0 \psi + a_0' \psi_1,$$

wo ψ und ψ_1 ganze Functionen der Coëfficienten von f und f_1 bedeuten, welche nicht mit a_0 und a_0' identisch verschwinden. Wenn jetzt a_0 und a_0' durch die erste Potenz einer unbestimmten Grösse t theilbar vorausgesetzt werden, so wird also R_{ff_1} durch die erste und keine höhere Potenz von t theilbar sein. Wird die Annahme gemacht, die Invariante J sei durch die k^{te} $(k \geqq 0)$ und keine höhere Potenz von R_{ff_1} theilbar, d. h. es sei

$$J = R_{ff_1}^k J_1 \qquad k \geqq 0,$$

wo J_1 eine durch R_{ff_1} nicht mehr theilbare Invariante bedeutet, so wird die k^{te} und keine höhere Potenz von t in J aufgehen. Denn $R_{ff_1}^k$ ist durch die k^{te} und keine höhere Potenz von t theilbar, während die Unbestimmte t in J_1 überhaupt nicht aufgeht, weil diese Invariante sonst die Form (2) haben müsste, welche die Theilbarkeit durch die Resultante nach sich zieht.

Es folgt:

Ist $J = \Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n} . a_0'^{\lambda_0'} a_1'^{\lambda_1'} \ldots a_{n'}'^{\lambda_{n'}'}$ eine als Function der Coëfficienten der Stammformen $f = a_0 x_1^n + \ldots$ und $f_1 = a_0' x_1^{n'} + \ldots$ geschriebene Invariante, so wird der Exponent der höchsten Potenz der Resultante von f und f_1, die in J aufgeht, gegeben durch den kleinsten Werth, den $\lambda_0 + \lambda_0'$ für ein Glied von J annimmt.

3. Es wird gut sein, ehe wir dazu schreiten, die in den Artikeln 1 und 2 gewonnenen Kriterien für Invarianten von Covarianten zu verwerthen, zwei einfache Hilfssätze zu erörtern.

Der erste Hilfssatz betrifft eine ganze homogene Function

$$\Phi = \Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

der Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ einer Binärform f und gibt eine einfache Bedeutung für den kleinsten Werth d_r an, den der aus den Exponenten gebildete Ausdruck

$$r\lambda_0 + (r-1)\lambda_1 + \ldots + 1\lambda_{r-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

für ein Glied von Φ annimmt.

Führt man in der homogenen Function g^{ten} Grades Φ statt der Coëfficienten die Wurzeln von f ein, so gibt die Zahl

$$d_r = \min[r\lambda_0 + (r-1)\lambda_1 + \ldots + 1\,\lambda_{r-1}]$$

an, um wie viel der Grad von Φ in r Wurzeln kleiner ist als rg. Es folgt dies aus dem Umstande, dass nur die r ersten Coëfficienten von f $a_0, a_1, \ldots a_{r-1}$ in r von den Wurzeln einen von r verschiedenen Grad haben, welcher für diese Coëfficienten beziehungsweise um $r, (r-1), \ldots, 1$ kleiner als r ist.

Freilich muss man, um hieraus schliessen zu können, dass der Grad von Φ in r Wurzeln von f genau durch die Zahl $rg-d_r$ gegeben wird, noch wissen, dass die Glieder höchsten Grades in r Wurzeln, welche aus den einzelnen Gliedern von Φ resultiren, sich unter einander nicht zerstören. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man diese Glieder höchsten Grades in r Wurzeln wirklich aufstellt, wie ich in der Abhandlung: »Über symmetrische Functionen. (diese Berichte, Bd. CII, S. 199 f.) gezeigt habe.

Genau in derselben Weise, wie im Falle einer Form f am eben angegebenen Orte geschehen, kann man, im Falle man in eine ganze Function Φ der Coëfficienten beliebig vieler Formen $f_1, f_2, \ldots f_\varkappa$ statt der Coëfficienten die Wurzeln einführt, die Summe der Terme übersichtlich angeben, welche als Functionen von r_1 Wurzeln von f_1, r_2 Wurzeln von $f_2, \ldots r_\varkappa$ Wurzeln von $f_\varkappa$ angesehen den höchsten Grad besitzen. Man erkennt dann wieder genau so wie a. a. O., dass diese Terme sich unter einander nicht zerstören können und gelangt dadurch zur folgenden Verallgemeinerung unseres Hilfssatzes:

»Ist Φ eine ganze Function der Coëfficienten der Formen f_i $(i = 1, 2, \ldots \varkappa)$ homogen vom Grade g_i in den Coëfficienten von f_i und bezeichnet man die diesen Coëfficienten $a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots a_{n_i}^{(i)}$ in einem beliebigen Gliede von Φ zukommenden Exponenten mit $\lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \ldots \lambda_{n_i}^{(i)}$, so hat der kleinste Werth $d_{r_1, r_2, \ldots}$ den der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{i=\varkappa} [r_i \lambda_0^{(i)} + (r_i - 1)\lambda_1^{(i)} + \ldots + 1 . \lambda_{r_i - 1}^{(i)}]$$

für ein Glied von Φ annimmt, eine einfache Bedeutung für die durch die Wurzeln von $f_1, f_2, \ldots f_\varkappa$ ausgedrückte Function Φ. Dieser Werth gibt an, um wie viel der Grad dieser Function in r_1 Wurzeln von f_1, r_2 Wurzeln von $f_2, \ldots r_\varkappa$ Wurzeln von $f_\varkappa$ hinter der Zahl

$$\sum_{i=1}^{i=n} r_i g_i$$

zurückbleibt.«

Das Resultat des Artikels 1 kann man jetzt dahin aussprechen, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Invariante J durch die $k$te und keine höhere Potenz der Resultante der Stammform f theilbar sei, darin besteht, dass der Grad von J in zwei Wurzeln von f um $2k$ Einheiten geringer ist als der doppelte Grad in einer Wurzel. Das Resultat des Artikels 2 besagt, dass für die Theilbarkeit von J durch die $k$te Potenz der Resultante der Stammformen f und f_1 nothwendig und ausreichend ist, dass die Summe des Grades von J in einer Wurzel von f und des Grades in einer Wurzel von f_1 um k Einheiten grösser sei als der Grad in beiden Wurzeln.

4. Wir wenden uns zum Beweise des zweiten Hilfssatzes. Ist

$$\Phi = \Phi_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \Phi_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \ldots \Phi_\nu x_2^\nu$$

eine Covariante der Form $f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots$ so lässt sich eine einfache Beziehung angeben, in welcher die im letzten Artikel definirten Zahlen d_r für die verschiedenen Coëfficienten $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ zu einander stehen.

Wie bekannt, geht durch Anwendung des Processes

$$n a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots + a_n \frac{\partial}{\partial a_{n-1}}$$

auf einen Coëfficienten Φ_i der Covariante Φ, der folgende Coëfficient Φ_{i+1} von einem Zahlenfactor abgesehen hervor.

Die Anwendung dieses Processes auf ein Glied $a_0^{\tau_0} a_1^{\tau_1} \ldots a_n^{\tau_n}$ ergibt offenbar Glieder $a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$, für welche der Ausdruck $r\lambda_0 + (r-1)\lambda_1 + \ldots 1 . \lambda_{r-1}$ theils gleich dem Ausdruck $r\tau_0 + (r-1)\tau_1 + \ldots 1 . \tau_{r-1}$, theils um eine Einheit kleiner ist. Es wird also durch Anwendung des Processes die Gradzahl d_r gewiss nicht um mehr als eine Einheit erniedrigt, diese Gradzahl ist für den $(i+1)$ten Coëfficienten Φ_{i+1} der Covariante entweder gleich oder um eins kleiner als für den $i$ten, und es folgt insbesondere:

»Bezeichnet man die Gradzahlen d_r für die Coëfficienten $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, .$ der Covariante mit $d_r^{(0)}, d_r^{(1)}, d_r^{(2)}$., so ist

$$d_r^{(1)} \geqq d_r^{(0)}-1,\; d_r^{(2)} \geqq d_r^{(0)}-2,\; d_r^{(3)} \geqq d_r^{(0)}-3, . \; ..«[1]$$

Diese Bemerkung lässt sich unmittelbar auf simultane Covarianten erweitern, und da der Beweis genau derselbe bleibt wie im speciellen Falle, so genügt es, das Resultat der Verallgemeinerung auszusprechen:

»Wenn die in Artikel 3 definirte Gradzahl $d_{r_1, r_2, \ldots r_\varkappa}$ für die Coëfficienten Φ_0, Φ_1 einer simultanen Covariante der Formen $f_1, f_2, .. f_\varkappa$, beziehungsweise durch $d^{(0)}_{r_1 r_2 \ldots r_\varkappa}, d^{(1)}_{r_1 r_2 \ldots r_\varkappa}, ..$ bezeichnet wird, so ist

$$d^{(1)}_{r_1 r_2 \ldots r_\varkappa} \geqq d^{(0)}_{r_1 r_2 \ldots r_\varkappa}-1,\; d^{(2)}_{r_1 r_2 \ldots r_\varkappa} \geqq d^{(0)}_{r_1 r_2 \ldots r_\varkappa}-2, .$$

5. Wir gehen jetzt zum eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung über.

Es sei

$$\Phi = \Phi_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \Phi_1 x_1^{\nu-1} x_2 + .. + \Phi_\nu x_2^\nu$$

eine Covariante und

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + .$$

eine der Stammformen. Für das Leitglied Φ_0 der Covariante Φ mag der doppelte Grad in den Coëfficienten von f um d_2 Einheiten grösser sein als der Grad, den das als Function der Wurzeln von f betrachtete Leitglied in zwei Wurzeln besitzt, so dass, wenn a_0 durch das Quadrat und a_1 durch die erste

---

[1] Da die Gradzahl d_r für eine ganze Function $\Sigma C a_0^{\lambda_0} a_1^{\lambda_1} \ldots a_n^{\lambda_n}$ den kleinsten Werth angibt, den der Ausdruck $r\lambda_0 + (r-1).\lambda_1 + \ldots 1.\lambda_{r-1}$ für ein Glied der Function annimmt, so verschwindet eine Function, für die $d_r > 0$, wenn $a_0 = a_1 = \ldots a_{r-1} = 0$ gesetzt werden. Aus dem Satz des Textes folgt also, dass wenn r Wurzeln von f gleich Null werden, die $d_r^{(0)}$ ersten Coëfficienten von Φ ebenfalls verschwinden und damit der Satz:

Ist Φ eine Covariante der Form f, deren Leitglied in Wurzeln von f einen Grad hat, der um $d_r^{(0)}$ niedriger ist als der r-fache Grad in einer Wurzel, so fallen in eine r-fache Wurzel der Stammform f mindestens $d_r^{(0)}$ Wurzeln der Covariante Φ.

Potenz einer Unbestimmten t theilbar vorausgesetzt wird, Φ_0 durch t^{d_2} theilbar wird (Artikel 3), dann folgt aus dem im letzten Artikel bewiesenen Hilfssatze, dass in den folgenden Coëfficienten $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ der Covariante t, beziehungsweise zur Potenz $d_2-1, d_2-2, \ldots$ aufgeht.

Ist jetzt

$$J = \Sigma C \Phi_0^{\lambda_0} \Phi_1^{\lambda_1} \ldots \Phi_\nu^{\lambda_\nu}$$

eine Invariante der Covariante Φ, so wird nach Artikel 1 der Exponent der höchsten Potenz von t, welche unter der für a_0 und a_1 gemachten Voraussetzung in J aufgeht, gleich sein dem doppelten Exponenten der höchsten Potenz der Discriminante von f, durch die J theilbar ist.

Mit Rücksicht auf das eben über die Coëfficienten Φ_0, Φ_1 der Covariante Φ Gesagte wird aber das Glied

$$C \Phi_0^{\lambda_0} \Phi_1^{\lambda_1} \ldots \Phi_n^{\lambda_n}$$

von J theilbar sein durch t zur Potenz

$$d_2 \lambda_0 + (d_2-1)\lambda_1 + \ldots 1 \lambda_{d_2-1}$$

und der kleinste Werth, den dieser Ausdruck für ein Glied von J annimmt, ist also der Exponent einer Potenz von t, die jedenfalls in J aufgeht. Dieser kleinste Werth gibt aber nach Artikel 3 an, um wie viel der Grad der als Function der Wurzeln von Φ betrachteten Invariante J in d_2 unter diesen Wurzeln hinter dem d_2-fachen Grade in einer Wurzel zurückbleibt, so dass wir zu dem folgenden Satze gelangen.

Ist für das als Function der Wurzeln einer Stammform f betrachtete Leitglied einer Covariante Φ der Grad in zwei Wurzeln von f um d_2 Einheiten geringer als der doppelte Grad in einer Wurzel, so wird eine Invariante J von Φ, welche als Function der Wurzeln von Φ dargestellt in d_2 Wurzeln von Φ einen Grad besitzt, der um D_{d_2} Einheiten hinter dem d_2-fachen Grade in einer Wurzel zurückbleibt, theilbar durch die Discriminante von f zur Potenz $^1/_2 D_{d_2}$.

Genau dieselbe Deduction, die uns zu diesem Satze geführt hat, lässt sich auch in dem allgemeineren Fall anwenden, dass J

eine simultane Invariante der Covarianten $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \Phi^{(\rho)}$ bedeutet und führt zu dem folgenden Ergebniss:

Wenn die Zahlen $d_2^{(1)}, d_2^{(2)} \ldots d_2^{(\rho)}$ angeben, um wie viel für die als Functionen der Wurzeln einer Stammform f angesehenen Leitglieder der Covarianten $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \Phi^{(\rho)}$ der doppelte Grad in einer Wurzel den Grad in zwei Wurzeln übersteigt, so ist eine simultane Invariante dieser Covarianten durch die Discriminante von f zur Potenz $^1/_2 D_{d_2^{(1)} d_2^{(2)} \ldots d_2^{(\rho)}}$ theilbar, wo die Zahl $D_{d_2^{(1)} d_2^{(2)} \ldots d_2^{(\rho)}}$ angibt, um wie viel für die durch die Wurzeln von $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots \Phi^{(\rho)}$ dargestellte Invariante J der Grad in $d_2^{(1)}$ Wurzeln von $\Phi^{(1)}$, $d_2^{(2)}$ Wurzeln von $\Phi^{(2)}, \ldots$ und $d_2^{(\rho)}$ Wurzeln von $\Phi^{(\rho)}$ hinter der Summe zurückbleibt, die man durch Addition des $d_2^{(1)}$-fachen Grades in einer Wurzel von $\Phi^{(1)}$, des $d_2^{(2)}$-fachen Grades in einer Wurzel von $\Phi^{(2)}, \ldots$ und des $d_2^{(\rho)}$-fachen Grades in einer Wurzel von $\Phi^{(\rho)}$ erhält.

Ergänzend ist diesem Satze die Bemerkung hinzuzufügen, dass aus unserer Deduction hervorgeht, dass wenn $^1/_2 D_{d_2^{(1)} d_2^{(2)} \ldots d_2^{(\rho)}}$ keine ganze Zahl ist, die nächsthöhere ganze Zahl den Exponenten einer Potenz der Discriminante von f angibt, welche in der Invariante J aufgeht.

6. Wenn wir die Bedeutung der Ergebnisse des letzten Artikels durch Anwendung auf specielle Fälle erläutern wollen, empfiehlt es sich vor Allem, die Invariante J als Discriminante oder Resultante anzunehmen.

Ist J die Discriminante der Covariante Φ und werden die Bezeichnungen des letzten Artikels beibehalten, so wird

$$D_{d_2} = d_2(d_2 - 1).$$

Denn J ist in diesem Falle das Product der quadrirten Wurzeldifferenzen, der Grad von J in einer Wurzel wird gegeben durch die Anzahl der Factoren, in denen sie vorkommt, der Grad in d_2 Wurzeln aber durch das d_2-fache dieser Zahl vermindert um die Zahl $d_2(d_2 - 1)$, welche angibt, wie oft zwei von den betrachteten d_2 Wurzeln mitsammen im selben Factor vorkommen.

Für den Exponenten $\frac{d_2(d_2-1)}{2}$ der Potenz der Discriminante von f, durch welche die Discriminante der Covariante Φ nach Artikel 5 theilbar ist, lässt sich eine untere Grenze angeben, sobald der Grad g der Covariante in den Coëfficienten von f und deren Gewicht p bekannt sind. Die Zahl d_2, welche erhalten wird, wenn man vom doppelten Grade $2g$ des Leitgliedes von Φ seinen Grad in zwei Wurzeln von f abzieht, wird gewiss nicht kleiner sein als die Zahl $2g-p$, wo von $2g$ der Grad in allen Wurzeln abgezogen erscheint, und wir können den Satz aussprechen:

Ist p das Gewicht einer Covariante Φ, g ihr Grad in den Coëfficienten einer Stammform f und $2g > p+1$, so ist die Discriminante von Φ mindestens durch die

$$^1/_2(2g-p)(2g-p-1)^{\text{te}}$$

Potenz der Discriminante von f theilbar.

Wählen wir zweitens als Invariante J des Artikels 5 die Resultante der zwei Covarianten $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$, so wird

$$D_{d_2^{(1)} d_2^{(2)}} = d_2^{(1)} . d_2^{(2)}.$$

Denn diese Resultante ist das Product aller Differenzen, die man aus je einer Wurzel von $\Phi^{(1)}$ und einer Wurzel von $\Phi^{(2)}$ bilden kann, ihr Grad als Function von $d_2^{(1)}$ unter den Wurzeln von $\Phi^{(1)}$ und $d_2^{(2)}$ unter den Wurzeln von $\Phi^{(2)}$ ist gleich der Anzahl ihrer Factoren, in denen eine der ersten $d_2^{(1)}$ Wurzeln vorkommt, vermehrt um die Anzahl, in denen eine von den zweiten $d_2^{(2)}$ Wurzeln vorkommt, die Summe vermindert um die Anzahl $d_2^{(1)} . d_2^{(2)}$ von Factoren, wo eine der $d_2^{(1)}$ ersten mit einer der $d_2^{(2)}$ zweiten Wurzeln zusammen vorkommt.

Wenn p_1, respective p_2 das Gewicht von $\Phi^{(1)}$, respective $\Phi^{(2)}$ und g_1, respective g_2 ihren Grad in den Coëfficienten von f angeben, so wird wie oben

$$d_2^{(1)} \geqq 2g_1 - p_1 \quad \text{und} \quad d_2^{(2)} \geqq 2g_2 - p_2,$$

und es gilt der Satz:

Sind $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ zwei Covarianten vom Gewichte p_1, beziehungsweise p_2, in den Coëfficienten der

Stammform f vom Grade g_1, beziehungsweise g_2 und $2g_1 > p_1$, $2g_2 > p_2$, so ist die Resultante von $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ mindestens durch die

$$\tfrac{1}{2}(2g_1 - p_1)(2g_2 - p_2)^{\text{te}}$$

Potenz der Discriminante von f theilbar.

Ist die Zahl $\tfrac{1}{2}(2g_1 - p_1)(2g_2 - p_2)$ gebrochen, so hat man sie nach Obigem in unserem Satze durch die nächstgrössere ganze Zahl zu ersetzen.

7 Ganz ähnlich wie in Artikel 5 die Invarianten von Covarianten auf die Theilbarkeit durch die Discriminante einer Stammform untersucht worden sind, können sie auf die Theilbarkeit durch die Resultante von zwei Stammformen untersucht werden.

Ist $\Phi_0 x_1^\nu + \binom{\nu}{1} \Phi_1 x_1^{\nu-1} x_2 + \quad \Phi_\nu x_2^\nu$ eine Covariante und sind

$$f = a_0 x_1^n + \qquad \text{und} \quad f_1 = a'_0 x_1^n +$$

zwei Stammformen, so wird nach Artikel 2 der Exponent der höchsten Potenz der Resultante von f und f_1, die in der Invariante von Φ

$$J = \Sigma C \Phi_0^{\lambda_0} \Phi_1^{\lambda_1} . \quad \Phi_\nu^{\lambda_\nu}$$

aufgeht, übereinstimmen mit dem Exponenten der höchsten Potenz einer Unbestimmten t, die in J unter der Voraussetzung aufgeht, dass a_0 und a'_0 durch die erste Potenz dieser Unbestimmten theilbar sind.

In dem Leitglied Φ_0 geht unter der für a_0 und a'_0 gemachten Voraussetzung $t^{d_{11}}$ auf, wo d_{11} für das durch die Wurzeln der Stammformen dargestellte Leitglied angibt, um wie viel die Summe aus dem Grade in einer Wurzel von f und dem Grade in einer Wurzel von f_1 den Grad in diesen beiden Wurzeln übersteigt (Artikel 3). Die folgenden Coëfficienten Φ_1, Φ_2,. der Covariante sind also nach Artikel 4, beziehungsweise durch $t^{d_{11}-1}$, $t^{d_{11}-2}$,. theilbar. Hieraus ist zu schliessen, dass die Invariante $J = \Sigma C \Phi_0^{\lambda_0} \Phi_1^{\lambda_1} \quad \Phi_\nu^{\lambda_\nu}$ durch t zu einer Potenz theilbar ist, welche durch den kleinsten Werth gegeben wird, den der Ausdruck

$$d_{11}\lambda_0+(d_{11}-1)\lambda_1+\quad +1\ \lambda_{d_{11}-1}$$

für ein Glied von J annimmt. Da dieser kleinste Werth aber nach Artikel 3 angibt, um wie viel für die als Function der Wurzeln der Covariante Φ betrachtete Invariante J, der d_{11}-fache Grad in einer Wurzel den Grad in d_{11} Wurzeln übertrifft, so haben wir das Resultat:

Ist für das als Function der Wurzeln der Stammformen betrachtete Leitglied einer Covariante Φ die Summe aus dem Grade in einer Wurzel der Stammform f_1 und dem Grade in einer Wurzel der Stammform f_1 um d_{11} Einheiten grösser als der Grad in den beiden Wurzeln, so wird eine Invariante J dieser Covariante theilbar sein durch eine Potenz der Resultante von f und f_1, deren Exponent $D_{d_{11}}$ angibt, um wie viel für die durch die Wurzeln von Φ dargestellte Invariante der d_{11}-fache Grad in einer Wurzel den Grad in d_{11} Wurzeln übersteigt.

In ganz ähnlicher Weise ergibt sich auch der allgemeinere Satz:

Wenn für die durch die Wurzeln der Stammformen dargestellten Leitglieder der Covarianten $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)} \dots \Phi^{(\rho)}$ die Summe aus dem Grade in einer Wurzel der Stammform f und dem Grade in einer Wurzel der Stammform f_1 beziehungsweise um $d_{11}^{(1)}, d_{11}^{(2)}, \dots d_{11}^{(\rho)}$ grösser ist als der Grad in beiden Wurzeln, so wird eine simultane Invariante J dieser Covarianten theilbar sein durch die Resultante von f und f_1 zur Potenz $D_{d_{11}^{(1)} d_{11}^{(2)} \dots d_{11}^{(\rho)}}$, welche angibt, um wie viel für die durch die Wurzeln von $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots \Phi^{(\rho)}$ dargestellte Invariante J die Summe aus dem $d_{11}^{(1)}$-fachen Grade in einer Wurzel von $\Phi^{(1)}$, dem $d_{11}^{(2)}$-fachen Grade in einer Wurzel von $\Phi^{(2)}$,. dem $d_{11}^{(\rho)}$-fachen Grade in einer Wurzel von $\Phi^{(\rho)}$ den Grad in $d_{11}^{(1)}$ Wurzeln von $\Phi^{(1)}$, $d_{11}^{(2)}$ Wurzeln von $\Phi^{(2)}$, $d_{11}^{(\rho)}$ Wurzeln von $\Phi^{(\rho)}$ übersteigt.

Nehmen wir als Invariante J speciell die Discriminante von Φ, so ist (Artikel 6)

$$D_{d_{11}} = d_{11}(d_{11}-1)$$

und wenn wieder p das Gewicht von Φ und g, beziehungsweise g' den Grad dieser Covarianten in den Coëfficienten von f, beziehungsweise f_1 bedeutet, so ist ferner

$$d_{11} \geqq g+g'-p,$$

so dass wir den Satz aussprechen können:

Ist p das Gewicht einer Covariante Φ, g ihr Grad in den Coëfficienten der Stammform f, g' in den Coëfficienten von f_1 und $g+g'>p+1$, so ist die Discriminante von Φ mindestens durch die

$$(g+g'-p)(g+g'-p-1)^{\text{te}}$$

Potenz der Resultante von f und f_1 theilbar.

Wählen wir als Invariante J die Resultante der beiden Covarianten $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ von dem Gewichte p_1, beziehungsweise p_2 und dem Grade g_1, beziehungsweise g_2 in den Coëfficienten von f, g'_1, beziehungsweise g'_2 in den Coëfficienten von f_1, so haben wir (vergl. Artikel 6):

$$D_{d_{11}^{(1)} d_{11}^{(2)}} = d_{11}^{(1)} . d_{11}^{(2)}$$

$$d_{11}^{(1)} \geqq g_1+g'_1-p_1, \qquad d_{11}^{(2)} \geqq g_2+g'_2-p_2$$

und damit den Satz:

Sind $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ zwei Covarianten von dem Gewicht p_1, beziehungsweise p_2, dem Grad g_1, beziehungsweise g_2 in den Coëfficienten der Stammform f, g'_1, beziehungsweise g'_2 in den Coëfficienten der Stammform f_1 und ist $g_1+g'_1>p_1$, $g_2+g'_2>p_2$, so ist die Resultante von $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ mindestens durch die

$$(g_1+g'_1-p_1)(g_2+g'_2-p_2)^{\text{te}}$$

Potenz der Resultante von f und f_1 theilbar.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Kohn Gustav

Artikel/Article: Über eine Eigenschaft der Invarianten von Covarianten. 801-813