Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Ich werde in den folgenden Zeilen ein Beispiel für die Ermittelung von eigentlichen bestimmten Integralen auf Grund der Definition derselben, sowie für die Zurückführung von solchen auf andere mit Hilfe von arithmetischen Betrachtungen mittheilen und sodann zeigen, wie sich unter Benützung von Überlegungen, welche der Zahlentheorie entnommen sind, gewisse vielfache Integrale mit unendlichem Integrationsintervalle auf einfache reduciren lassen.

I.

Das eigentliche bestimmte s-fache Integral

$$\int\int \ldots \int f(x_1, x_2 \ldots x_s)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_s,$$

in welchem die Integration über alle Punkte einer gegebenen stetigen s-fachen Mannigfaltigkeit auszudehnen ist, ist bekanntlich seiner Definition nach der Grenzwerth der s-fachen Summe

$$\sum_{r_s = 1}^{r_1 = n_1,\, r_2 = n_2, \ldots, r_s = n_s} \delta^{(1)}_{r_1} \delta^{(2)}_{r_2} \ldots \delta^{(s)}_{r_s} f(x^{(1)}_{r_1}, x^{(2)}_{r_2}, \ldots, x^{(s)}_{r_s}),$$

in welcher $x^{(1)}_{r_1}, x^{(2)}_{r_2}, \ldots, x^{(s)}_{r_s}$ irgend eine Stelle des erwähnten Bereiches ist und unter den auftretenden Stellen sämmtliche

Punkte der die Grenze des Bereiches bildenden $(s-1)$-fachen Mannigfaltigkeit vorkommen, bei unbegrenzter Abnahme einer jeden Zahl

$$\delta_{r_\lambda}^{(\lambda)} = x_{r_\lambda+1}^{(\lambda)} - x_{r_\lambda}^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, s)$$

und kann demnach aus dieser Summe mit jedem beliebigen Grade der Annäherung berechnet werden. Die genaue Ermittelung des Werthes eines solchen Integrales mit Hilfe der eben angeführten Definitionsgleichung ist bisher nur in einer äusserst geringen Anzahl von Fällen gelungen und demnach dürfte es nicht ohne Interesse sein, ein etwas allgemeineres neues derartiges Beispiel anzugeben, bei dessen Behandlung der Zahlentheorie angehörige Hilfsmittel zur Verwendung gelangen, zumal derselbe eine Verknüpfung zwischen zwei bisher noch nicht oft in Zusammenhang gebrachten Partien der Mathematik bildet. Dies soll in diesem Abschnitte geschehen.

1. Lässt sich die ganze nicht negative Zahl n als Summe der r^{ten} Potenzen von $s+1$ beliebigen ganzen, dem Intervalle $\alpha \ldots \beta$ angehörigen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}$ darstellen, so ist

$$\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}$$

eine in dem erwähnten Bereiche liegende ganze Zahl und daher

$$\left[\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\right]-\left[\sqrt[r]{n-1-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\right]=1,$$

während diese Differenz für alle übrigen ganzzahligen Systeme $x_1, x_2, \ldots, x_s$, deren Elemente zwischen α und β liegen, den Werth o hat.

Es stellt demnach der Ausdruck

$$F_{s+1}(n) = \sum_{x_1, x_2, \ldots} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \left\{\left[\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\right]-\right.$$
$$\left.-\left[\sqrt[r]{n-1-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\right]\right\} + \eta F_s(n),$$

in welchem die Summation bezüglich $x_1, x_2, \ldots, x_s$ über alle der Bedingung

$$x_1^r + x_2^r + \ldots + x_s^r \leq n$$

genügenden ganzzahligen Systeme von s Werthen des Bereiches α. . β auszudehnen ist und η den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem 0 zu den zulässigen Werthen von $x_1, x_2, .\;\; ., x_s$ gehört oder nicht, die Summe der Werthe vor, welche die willkürliche Function $f(y_1, y_2, \;\; ., y_s)$ annimmt, wenn für ihr Argumentensystem alle bei den oben erwähnten Darstellungen von n zu verwendenden Werthsysteme in der dortigen Reihenfolge gesetzt werden.

Schreibt man in dieser Relation für n der Reihe nach n, $n-1$, $n-2$, $\;\;$., 2, 1, und addirt die so entstehenden Gleichungen, so ergibt sich die Beziehung

$$\Phi_{s+1}(n) = \sum_{x=1}^{x=n} F_{s+1}(x) =$$

$$= \sum_{x_1, x_2,} f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\left[\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\,\right] + \eta\Phi_s(n) =$$

$$= \sum f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r} +$$

$$+\eta\Phi_s(n) - \sum_{x_2,} \quad x_s f \quad \ldots, x_s), \qquad 1)$$

wo für die Zahlen $x_1, x_2, .\;\; ., x_s$ die oben angegebene Summationsbedingung gilt und

$$0 \leqq \varepsilon_{x_1,} \qquad < 1$$

ist.

Ist nun $f(x_1, x_2, .\;\; ., x_s)$ eine homogene Function von der Dimension t, wo t eine nicht negative (nicht nothwendig ganze) Zahl vorstellt, so wird

$$|\Phi_s(n)| = An^{\frac{t+s}{r}}$$

$$\left|\sum_{x_1, x_2,} \varepsilon_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\right| = Bn^{t+s}$$

wo A und B für keinen Werth von n ins Unendliche wachsen können, und daher hat man die Beziehung

$$\Phi_{s+1}(n) = n^{\frac{t+s+1}{r}} \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f\left(\frac{x_1}{\sqrt[r]{n}}, \frac{x_2}{\sqrt[r]{n}}, \ldots \frac{x_s}{\sqrt[r]{n}}\right).$$

$$\sqrt[r]{1 - \frac{x_1^r + x_2^r + \ldots + x_s^r}{n}} \, \frac{1}{n^{\frac{s}{r}}} + Cn^{\frac{s+t}{r}}$$

wo C für alle Werthe von n endlich bleibt. Aus derselben folgt, falls $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$ wird, durch Übergang zur Grenze für ein unbegrenzt wachsendes n die Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{t+s+1}{r}}} =$$

$$= \int\int \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \sqrt[r]{1 - x_1^r - x_2^r - \ldots - x_s^r} \, dx_1 dx_2 \ldots dx_s, \quad 2)$$

in welcher die Integration über alle nicht negativen Werthe der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_s$ zu erstrecken ist, welche die Bedingung

$$x_1^r + x_2^r + \ldots + x_s^r < 1$$

erfüllen.

Ist speciell $t = 0$, $r = s+1$, so gibt die linke Seite der letzten Gleichung die sogenannte mittlere Anzahl der Darstellungen einer ganzen (nicht negativen) Zahl durch eine Summe der r^{ten} Potenzen von r nicht negativen ganzen Zahlen dar und man hat daher für diese den Ausdruck

$$\int\int \ldots \int \sqrt[r]{1 - x_1^r - x_2^r - \ldots - x_{s+1}^r} \, dx_1 dx_2 \ldots dx_r$$

mit den Integrationsbedingungen

$$x_\lambda \geqq 0 \; (\lambda = 1, 2, \ldots r-1); \; x_1^r + x_2^r + \ldots + x_{r-1}^r < 1.$$

2. Es sei nun speciell

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_s^{r_s}; \; \alpha = 0, \beta = \infty,$$

wo $r_1, r_2, \ldots, r_s$ beliebige nicht negative Zahlen vorstellen; alsdann ist

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} f(x_1, x_2, \ldots, x_s)\left[\sqrt[r]{n-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\right]=$$

$$=\sum_{x_s=0}^{x_s=[\sqrt[r]{n-1}]} x_s^{r_s}\left(\sum_{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{s-1}} x_1'^{r_1} x_2'^{r_2} \ldots x_{s-1}'^{r_{s-1}}\left[\sqrt[r]{(n-x_s^r)-x_1'^r-x_2'^r-\ldots-x_{s-1}'^r}\right]\right),$$

wo für jeden bestimmten Werth $x_s^{(o)}$ von x_s die Summation bezüglich $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{s-1}$ über alle der Bedingung

$$x_1'^r+x_2'^r+\ldots+x_{s-1}'^r < n-x_s^{(o)r}$$

genügenden ganzzahligen nicht negativen Werthsysteme auszudehnen ist und daher hat man in diesem Falle die Beziehung

$$\Phi_{s+1}(n)=\sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_s}\Phi_s(n-x^{r_s})+Dn^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{\Phi_s(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}}\sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_s}(n-x^{r_s})^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}+$$

$$+D_1 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} \tag{3}$$

wo D und D_1 für alle Werthe von n endlich sind.

Aus dieser Gleichung folgt auf dem früher eingeschlagenen Wege sofort die Relation

$$\lim_{n=\infty}\frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}}=$$

$$=\lim_{n=\infty}\frac{\Phi_s(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}}\int_0^1 x^{r_s}(1-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} \tag{4}$$

welche unmittelbar zu der Formel

$$\int\int\cdots\int x_1^{r_1} x_2^{r_2}\ldots x^{r_s} \sqrt[r]{1-x_1^r-x_2^r-\ldots x_s^r}\, dx_1 dx_2\ldots dx_s =$$

$$= \int_0^1 x^{r_s}(1-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} dx\,.$$

$$\int_0^1 x^{r_s-1}(1-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-2}+s-1}{r}} dx$$

$$\int_0^1 x^{r_s-2}(1-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-3}+s-2}{r}} dx.\quad \int_0^1 x^{r_1} \sqrt[r]{1-x^r}\, dx$$

$$(x_\lambda \geqq 0,\ \lambda = 1, 2,\ldots, s;\ x_1^r+x_2^r+\ldots+x_s^r < 1)$$

führt, die unter Benützung der bekannten Beziehung

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx = \frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}$$

die Relation

$$\int\int\ldots\int x_1^{r_1} x_2^{r_2}\ldots x_s^{r_s} \sqrt[r]{1-x_1^r-x_2^r-\ldots-x_s^r}\, dx_1 dx_2\ldots dx_r =$$

$$= \frac{1}{n^s}\,\frac{\Gamma\left(\frac{r_1+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_2+1}{r}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{r_s+1}{r}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}\right)}$$

$$x_\lambda \geqq 0,\ \lambda = 1, 2,\ldots, s;\ x_1^r+x_2^r+\ldots+x_s^r < 1)$$

liefert. Dieselbe ist ein specieller Fall der von Liouville im 4. Bande des »Journal des mathématiques pures et appliquées« gegebenen Verallgemeinerung des bemerkenswerthen Dirichlet'schen vielfachen Integrales.

3. Die letzte Relation kann man bei ganzzahligen Werthen von r_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, s$) auch in folgender Weise herleiten. Setzt man voraus, dass

$$\Phi_s(n) = An^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} + Bn^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s-1}{r}}$$

ist, wo A von n unabhängig und B für alle Werthe von n endlich ist, so hat man nach der im Anfange der vorigen Nummer gegebenen Erörterung

$$\Phi_{s+1}(n) = A \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_s}(n-x^r)^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} + B_1 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} = An^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{(-1)^\mu}{n^\mu} \binom{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}{\mu} S_{r\mu+r_s}([\sqrt[r]{n}]) + B_1 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}$$

wo

$$1^\varkappa+2^\varkappa+\ldots+m^\varkappa = S_\varkappa(m)$$

gesetzt wurde. Nun ist aber bekanntlich

$$S_\varkappa(m) = \frac{m^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} + \frac{m^\varkappa}{2} + \binom{\varkappa}{2}\frac{B_1}{\varkappa-1} m^{\varkappa-1} - \binom{\varkappa}{4}\frac{B_2}{\varkappa-3} m^{\varkappa-3} + \ldots$$

und daher kann man die letzte Gleichung auch in folgender Form schreiben

$$\Phi_{s+1}(n) = An^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \binom{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}{\mu} \cdot \frac{1}{r\mu+r_s+1} + B_2 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s}{r}} =$$

$$= \frac{An^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}}{r_s+1} F\left(-\frac{r_1+r_2+\ldots r_{s-1}+s}{r}, \frac{r_s+1}{r}, \frac{r_s+1}{r}+1, 1\right) + B_2 n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s}{r}}$$

aus welcher auf Grund der Formel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

unmittelbar die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{r_s+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_1+r_2+\quad+r_{s-1}+s}{r}+1\right)}{r\Gamma\left(\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}+1\right)} . \lim_{n=\infty} \frac{\Phi_s(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_{s-1}+s}{r}}}$$

folgt, die zu der Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{r_2+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_3+1}{r}\right). \quad .\Gamma\left(\frac{r_s+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_1+2}{r}+1\right)}{r^{s-1}\Gamma\left(\frac{r_1+r_2+\quad+r_s+s+1}{r}+1\right)} \lim_{n=\infty} \frac{\Phi_2(n)}{n^{\frac{r_1+2}{r}}}$$

führt, wo nach den früheren Auseinandersetzungen

$$\Phi_2(n) = \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_1}\left[\sqrt[r]{n-x^r}\right] + S_{r_1}\left(\left[\sqrt[r]{n}\,\right]\right),$$

$$= \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_1}\left[\sqrt[r]{n-x^r}\right] + An^{\frac{r_1+1}{r}}$$

ist, wenn A eine für jedes n endliche Grösse vorstellt. Die auf der rechten Seite dieser Gleichung befindliche Summe lässt sich leicht in eine andere verwandeln, welche zur Bestimmung des asymptotischen Werthes von $\Phi_2(n)$ tauglich ist. Betrachtet man nämlich die Summe

$$\sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} S_{r_1}\left(\left[\sqrt[r]{n-x^r}\right]\right),$$

so erkennt man, dass in derselben die r_1^{te} Potenz einer dem Bereiche $0 \ldots \sqrt[r]{n}$ angehörigen ganzen Zahl x_0 so oft vorkommt, als es ganzzahlige Werthe x dieses Intervalles gibt, für welche

$$\sqrt[r]{n-x^r} \geqq x_0$$

ist, d. i. also $[\sqrt[r]{n-x^r}]$-mal und demnach ist

$$\Phi_2(n) = \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} S_{r_1}\left([\sqrt[r]{n-x_0^r}]\right) + An^{\frac{r_1+1}{r}}$$

$$= \frac{n^{\frac{r_1+1}{r}}}{r_1+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{(-1)^\mu}{n^\mu} \binom{\frac{r_1+1}{r}}{\mu} S_{r\mu}\left([\sqrt[r]{n}\,]\right) + A_1 n^{\frac{r_1+1}{r}}$$

$$= \frac{n^{r_1+2}}{r_1+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \binom{\frac{r_1+1}{r}}{\mu} \frac{1}{r\mu+1} + A_2 n^{\frac{r_1+1}{r}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+1}{r}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{r\Gamma\left(\frac{r_1+2}{r}+1\right)} n^{\frac{r_1+2}{r}} + A_2 n^{\frac{r_1+1}{r}} \tag{4}$$

Man hat also schliesslich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{r_1+1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{r_2+1}{r}\right).\ \ .\Gamma\left(\frac{r_s+1}{r}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{r}\right)}{r^s\Gamma\left(\frac{r_1+r_2+\quad+r_s+s+1}{r}+1\right)},$$

wodurch die am Ende der letzten Nummer abgeleitete Formel neuerdings bewiesen ist.

Aus 4) folgt weiters einerseits die Integralbeziehung

$$\int_0^1 x^{r_1}(1-x^r)^{\frac{1}{r}}\,dx = \frac{1}{r_1+1}\int_0^1 (1-x^r)^{\frac{r_1+1}{r}}\,dx,$$

anderseits für $r_1 = r-2$ die bemerkenswerthe specielle Relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r-2}\left[\sqrt[r]{n-x^r}\right]}{n} = \frac{\pi}{r^2 \sin\frac{\pi}{r}},$$

aus welcher sich für $r = 2$ das folgende arithmetische Theorem ergibt:

Die mittlere Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch die binäre quadratische Form (1, 0, 1) ist gleich π.

4. Ist $r = 2$, so kann man bei der Bestimmung von $\Phi_s(n)$ für ganzzahlige r_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, s)$ die Benützung unendlicher Reihen leicht vermeiden. Da nämlich

$$r_1+r_2+\ldots+r_s+s = 2\rho+\varepsilon \quad (\varepsilon = 0, 1)$$

ist, so hat man die Relation

$$\Phi_{s+1}(n) = \lim_{n=\infty} \frac{\Phi_s(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\cdots+r_{s-1}+s}{r}}} \sum_{x=0}^{x=[\sqrt[r]{n}]} x^{r_s}(n-x^2)^{\rho} \left[\sqrt{n-x^2}\right] + A_1 n^{\rho+}$$

welche für $\varepsilon = 0$ unmittelbar die früher gefundene Beziehung liefert, während für $\varepsilon = 1$ die Existenz derselben von dem Bestehen einer entsprechenden Formel für die Anzahl $\Phi_2^{(0)}(n)$ der Darstellungen von n als Summe der Quadrate von zwei ganzen nicht negativen Zahlen abhängt.

Nun ist aber bekanntlich die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl n durch die binäre quadratische Form (1, 0, 1) gleich dem vierfachen Überschusse $4\varepsilon_1(n)$ der Anzahl derjenigen ungeraden Theiler von n, welche die Form $4s+1$ besitzen, über die Anzahl der übrigen, und demnach hat die Gesammtanzahl dieser Darstellungen für das ganze Intervall $1 \ldots n$ den Werth

$$4\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\eta(x),$$

wo $\eta(x)$ gleich 0, $+1$ oder -1 ist, je nachdem x gerade, von der Form $4s+1$ oder von der Form $4s-1$ ist, da diese Summe offenbar gleich

$$\sum_{x,y=1}^{x,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xy}\right)\eta(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x}\right)\left(\sum_{d_x} \eta(d_x)\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon_1(x)$$

ist, wenn $\varepsilon(\alpha)$ gleich 0 oder 1 wird, je nachdem α kleiner als 1 ist oder nicht, und die Summation bezüglich d_x über alle Theiler von x ausgedehnt wird. Nun ist ferner

$$\sum_{x=1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\eta(x) = n\sum_{x=1}^{x=\infty}\frac{\eta(x)}{x} - n\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty}\frac{\eta(x)}{x} -$$
$$-\sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]}\varepsilon_x\eta(x) + \sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\eta(x) \qquad (0 \leqq \varepsilon_x < 1)$$

und daher hat man, da

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\frac{\eta(x)}{x} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left|\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=\infty}\frac{\eta(x)}{x}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left|\sum_{x=1}^{n=[\sqrt{n}]}\varepsilon_x\eta(x)\right| < \sqrt{n}$$

$$\sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=n}\left[\frac{n}{x}\right]\eta(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} H\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) - [\sqrt{n}]\,H([\sqrt{n}])$$

ist, wo

$$H(r) = \sum_{x=1}^{x=r}\eta(x)$$

gesetzt wurde, wesshalb

$$\left| \sum_{x=[\sqrt{n}]+1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \eta(x) \right| < 2\sqrt{n}$$

wird, die Relation

$$\Phi_2^{(0)}(n) = \frac{\pi n}{4} + A_2 \sqrt{n},$$

deren hier gegebene Ableitung ich im Wesentlichen schon im 49. Bande der Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften mitgetheilt habe; dieselbe wurde hier nur der Vollständigkeit wegen aufgenommen. Der eben angegebene Ausdruck von $\Phi_2^{(0)}(n)$ zeigt, dass der in den vorausgehenden Entwicklungen abgeleitete Werth von $\lim_{n=\infty} \frac{\Phi_{s+1}(n)}{n^{\frac{r_1+r_2+\ldots+r_s+s+1}{r}}}$ bei den in diesem Abschnitte gemachten speciellen Voraussetzungen giltig ist.

II.

Die Form r^{ter} Ordnung der r Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(a_1, a_2, \ldots, a_s; x_1, x_2, \ldots, x_r)$ sei so beschaffen, dass durch sie, falls $x_\lambda \geqq \alpha_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, r$; α_λ ganzzahlig) alle nicht negativen ganzen Zahlen und nur solche darstellbar sind, und es sei $\chi(n)$ die Anzahl derjenigen Darstellungen der ganzen Zahl n durch dieselbe, für welche die Variablen die eben angeführte Bedingung erfüllen. Alsdann lässt sich bekanntlich stets eine Function $\psi(x)$ so bestimmen, dass die über alle Theiler d von n erstreckte Summe

$$\sum_d \psi(d) = \chi(n)$$

ist; dieselbe ist nämlich durch die Gleichung

$$\psi(n) = \sum_d \chi\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d)$$

gegeben, wo die zahlentheoretische Function $\mu(x)$ den Werth 0 hat, wenn x nicht ganzzahlig oder durch ein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, in allen anderen Fällen aber gleich $(-1)^{\bar{\omega}(x)}$ wird, wenn $\bar{\omega}(x)$ die Anzahl der Primtheiler von x vorstellt. Es gibt daher

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \psi(x)$$

die Anzahl der erwähnten Darstellungen aller ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ an und demnach ist, falls sich diese Summe auf die Gestalt

$$n \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} + a$$

bringen lässt, wo

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{n} = 0$$

ist,

$$\alpha = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

die mittlere Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl in der genannten Form.

Es soll nun unter Benützung der eben gemachten Erörterungen das r-fache Integral

$$\int_{\alpha_1}^{\infty} \int_{\alpha_2}^{\infty} \cdots \int_{\alpha_r}^{\infty} f((a_1, a_2, \ldots, a_s;\, x_1, x_2, \ldots, x_r))\, dx_1 dx_2 \ldots dx_r$$

unter gewissen Voraussetzungen über die Natur der Functionen f und ψ auf Grund der Definitionsgleichung in ein einfaches transformirt werden.

Aus der Definitionsgleichung

$$\int_{\alpha_1}^{\infty} \int_{\alpha_2}^{\infty} \cdots \int_{\alpha_r}^{\infty} f((a_1, a_2, \ldots, a_s;\, x_1, x_2, \ldots x_r))\, dx_1 dx_2 \ldots dx_r =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0,\, n_1, n_2, \ldots, n_r = \infty} \sum_{\lambda_1=\alpha_1, \lambda_2=\alpha_2, \ldots, \lambda_r=\alpha_r}^{\lambda_1=n_1, \lambda_2=n_2, \ldots, \lambda_r=n_r} \varepsilon f(\varepsilon(a_1, a_2, \ldots, a_s;\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s))$$

folgt, falls die Function f so beschaffen ist, dass die Glieder der auf der rechten Seite stehenden r-fachen Summe in beliebiger Weise in Gruppen zusammengefasst werden können, durch Vereinigung aller Terme, in denen

$$(a_1, a_2, \ldots, a_s; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = n$$

ist, die Beziehung

$$\int_{\alpha_1}^{\infty}\int_{\alpha_2}^{\infty} \int_{\alpha_r}^{\infty} f((a_1, a_2, \ldots, a_s; x_1, x_2, \ldots, x_r))\, dx_1 dx_2 \ldots dx_s =$$

$$= \lim_{\varepsilon = 0,\, n = \infty} \sum_{m=0}^{m=n} \varepsilon f(\varepsilon m) \left(\sum_{d_m} \psi(d_m) \right),$$

welche, falls auch in ihr die beliebige Zusammenfassung der Terme erlaubt ist, sofort in die folgende übergeht

$$\int_{\alpha_1}^{\infty}\int_{\alpha_2}^{\infty} \int_{\alpha_1}^{\infty} f((a_1, a_2, \ldots, a_s; x_1, x_2, \ldots, x_r))\, dx_1 dx_2 \ldots dx_r =$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} f(y)\, dy$$

Als specielle Fälle dieser Formel mögen die folgenden Relationen angeführt werden

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(ax^2 + bxy + cy^2)\, dx\, dy =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2\sqrt{4ac - b^2}} + \frac{b}{4ac - b^2} \right) \int_0^{\infty} f(y)\, dy,$$

$$(a > 0,\ c > 0;\ 4ac - b^2 > 0),$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x_1^r + x_2^r + \ldots + x_r^r)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_r =$$

$$= \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{1}{r}\right) \right\}^r \int_0^{\infty} f(y)\, dy,$$

welche ein specieller Fall der bekannten von Raabe in seiner im 28. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik von Crelle enthaltenen Abhandlung »Reduction des

p-fachen Integrales $\int_0^{\infty\,(p)} \varphi(a_1 x_1^{n_1} + a_2 x_2^{n_2} + \quad . + a_p x_p^{n_p}) x_1^{r_1-1}$

$. x_2^{r_2-1} \ldots x_p^{r_p-1}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_p$« aufgestellten Beziehung ist.

Schreibt man in der vorletzten von diesen Gleichungen einmal für b —b, das anderemal für x oder y —x beziehungsweise —y, so erhält man offenbar zwei Doppelintegrale, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Man erkennt demnach, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax^2+bxy+cy^2)\,dx\,dy \quad (a > 0,\ c > 0,\ 4ac—b^2 > 0)$$

für alle Formen einer negativen Discriminante denselben Werth hat.