

Das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(x)$

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

In einer in den »Transactions of the Royal Society of Edinburgh«[1] enthaltenen Abhandlung, betitelt »On the transformation of Laplace's coëfficients« hat Herr Plarr vermittelst eines Summationsverfahrens für factorielle Ausdrücke, welches, wie in dem betreffenden Referate im »Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik« mit Recht hervorgehoben wird, nothwendig ein schwieriges und verwickeltes ist, die Gleichung

$$P_n(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)=$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} a_\lambda (x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}} P_n^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(x_1)\cos\lambda\varphi$$

direct ermittelt, eine einfache Bestimmung der in dieser Relation auftretenden Constanten, bei welcher die angegebene Entwicklungsform als bekannt angenommen wird, findet sich in der in den »Proceedings of the Royal Irish Academy«[2] enthaltenen Note des Herrn Tarlington »On the determination of the numerical factors of Laplace's coëfficients«. Dass unter der eben erwähnten Voraussetzung auch die numerischen Coëfficienten in der entsprechenden Darstellung der eine Verallgemeinerung der Kugelfunctionen bildenden Functionen $C_n^\nu(x)$, welche entweder als Coëfficienten der Entwicklung von

[1] A. a. O. 34. Band, S. 19—43.
A. a. O. 6. Band, 189—191.

$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$ nach steigenden Potenzen von α, oder als die mit den Factoren $\dfrac{2^n\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1)\Pi(n)}$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$ versehenen Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe

$$x^{-1}F(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}) = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}dy}{y-x}$$

definirt werden können, sich ungemein leicht bestimmen lassen, ersieht man einerseits aus meiner in der zweiten Abtheilung des 70. Bandes der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kais. Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Ableitung derselben,[1] anderseits geht dies auch aus den folgenden Entwicklungen deutlich hervor. Da nicht nur das durch die obige Gleichung ausgedrückte Additionstheorem der Kugelfunctionen, sondern auch das Analogon desselben für die Functionen $C_n^\nu(x)$ bisher, mit Ausnahme der Plarr'schen Ermittelung des ersteren, meines Wissens stets mit Hilfe der partiellen Differentialgleichung, welcher die Functionen $P_n(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)$, beziehungsweise $C_n^\nu(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)$ genügen, abgeleitet wurde, so will ich in den folgenden Zeilen einen neuen, äusserst einfachen Beweis desselben angeben, bei welchem diese Gleichung ausser Betracht bleibt. Der besseren Übersicht wegen mögen die hierbei zur Verwendung gelangenden Sätze und Relationen aus der Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$ zunächst zusammengestellt werden.

I. Entwickelt man die Determinante n^{ter} Ordnung

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & ,0,0,. & 0 & 0 \\ \frac{1}{2(\nu+1)}, & x & 1,0,.. & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\nu+1}{2(\nu+1)(\nu+2)}, & x,\ 1,. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ,0,0,.. & \frac{(n-1)(n+2\nu-2)}{4(n+\nu-2)(n+\nu-1)}, & x \end{vmatrix},$$

[1] »Über einige bestimmte Integrale«, A. a. O. S. 433—443.

welche bekanntlich den n^{ten} Näherungsnenner der eben erwähnten regulären Kettenbruchentwicklung vorstellt, nach den Elementen der letzten Horizontalreihe, so findet man die Beziehung

$$n\,C_n^\nu(x) - 2(n+\nu-1)\,x\,C_{n-1}^\nu(x) + (n+2\nu-2)\,C_{n-2}^\nu(x) = 0, \qquad 1)$$

welche in Verbindung mit der Relation

$$\psi_0(x) = C_0^\nu(x) = 1$$

zu den Gleichungen

$$C_n^\nu(\pm 1) = (\pm 1)^n \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\,\Pi(2\nu-1)}$$

$$C_n^\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\nu-\lambda-1)(2x)^{n-2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-2\lambda)\,\Pi(\nu-1)}$$

führt, aus deren letzter unmittelbar die Formeln

$$[C_n^\nu(x)]^{(r)} = \frac{2^r\,\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1)}\,C_{n-r}^{\nu+r}(x) \qquad 2)$$

$$2\nu(1-x^2)\,C_{n-1}^{\nu+1}(x) = (n+2\nu-1)\,C_{n-1}^\nu(x) - n\,x\,C_n^\nu(x) \qquad 3)$$

$$\left[(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}\,C_{n-1}^{\nu+1}(x)\right]' = -\frac{n(n+2\nu)}{2\nu}\,(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C_n^\nu(x)$$

folgen. Mit Hilfe der letzten von diesen Gleichungen kann man für jede Function $\varphi(x)$, welche eine im Intervalle $-1\ldots+1$ stetige n^{te} Ableitung besitzt, die Beziehung

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C_n^\nu(x)\,dx =$$
$$= \frac{2^n\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2n+2\nu-1)} \int_{-1}^{+1} \varphi^{(n)}(x)\,(1-x^2)^{\frac{2n+2\nu-1}{2}}\,dx \qquad 4)$$

ableiten, aus welcher sich die Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-s}\,C_n^\nu(x)\,(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx =$$
$$= \int_{-1}^{+1} x^{n+2s-1}\,C_n^\nu(x)\,(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx = 0 \qquad 5)$$

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-2s} C_n^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx =$$

$$= \frac{\Pi(n+2s)\Pi(n-1)\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+2s+1}\Pi(s)\Pi(n)\Pi(n+\nu+s)} \left[\frac{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2$$

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x) C_m^\nu(x) dx =$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Pi(n-2\nu-1)}{\Pi(n)(n+\nu)} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1}\right]^2 \delta_{n,m}.$$

$$(\delta_{n,m} = 0,\ n \gtrless m;\ \delta_{n,n} = 1) \tag{6}$$

und speciell wegen

$$\left[\frac{1}{\nu} C_n^\nu(x)\right]_{\nu=0} = \frac{2\cos(n \arccos x)}{n} \qquad (n>0)$$

$$\left[\frac{1}{\nu} C_o^\nu(x)\right]_{\nu=0} = 1$$

$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx \, dx = \frac{2}{\pi}\delta_{n,m}$$

durch Specialisirung ergeben, deren letzte übrigens unmittelbar aus einer bekannten Eigenschaft der Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{y-x}$$

folgt.

II. Ist nun

$$C_n^\nu(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} A_\lambda C_\lambda^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi),$$

so besteht auf Grund der Relation 6) die Beziehung

$$A_\lambda = \frac{\Pi(\lambda)(2\lambda+2\nu-1)}{3^{2\nu-1}\Pi(\lambda+2\nu-2)} \left[\frac{\Pi(2\nu-2)}{\Pi(\nu-1)}\right]^2$$

$$\int_0^\pi C_n^\nu(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\, C_\lambda^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi,$$

welche nach 2) und 4) übergeht in

$$A_\lambda = \frac{(-1)^\lambda \Pi(2\nu-2)(2\lambda+2\nu-1)}{2^{2\nu-1}[\Pi(\nu-1)]^2}(x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}$$

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\, d\varphi. \quad 7)$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ hat man nach der obigen Bemerkung

$$A_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi P_n(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{(-1)^\lambda \lambda}{\pi}(x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\lambda+\frac{1}{2}}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi).$$
$$.\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi.$$

Bedenkt man, dass alle Glieder des auf der linken Seite der Gleichung 7) stehenden Integrales, in denen $\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}$ zu einer ungeraden Potenz erhoben wird, nach 2) verschwinden, so erkennt man, dass derselbe eine ganze symmetrische Function von x und x_1 ist, welche in Bezug auf jede der Veränderlichen den Grad $n-\lambda$ nicht übersteigt — dass dieser Grad wirklich erreicht wird, kann sofort durch Bestimmung des Coëfficienten von $(xx_1)^{n-\lambda}$ gezeigt werden — und daher lässt sich dasselbe in eine nach den Functionen $C_\varkappa^{\nu+\lambda}(x)$ fortschreitende Reihe von folgender Gestalt entwickeln

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi =$$
$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-\lambda} f_\varkappa(x_1)C_\varkappa^{\nu+\lambda}(x),$$

wo die Functionen $f_\varkappa(x_1)$ ganze Functionen von x_1 von nicht höherem als dem Grade $n-\lambda$ sind.

Berücksichtigt man, dass für $x_1 = \pm 1$ diese Gleichung sich in die folgende

$$(\pm 1)^{\nu-\lambda}\frac{[2^{\nu+\lambda}\Pi(\nu+\lambda-1)]^2}{2\Pi(2\lambda+2\nu-1)}C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-\lambda} f_\varkappa(\pm 1)C_\varkappa^{\nu+\lambda}(x)$$

verwandelt, so ersieht man, dass

$$f_{n-\lambda}(\pm 1) = (\pm 1)^{n-\lambda} \frac{[2^{\nu+\lambda}\Pi(\nu+\lambda-1)]^2}{2\Pi(2\lambda+2\nu-1)},\ f_\varkappa(\pm 1) = 0\ (\varkappa < n-\lambda)$$

und demnach

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi =$$
$$= f_{n-\lambda}(x_1)\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x) + (x_1^2-1)\, G(x, x_1)$$

ist, wo $G(x, x_1)$ eine ganze Function von x_1 von nicht höherem als dem Grade $n-\lambda-2$ ist.

Aus dieser Gleichung folgt sofort

$$(\lambda = n) \quad \int_0^\pi C_0^{\nu+n}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2n-1}\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{[2^{n+\nu}\Pi(n+\nu-1)]^3}{2\Pi(2n+2\nu-1)}\, C_0^{\nu+n}(x)\, C_0^{\nu+n}(x_1)$$

$$(\lambda = n-1) \quad \int_0^\pi C_1^{\nu+n-1}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\,.$$
$$.\sin^{2\nu+2n-3}\varphi\, d\varphi = (\alpha x_1 + \beta)\, C_1^{n+\nu-1}(x).$$

Setzt man in dieser Formel $x = +1$, so entsteht die Beziehung

$$\alpha x_1 + \beta = \frac{[2^{n+\nu-1}\Pi(n+\nu-2)]^2}{2\Pi(2n+2\nu-2)}\, C_1^{\nu+n-1}(x_1),$$

welche zeigt, dass $\beta = 0$ und demnach

$$\int_0^\pi C_1^{\nu+n-1}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2n-3}\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{(2^{n+\nu-1}\Pi(n+\nu-2)]^2}{2\Pi(2n+2\nu-2)}\, C_1^{\nu+n-1}(x)\, C_1^{\nu+n-1}(x_1)$$

ist. Auf Grund dieser zwei Relationen lässt sich aber sofort die allgemeine Beziehung

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi =$$
$$= \frac{[2^{\lambda+\nu}\Pi(\lambda+\nu-1)]^2\Pi(n-\lambda)}{2\Pi(n+\lambda+2\nu-1)}\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1) \qquad 8)$$

beweisen.

Nach 1) ist nämlich

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{n-\lambda}\Big\{2(n+\nu-1)\int_0^\pi (xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi).$$

$$.\, C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi -$$

$$-(n+\lambda+2\nu-2)\int_0^\pi C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x_2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi).$$

$$.\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi\Big\}$$

oder, falls die Relation 8) für alle $n-\lambda$ nicht erreichenden ganzzahligen, nicht negativen Werthe des unteren Index (bei beliebigen oberen) von $C_x^\nu(x)$ besteht,

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{n-\lambda}\Big\{\Big[\frac{(n+\nu-1)(n-\lambda-1)}{n+\lambda+2\nu-2}xx_1\, C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(x_1) -$$

$$-\frac{n+\lambda+2\nu-2}{2}C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(x)\, C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(x_1)\Big].$$

$$\frac{\Pi(n-\lambda-2)[2^{\lambda+\nu}\Pi(\lambda+\nu-1)]^2}{\Pi(n+\lambda+2\nu-3)} - 2(n+\nu-1)\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}$$

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\, d\varphi\Big\}$$

Nun ist aber

$$\cos\varphi = \frac{1}{2\nu+2\lambda-1}C_1^{\nu+\lambda-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$$

und daher nach 4)

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\cos\varphi\sin^{2\nu+2\lambda-1}\varphi\, d\varphi =$$

$$= (x^2-1)(x_1^2-1)\int_0^\pi C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda+1}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi).$$

$$.\sin^{2\nu+2\lambda+1}\varphi\, d\varphi,$$

so dass also die letzte Gleichung auf Grund von 8) übergeht in

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{\Pi(n-\lambda-2)[2^{\lambda+\nu}\Pi(\lambda+\nu-1)]^2}{(n-\lambda)\Pi(n+\lambda+2\nu-3)}\left\{\frac{(n+\nu-1)(n-\lambda-1)}{n+\lambda+2\nu-2}\right.$$
$$.\,xx_1 C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda-1}^{\nu+\lambda}(x_1)-\frac{n+\lambda+2\nu-2}{2}$$
$$.\,C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda}(x_1)+\frac{4(n+\nu-1)(\lambda+\nu)^2}{(n+\lambda+2\nu-2)(n+\lambda+2\nu-1)}$$
$$\left..\,(x^2-1)(x_1^2-1)\,C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda+1}(x)\,C_{n-\lambda-2}^{\nu+\lambda+1}(x_1)\right\}$$

Da der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck, wie man mit Hilfe der Gleichungen 1) und 3) leicht zeigt, für jede Wurzel ξ der Gleichung

$$C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x) = 0$$

verschwindet, so ist er durch das Product $C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1)$ theilbar, und demnach besteht, da derselbe in Bezug auf x und x_1 vom Grade $n-\lambda$ ist, die Beziehung

$$\int_0^\pi C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\nu-1}\varphi\,d\varphi =$$
$$= a\,C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1),$$

in welcher, wie die Substitution $x=1$ zeigt, die Constante a den in der Formel 8) angegebenen Werth hat. Da nun diese Formel für $n-\lambda = 0, 1$ gilt, so besteht sie allgemein.

Man hat demnach die Relation

$$C_n^\nu(xx_1-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi) =$$
$$= \frac{\Pi(2\nu-2)}{[\Pi(\nu-1)]}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^\lambda\frac{4^\lambda\Pi(n-\lambda)[\Pi(\nu+\lambda-1)]^2}{\Pi(n+2\nu+\lambda-1)}$$
$$.\,(x^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\,C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1)\,C_\lambda^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi),$$

welche das Additionstheorem der Functionen $C_n^\nu(x)$ ausspricht.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch bemerken, dass die von Herrn R. Fujisawa in seiner Mittheilung »Note on a new formula in spherical harmonics«[1] abgeleitete Formel

$$C_n^1(\cos x) - C_{n-2}^1(\cos x) = 2\cos nx,$$

welche unmittelbar zur Relation

$$C_n^1(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$$

führt, als specieller Fall in der von mir aufgestellten Relation

$$C_n^{\nu+1}(x) - C_{n-2}^{\nu+1}(x) = \frac{n+\nu}{\nu} C_n^\nu(x)$$

enthalten ist, aus welcher, falls $x > 1$ ist, die der Fujisawa'schen analoge Gleichung

$$C_n^1(\text{coshyp } x) - C_{n-2}^1(\text{coshyp } x) = 2 \text{ coshyp } nx$$

folgt.

---

[1] Schriften der mathematischen Gesellschaft in Tokio, 4. Band, 1. Heft, S. 7—8.

Über ein Theorem des Herrn Baker

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Vereinigt man in der Entwicklung der m^{ten} Potenz des Polynoms $a_1+a_2+\ldots+a_r$, wo m eine ganze positive Zahl vorstellt, alle Glieder, in denen die Exponenten von s Grössen $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ den Werth 0 haben, für $s = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, so erhält dieselbe folgende Gestalt

$$(a_1+a_2+\ldots+a_r)^m = \sum_{s=0}^{s=r-1}\left(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f_{r-s}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\right)$$

wo die Summation bezüglich $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}$ über alle Combinationen $(r-s)^{\text{ter}}$ Classe ohne Versetzung und ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots, r$ auszudehnen ist und die symmetrische Function $f_{r-s}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-s})$ der $r-s$ Grössen x_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r-s)$ durch die Gleichung

$$f_{r-s}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-s}) =$$
$$= \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-s-1}=1}^{\ldots,\lambda_{r-s-1}=m-r+s+1} \frac{m!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_{r-s-1}!(m-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{r-s-1})!}\cdot$$
$$\cdot x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\ldots x_{r-s-1}^{\lambda_{r-s-1}} x_{r-s}^{m-\lambda_1-\lambda_2-\ldots-\lambda_{r-s-1}}$$

definirt ist, welche zeigt, dass für $s < r-m$

$$f_{r-s}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-s}) = 0$$

wird.

Auf Grund dieser Darstellung leitet man leicht die Relation

$$f_r(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \\ = \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (a_{\varkappa_1} + a_{\varkappa_2} + \ldots + a_{\varkappa_{r-s}})^m \right)$$

ab, welche für den speciellen Fall $r > m$ schon von Herrn R. W. Christie in seiner im 20. Bande der Proceedings of the London Mathematical Society (S. 119—121) enthaltenen Mittheilung »A theorem in combinations« aufgestellt und auf specielle Fälle angewendet wurde und von welcher Herr H. F. Baker[1] für $r \geqq m$ im 21. Bande derselben Zeitschrift zeigte, dass sie ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Theorems ist:

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_r$ irgendwelche Grössen und ist $f_{r-s}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-s})$ eine symmetrische Function von $x_1, x_2, \ldots, x_{r-s}$, so folgt aus der Beziehung

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \\ = \sum_{s=0}^{s=r-1} \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} f_{r-s}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right) + f_0(0),$$

in welcher die Summation bezüglich $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}$ über alle Combinationen $(r-s)^{\text{ter}}$ Classe ohne Versetzung und ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots, r$ auszudehnen ist, die Relation

$$f_r(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \\ = \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \left(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} F(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \right) + (-1)^r F(0).$$

Nimmt man in diesen zwei Gleichungen für $a_1, a_2, \ldots, a_r$ die Primtheiler $p_1, p_2, \ldots, p_r$ einer durch kein Quadrat (ausser 1)

---

[1] »On Euler's Φ-function«. A. a. O. S. 30—32. Den Inhalt der angezogenen Arbeiten kenne ich nur durch die bezüglichen Referate im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik. Das Baker'sche Theorem wurde von mir etwas allgemeiner gefasst als a. a. O. geschieht.

theilbaren ganzen Zahl n und für jedes $f_{r-s}(p_1, p_2, \ldots, p_{r-s})$ dieselbe beliebige Function $f(p_1 p_2 \ldots p_{r-s})$ des Productes der Argumente, so erhält man die beiden in der Zahlentheorie längst für ein allgemeines n aufgestellten correspondirenden Beziehungen

$$F(n) = \sum_d f(d)$$

$$f(n) = \sum_d F\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d),$$

in denen die Summation über alle Theiler d von n zu erstrecken ist.

Das eben angeführte Theorem stellt daher, wie übrigens auch Herr Baker schon durch den Titel seiner Arbeit andeutet, ein Analogon eines arithmetischen Satzes im Gebiete der symmetrischen[1] Functionen dar. In der That liegt, da jede ganze Zahl als ein Product von Primzahlpotenzen, also allgemeiner als eine Function derselben dargestellt werden kann — dass dieselbe symmetrisch ist, hat, wie sich zeigen wird, für die beabsichtigte Untersuchung keine Bedeutung — von vorneherein die Vermuthung nahe, dass ein grosser Theil derjenigen Theoreme der Zahlentheorie, welche in letzter Linie auf der eben erwähnten Darstellung fussen, Analoga im Gebiete der Functionen von mehreren Veränderlichen haben werden. Zu diesen Sätzen gehören u. A. alle jene, welche sich auf solche nach den Theilern einer ganzen Zahl n fortschreitende Summen beziehen, in denen weder die Grösse der einzelnen Elemente, noch deren Form in Bezug auf einen bestimmten Modul eine Rolle spielt, und zwar werden jedem von diesen Theoremen zwei allgemeinere im Gebiete der Functionen von mehreren Veränderlichen entsprechen, da die genannten Theiler einerseits,

[1] Dass die Symmetrie der vorkommenden Functionen keine nothwendige Bedingung zum Bestehen der erwähnten Theoreme ist, ergibt sich schon daraus, dass das im Anfange angeführte Theorem bestehen bleibt, wenn in demselben $a_\varkappa$ durch $c_\varkappa a_\varkappa$ und folglich $x_\varkappa$ durch $c_\varkappa x_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ ersetzt wird, obwohl die auftretenden Functionen in Bezug auf die $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ nicht mehr sämmtlich symmetrisch sind.

falls n durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, als aus einer für jeden einzelnen besonderen Anzahl derselben Elemente zusammengesetzt, anderseits als aus einer für alle gleichen Anzahl von Elementen, die für jeden einzelnen besondere sind (verschiedene Potenzen der Primfactoren einschliesslich der nullten), gebildet angesehen werden können.

In der vorliegenden Mittheilung mag nun eine Reihe von derartigen Beziehungen der beiden Kategorien ermittelt werden, da dieselben nicht nur an sich interessant sind, sondern durch sie auch die entsprechenden Sätze der Zahlentheorie an Durchsichtigkeit gewinnen.

§. 1. Mit $\varkappa_{\alpha_1}, \varkappa_{\alpha_2}, \ldots, \varkappa_{\alpha_\beta}$ möge irgend eine der Combinationen β^{ter} Classe ohne Wiederholung der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ bezeichnet werden, in welcher die Elemente der Grösse nach aufeinanderfolgen, und es werde die über alle derartigen Combinationen der bezüglichen Classe ausgedehnte Summe

$$\begin{aligned}\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} & f^{(\rho)}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \,. \\ & f^{(\sigma)}_{\varkappa_{r-s+1}, \varkappa_{r-s+2}, \ldots}(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r}) = \\ = \sum_{\varkappa_{r-s+1}, \varkappa_{r-s+2}, \ldots} & f^{(\rho)}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \,. \\ & . f^{(\sigma)}_{\varkappa_{r-s+1}, \varkappa_{r-s+2}, \ldots, \varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r}),\end{aligned}$$

in welcher $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_r$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ ist und wo unter den Functionen $f^{(\rho)}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots a_{\varkappa_{r-s}})$, $f^{(\sigma)}_{\varkappa_{r-s+1}, \varkappa_{r-s+2}, \ldots, \varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r})$ bei gleichen oberen und verschiedenen unteren Indices auch gleiche vorkommen können, mit $f^{(\rho,\sigma)}_{r-s}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ bezeichnet und zur Abkürzung

$$\sum_{s=0}^{s=r} f^{(\rho,\sigma)}_{r-s}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = F^{(\rho,\sigma)}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

gesetzt.

Vereinigt man nun in der Summe

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Big(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\tau)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,.$$

$$.\,F^{(\rho,\sigma)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Big)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\Big(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\tau)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,.$$

$$\sum_{t=0}^{t=s}\Big(\sum_{\varkappa_{r-s+1},\varkappa_{r-s+2},\ldots,\varkappa_{r-t}} f^{(\rho)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_{r-t}})\,.$$

$$.\,f^{(\sigma)}_{\varkappa_{r-t+1},\varkappa_{r-t+2},\ldots,\varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-t+1}},a_{\varkappa_{r-t+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})$$

alle Glieder, in denen $t=t_0$ und $\varkappa_{r-t_0+1},\varkappa_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa_r$ das bestimmte Werthsystem $\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r$ ist, so erhält man für das Aggregat derselben den Ausdruck

$$f^{(\sigma)}_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r}(a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1}},a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2}},\ldots,a_{\varkappa^{(0)}_r})\,.$$

$$\sum_{s=0}^{s=r-t_0}\Big(\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-t_0-s}} f^{(\tau)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-t_0-s}}(a_{\lambda_1},a_{\lambda_2},\ldots,a_{\lambda_{r-t_0-s}})$$

$$.\,f^{(\rho)}_{\lambda_{r-t_0-s+1},\lambda_{r-t_0-s+2},\ldots,\lambda_{r-t_0}}(a_{\lambda_{r-t_0-s+1}},a_{\lambda_{r-t_0-s+2}},\ldots,a_{r-t_0})\Big),$$

wo $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{r-t_0}$ eine Permutation der von $\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r$ verschiedenen Elemente der Reihe $1,2,\ldots,r$ ist, oder also

$$f^{(\sigma)}_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r}(a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1}},a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2}},\ldots,a_{\varkappa^{(0)}_r})\,.$$

$$.\,F^{(\rho,\tau)}(a_{\lambda'_1},a_{\lambda'_2},\ldots,a_{\lambda'_{r-t_0}}),$$

wenn mit $\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_{r-t_0}$ die natürliche Anordnung der Zahlen $\lambda_\varkappa$ $(\varkappa=1,2,\ldots,r-t_0)$ bezeichnet wird. Da sich auf demselben Wege bei der Ordnung nach den Functionen

$$(f^{(\rho)}_{\varkappa_{r-t+1},\varkappa_{r-t+2},\ldots,\varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-t+1}},a_{\varkappa_{r-t+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})$$

der Ausdruck

$$f^{(\rho)}_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1},\varkappa^{(0)}_{r-t_0+2},\ldots,\varkappa^{(0)}_r}(a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0+1}},a_{\varkappa^{(0)}_{r-t_0-2}},\ldots,a_{\varkappa^{(0)}_r})\,.$$

$$.\,F^{(\sigma,\tau)}(a_{\lambda'_1},a_{\lambda'_2},\ldots,a_{\lambda'_{r-t_0}})$$

ergibt, so erhält man schliesslich die Gleichung

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\tau)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,.$$

$$.\,F^{(\rho,\sigma)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Bigg)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\sigma)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\,.$$

$$.\,F^{(\rho,\tau)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Bigg)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\rho)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})$$

$$.\,F^{(\sigma,\tau)}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Bigg), \qquad \mathrm{I)}$$

durch welche folgender Satz ausgesprochen wird:

Ist $\varkappa_{\alpha_1},\varkappa_{\alpha_2},\ldots,\varkappa_{\alpha_\beta}$ eine der Combinationen β^{ter} Classe ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots, r$, in welcher die Elemente in der natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen und sind

$$f^{(\rho)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_\lambda}),\ f^{(\sigma)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_\lambda}),$$
$$f^{(\tau)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_\lambda})$$

willkürliche Functionen von den angeführten λ der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, von denen einige oder auch alle zu demselben oberen Index gehörigen gleich sein können, so ist die Summe

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}} f^{(\rho)}_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})$$

$$\Bigg(\sum_{t=0}^{t=s}\Bigg(\sum_{\varkappa_{r-s+1},\varkappa_{r-s+2},\ldots,\varkappa_{r-t}}$$

$$f^{(\rho)}_{\varkappa_{r-s+1},\varkappa_{r-s+2},\ldots,\varkappa_{r-t}}(a_{\varkappa_{r-s+1}},a_{\varkappa_{r-s+2}},\ldots,a_{\varkappa_{r-t}})\,.$$

$$.\,f^{(\tau)}_{\varkappa_{r-t+1},\varkappa_{r-t+2},\ldots,\varkappa_r}(a_{\varkappa_{r-t+1}},a_{\varkappa_{r-t+2}},\ldots,a_{\varkappa_r})\Bigg)\Bigg)\Bigg),$$

in welcher die auf die Zahlen $\varkappa_\lambda$ bezüglichen Summationen über alle genannten Combinationen der bezüglichen Classe auszudehnen sind und $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_r$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ ist, eine symmetrische Function von ρ, σ, τ.

Man erkennt sofort, dass man auf demselben Wege auch allgemein zeigen kann, dass

$$\sum_{s_1=0}^{s_1=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s_1}} f^{(\rho_1)}_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s_1}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s_1}}).$$

$$\Bigg(\sum_{s_2=0}^{s_2=s_1}\Bigg(\sum_{\varkappa_{r-s_1+1}, \varkappa_{r-s_1+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_2}} f^{(\rho_2)}_{\varkappa_{r-s_1+1}, \varkappa_{r-s_1+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_2}}(a_{\varkappa_{r-s_1+1}}, a_{\varkappa_{r-s_1+2}}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s_2}})$$

$$\Bigg(\sum_{s_3=0}^{s_3=s_2}\Bigg(\sum_{\varkappa_{r-s_2+1}, \varkappa_{r-s_2+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_3}} f^{(\rho_3)}_{\varkappa_{r-s_2+1}, \varkappa_{r-s_2+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_3}}(a_{\varkappa_{r-s_2+1}}, a_{\varkappa_{r-s_2+2}}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s_3}}).$$

$$\Bigg(\sum_{s_{\tau-1}=0}^{s_{\tau-1}=s_{\tau-2}}\Bigg(\sum_{\varkappa_{r-s_{\tau-2}+1}, \varkappa_{r-s_{\tau-2}+2}, \ldots, \varkappa_{r-s_{\tau-1}}}$$

$$f^{(\rho_{\tau-1})}(a_{\varkappa_{r-s_{\tau-2}+1}}, a_{\varkappa_{r-s_{\tau-2}+2}}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s_{\tau+1}}})\, f^{(\rho_\tau)}(a_{\varkappa_{r-s_{\tau-1}+1}}, a_{\varkappa_{r-s_{\tau-1}+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r})\Bigg)\Bigg)\Bigg). \quad \Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

eine symmetrische Function von $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_\tau$ ist.

Die in den vorstehenden Zeilen abgeleitete allgemeine Formel soll nun auf einige besonders interessante specielle Fälle angewendet werden.

α) Die Function $\mu(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_\lambda})$ sei gleich $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl λ der Argumente gerade oder ungerade ist. Aus dieser Definition folgen sofort die Beziehungen:

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \mu(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{r-s}\binom{r}{r-s}$$

$$= \begin{cases} 1 & (r=0) \\ 0 & (r>0) \end{cases}$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \mu(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\, \mu(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r})\Bigg) =$$

$$= (-2)^r$$

und daher folgt aus 1) der specielle Satz:

Ist $\varkappa_{\alpha_1}, \varkappa_{\alpha_2}, \ldots, \varkappa_{\alpha_\beta}$ irgend eine der Combinationen β^{ter} Classe ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots, r$, in welcher die Zahlen in der natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen und sind $f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_\lambda})$ willkürliche Functionen von den angeführten λ unter den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, welche zum Theile oder sämmtlich gleich sein können, setzt man ferner

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg) = F(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-1)^s f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg) =$$

$$= \bar{F}(a_1, a_2, \ldots, a_r),$$

wo die auf die Zahlen $\varkappa_\lambda$ bezüglichen Summationen über alle Combinationen $(r-s)^{\text{ter}}$ Classe der genannten Art auszudehnen sind, so bestehen die Relationen

$$f_{1,2,\ldots,r}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = \sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-1)^s$$

$$. F(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg) = \sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \bar{F}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-2)^s f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg) =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=r} \Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-1)^s \bar{F}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \Bigg).$$

Der erste Theil der vorletzten Relation ist die von den nicht unumgänglich nothwendigen Voraussetzungen befreite Baker'sche Formel.

β) Es sei

$$\omega(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_\lambda}) = \varkappa^\lambda,$$

alsdann wird

$$\sum_{s=0}^{s=r} \Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \omega(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \Bigg) = (\varkappa+1)^r$$

$$\sum_{s=0}^{s=r} \Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \omega(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}})\, \mu(a_{\varkappa_{r-s+1}}, a_{\varkappa_{r-s+2}}, \ldots, a_{\varkappa_r}) \Bigg) =$$
$$= (\varkappa-1)^r$$

und daher folgt aus I) das specielle Theorem:

Ist $\varkappa_{\alpha_1}, \varkappa_{\alpha_2}, \ldots, \varkappa_{\alpha_\beta}$ irgend eine der Combinationen β^{ter} Classe ohne Wiederholung der Elemente $1, 2, \ldots r$, in welcher die Zahlen in der natürlichen Ordnung aufeinanderfolgen, und sind $f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\lambda}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_\lambda})$ willkürliche Functionen von den angeführten λ unter den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_r$, welche zum Theile oder sämmtlich gleich sein können, setzt man ferner

$$\sum_{s=0}^{s=r} \Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \Bigg) = F(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r} \Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} (-1)^s f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \Bigg) =$$
$$= \bar{F}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r} \Bigg(\sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}} \varkappa^s f_{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1}, a_{\varkappa_2}, \ldots, a_{\varkappa_{r-s}}) \Bigg) =$$
$$= F_1(a_1, a_2, \ldots, a_r)$$

wo die auf die Zahlen $\varkappa_\lambda$ bezüglichen Summationen über alle Combinationen $(r-s)^{\text{ter}}$ Classe der genannten Art auszudehnen sind, so bestehen die Relationen

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(\varkappa+1)^s f_{\varkappa_1,\ldots}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}\varkappa^s F(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}F_1(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg)$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(\varkappa-1)^s f_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\varkappa^s\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}\bar{F}(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\Bigg(\sum_{\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_{r-s}}F_1(a_{\varkappa_1},a_{\varkappa_2},\ldots,a_{\varkappa_{r-s}})\Bigg).$$

§. 2. Die willkürliche Function $f(a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_r^{\nu_r})$ der r Grössen $a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_r^{\nu_r}$ möge kurz mit $f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ bezeichnet werden; es seien ferner die ganzen Zahlen

$\nu_\lambda = \rho_\lambda \alpha + \varepsilon_\lambda$ $\quad (0 \leqq \varepsilon_\lambda \leqq \alpha - 1;\ \lambda = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha$ ganzzahlig, positiv)

und es werde

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1,\lambda_2=\rho_2,\ldots,\lambda_r=\rho_r} f^{(\rho)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r).$$

$$.f^{(\sigma)}_{\rho_1-\lambda_1\alpha,\,\rho_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\,\rho_r-\lambda_r\alpha}(\nu_1-\lambda_1\alpha,\nu_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\nu_r-\lambda_r\alpha)$$

$$=F_\alpha^{(\rho,\sigma)}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$$

gesetzt, wo $f^{(\rho)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$, $f^{(\sigma)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ und $f^{(\tau)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$, welche Functionen sofort benützt werden sollen, willkürliche Functionen der Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$ vorstellen, von denen selbstverständlich mehrere oder alle zu denselben oberen und verschiedenen unteren Indexsystemen gehörige gleich sein können.

Vereinigt man nun in der Summe

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1,\,\lambda_2=\rho_2,\ldots} f^{(\sigma)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,F^{(\rho,\sigma)}_{\alpha}(\nu_1-\lambda_1\alpha,\nu_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\nu_r-\lambda_r\alpha)=$$

$$=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r;\,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r=0}^{\lambda_1=\rho_1,\,\lambda_2=\rho_2,\ldots,\lambda_r=\rho_r;\,\mu_1=\rho_1-\lambda_1,\,\mu_2=\rho_2-\lambda_2,\ldots,\mu_r=\rho_r-\lambda_r} f^{(\sigma)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,f^{(\rho)}_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r)\,.$$

$$\cdot f^{(\rho)}_{\nu_1-(\lambda_1+\mu_1)\alpha,\,\nu_2-(\lambda_2+\mu_2)\alpha,\ldots,\nu_r-(\lambda_r+\mu_r)\alpha}(\nu_1-(\lambda_1+\mu_1)\alpha,\nu_2-(\lambda_2+\mu_2)\alpha,\ldots,\nu_r-(\lambda_r+\mu_r)\alpha) \qquad 1)$$

alle Glieder, in denen $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r$ das bestimmte Werthsystem $\mu_1^{(0)},\mu_2^{(0)},\ldots,\mu_r^{(0)}$ ist, so erhält man für das Aggregat derselben den Ausdruck

$$f^{(\rho)}_{\mu_1^{(0)},\mu_2^{(0)},\ldots,\mu_r^{(0)}}(\mu_1^{(0)},\mu_2^{(0)},\ldots,\mu_r^{(0)})\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1-\mu_1^{(0)},\,\lambda_2=\rho_2-\mu_2^{(0)},\ldots,\lambda_r=\rho_r-\mu_r^{(0)}} f^{(\sigma)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,.$$

$$\cdot f^{(\sigma)}_{\nu_1-(\lambda_1+\mu_1^{(0)})\alpha,\,\nu_2-(\lambda_2+\mu_2^{(0)})\alpha,\ldots,\nu_r-(\lambda_r+\mu_r^{(0)})\alpha}(\nu_1-(\lambda_1+\mu_1^{(0)})\alpha,\nu_2-(\lambda_2+\mu_2^{(0)})\alpha,\ldots,\nu_r-(\lambda_r+\mu_r^{(0)})\alpha)=$$

$$=f^{(\rho)}_{\mu_1^{(0)},\mu_2^{(0)},\ldots,\mu_r^{(0)}}(\mu_1^{(0)},\mu_2^{(0)},\ldots,\mu_r^{(0)})\,F^{(\tau,\sigma)}_{\alpha}(\nu_1-\mu_1^{(0)}\alpha,\nu_2-\mu_2^{(0)}\alpha,\ldots,\nu_r-\mu_r^{(0)}\alpha)$$

und daher hat man die Relation

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1,\,\lambda_2=\rho_2,\ldots,\lambda_r=\rho_r} f^{(\sigma)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,F^{(\rho,\sigma)}_{\alpha}(\nu_1-\lambda_1\alpha,\nu_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\nu_r-\lambda_r\alpha)=$$

$$=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1,\,\lambda_2=\rho_2,\ldots,\lambda_r=\rho_r} f^{(\rho)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,F^{(\tau,\sigma)}_{\alpha}(\nu_1-\lambda_1\alpha,\nu_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\nu_r-\lambda_r\alpha), \qquad \mathrm{II})$$

welche zeigt, dass die auf der linken Seite derselben stehende Summe eine symmetrische Function von und τ ist.

Vereinigt man ferner in 1) alle Glieder, in denen $\lambda_1+\mu_1$, $\lambda_2+\mu_2, \ldots, \lambda_r+\mu_r$ das bestimmte Werthsystem $\rho_1-\beta_1^{(0)}, \rho_2-\beta_2^{(0)}$, ., $\rho_r-\beta_r^{(0)}$ ist, so ergibt sich für deren Aggregat der Ausdruck

$$f^{(\sigma)}_{\beta_1^{(0)}\alpha+\varepsilon_1, \beta_2^{(0)}\alpha+\varepsilon_2, \ldots, \beta_r^{(0)}\alpha+\varepsilon_r}(\beta_1^{(0)}\alpha+\varepsilon_1, \beta_2^{(0)}\alpha+\varepsilon_2, . \; ., \beta_r^{(0)}\alpha+\varepsilon_r) .$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1-\beta_1^{(0)}, \lambda_2=\rho_2-\beta_2^{(0)}, \ldots, \lambda_r=\rho_r-\beta_r^{(0)}} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$f_{\rho_1-\beta_1^{(0)}-\lambda_1, \rho_2-\beta_2^{(0)}-\lambda_2, \ldots, \rho_r-\beta_r^{(0)}-\lambda_r}(\rho_1-\beta_1^{(0)}-\lambda_1, \rho_2-\beta_2^{(0)}-\lambda_2, . \; ., \rho_r-\beta_r^{(0)}-\lambda_r) =$$

$$= f^{(\sigma)}_{\beta_1^{(0)}\alpha+\varepsilon_1, \beta_2^{(0)}\alpha+\varepsilon_2, \ldots, \beta_r^{(0)}\alpha+\varepsilon_r}(\beta_1^{(0)}\alpha+\varepsilon_1, \beta_2^{(0)}\alpha+\varepsilon_2, . \; ., \beta_r^{(0)}\alpha+\varepsilon_r) .$$

$$. F_1^{(\tau,\rho)}(\rho_1-\beta_1^{(0)}, \rho_2-\beta_2^{(0)}, . \; ., \rho_r-\beta_r^{(0)})$$

und daher hat man die Relation

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1, \lambda_2=\rho_2, \ldots, \lambda_r=\rho_r} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, . \; ., \lambda_r) .$$

$$. F_\alpha^{(\rho,\sigma)}(\nu_1-\lambda_1\alpha, \nu_2-\lambda_2\alpha, . \; ., \nu_r-\lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1, \lambda_2=\rho_2, \ldots, \lambda_r=\rho_r}$$

$$f^{(\sigma)}_{\alpha\lambda_1+\varepsilon_1, \alpha\lambda_2+\varepsilon_2, \ldots, \alpha\lambda_r+\varepsilon_r}(\alpha\lambda_1+\varepsilon_1, \alpha\lambda_2+\varepsilon_2, . \; ., \alpha\lambda_r+\varepsilon_r) .$$

$$. F_1^{(\tau,\rho)}(\rho_1-\lambda_1, \rho_2-\lambda_2, \ldots, \rho_r-\lambda_r). \qquad \text{III)}$$

Ist speciell $\alpha = 1$, so hat man das Theorem:

Sind $f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$, $f^{(\sigma)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \quad, a_r^{\lambda_r})$, $f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, . \; ., a_r^{\lambda_r})$ $(\lambda_\varkappa = 1, 2, . \; ., \nu_\varkappa;\ \varkappa = 1, 2, . \; ., r)$ willkürliche Functionen der Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, . \; ., a_r^{\lambda_r}$, unter denen auch mehrere oder alle zu demselben oberen und verschiedenen unteren Indexsystemen gehörige gleich sein können, bezeichnet man ferner die Function $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$ kurz mit $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, . \; ., \lambda_r)$ und setzt endlich

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, . \; ., \lambda_r) .$$

$$. f^{(\sigma)}_{\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, . \; ., \nu_r-\lambda_r) = F_1^{(\rho,\sigma)}(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_r),$$

wo $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ beliebige ganze positive Zahlen sind, so ist die Summe

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\nu_1, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \, . \, F_1^{(\rho, \sigma)}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)$$

eine symmetrische Function der Indices ρ, σ, τ.

Nimmt man speciell für $a_1, a_2, \ldots a_r$ die Primtheiler $p_1, p_2, \ldots, p_r$ der ganzen Zahl $n = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_r^{\nu_r}$, sind ferner die Functionen $f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, $f^{(\sigma)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$, $f^{(\tau)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ willkürliche Functionen des Productes $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_r^{\lambda_r}$ und haben endlich alle Functionen mit demselben oberen Index bei beliebigem unteren Indexsystem denselben Werth $f^{(\rho)}(x)$, beziehungsweise $f^{(\sigma)}(x)$, beziehungsweise $f^{(\tau)}(x)$, so entsteht aus II) und III) die zahlentheoretische Relation

$$\sum_n f^{(\rho)}(\Delta_\alpha) \left(\sum_{\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha}} f^{(\sigma)}(\Delta'_\alpha) f^{(\tau)}\left(\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha \Delta'^\alpha_\alpha} \right) \right) =$$

$$= \sum_n f^{(\sigma)}(\Delta_\alpha) \left(\sum_{\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha}} f^{(\rho)}(\Delta'_\alpha) f^{(\tau)}\left(\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha \Delta'^\alpha_\alpha} \right) \right) =$$

$$= \sum_n f^{(\tau)}\left(\frac{n}{\Delta_\alpha^\alpha} \right) \left(\sum_{\Delta_\alpha} f^{(\rho)}(d) f^{(\sigma)}\left(\frac{\Delta_\alpha}{d} \right) \right),$$

in welcher die Summation nach Δ_α^α, beziehungsweise Δ'^α_α über alle Theiler der an das bezügliche Summenzeichen angehängten Zahl auszudehnen ist, welche α^{te} Potenzen sind, während die auf d bezügliche sich über alle Theiler von Δ_α erstreckt. Diese bemerkenswerthe Gleichung hat Herr Egorof[1] in einer im 16. Bande der Schriften der mathematischen Gesellschaft in Moskau enthaltenen zahlentheoretischen Abhandlung aus dem von den Herren Cesaro und Bugajef schon früher abgeleiteten speciellen Fall derselben

---

[1] Matematiczki Swornik, 16. Bd., S. 236—255. (In russischer Sprache.)

$$\sum_{n} f^{(\rho)}(d)\left(\sum_{\frac{n}{d}} f^{(\sigma)}(d')f^{(\tau)}\left(\frac{n}{d}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n} f^{(\sigma)}(d)\left(\sum_{\frac{n}{d}} f^{(\rho)}(d')f^{(\tau)}\left(\frac{n}{d'}\right)\right)=$$

$$=\sum_{n} f^{(\tau)}(d)\left(\sum_{\frac{n}{d}} f^{(\rho)}(d')f^{(\sigma)}\left(\frac{n}{d}\right)\right),$$

wo die Summationen sich auf alle Theiler der an das betreffende Summenzeichen angehängten Zahl beziehen, ermittelt.

Die aufgestellten allgemeinen Formeln sollen nun auf einige interessante specielle Fälle angewendet werden.

α) Die Function $\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ der Grössen $a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_r^{\nu_r}$ habe den Werth 0, wenn auch nur einer der ganzzahligen, nicht negativen Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ grösser als 1 ist, und sie sei gleich $(-1)^{\tilde{\omega}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)}$ in allen anderen Fällen, wo $\tilde{\omega}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$ gleich der Anzahl derjenigen unter den Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ ist, welche grösser als Null sind. Aus dieser Definition folgen sofort die Beziehungen

$$\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\lambda-\varkappa}, 0, 0, \ldots, 0, \nu_\lambda, \nu_{\lambda+1}, \ldots, \nu_r) =$$
$$= \mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\lambda-\varkappa}, \nu_\lambda, \nu_{\lambda+1}, \ldots, \nu_r)$$

$$\mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \mu(\nu_1)\,\mu(\nu_2) \ldots \mu(\nu_r)$$

und demnach ist die r-fache Summe

$$\mu_\alpha(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\rho_1, \lambda_2=\rho_2, \ldots, \lambda_r=\rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

$$= \prod_{\varkappa=1}^{r} \{1 + \mu^{\eta_\varkappa}(1)\},$$

wo $\eta_\varkappa$ gleich 0 oder 1 ist, je nachdem $\rho_\varkappa$ gleich Null oder grösser als Null ist; dieselbe hat also den Werth 0, wenn auch nur eine der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ $\alpha-1$ überschreitet, während sie in allen anderen Fällen gleich 1 ist. Nimmt man speciell $\alpha = 1$, so ersieht man, dass die Summe

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \dots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

stets gleich Null ist, ausser wenn sämmtliche Zahlen ($\varkappa = 1, 2, \dots, r$) den Werth 0 haben, in welchem Falle sie gleich 1 wird. Die angegebene Definition der Function $\mu_\alpha(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$ zeigt auch, dass

$$\mu_\alpha(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r) = \mu_\alpha(\nu_1)\mu_\alpha(\nu_2) \dots \mu_\alpha(\nu_r)$$

ist.

Berücksichtigt man ferner, dass

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma} \mu(\nu_\sigma - \lambda_\sigma \alpha)$$

den Werth $+1$, -1 oder 0 besitzt, je nachdem ν_σ die Form $\rho_\sigma \alpha$ $\rho_\sigma \alpha + 1$ oder $\rho_\sigma \alpha + \varepsilon$ ($\varepsilon > 1$) hat, so erkennt man leicht, dass die durch die Summe

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \dots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\nu_1 - \lambda_1 \alpha, \nu_2 - \lambda_2 \alpha, \dots \nu_r - \lambda_r \alpha)$$

definirte Function $\lambda_\alpha(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$ gleich Null ist, wenn auch nur eine der Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \dots, r$) nach dem Modul α einer von 0 oder 1 verschiedenen Zahl congruent ist, und den Werth $(-1)^\tau$ in allen anderen Fällen hat, wenn τ die Anzahl der Zahlen $\nu_\varkappa$ von der zuletzt genannten Form ist. Hieraus folgt sofort, dass

$$\lambda_\alpha(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r) = \lambda_\alpha(\nu_1)\lambda_\alpha(\nu_2) \dots \lambda_\alpha(\nu_r)$$

ist.

Setzt man nun in II) und III) speciell

$f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = 1;\ \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ (für jedes Werthsystem $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$),

$f^{(\sigma)}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) = \mu(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r);\ 1$,

so wird

$$F^{(\rho, \sigma)}_\alpha(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r) = \lambda_\alpha(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r);\ \mu_\alpha(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r)$$

und man erhält daher das Theorem:

Sind $f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2, \ldots, a_r^{\lambda_r})$ willkürliche Functionen der Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$, welche selbstverständlich auch zum Theile oder in ihrer Gesammtheit gleich sein können, bezeichnet man dieselben ferner zur Abkürzung mit $f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ und setzt

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \sigma_1, \lambda_2 = \sigma_2, \ldots, \lambda_r = \sigma_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\sigma_2}{\alpha}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\sigma_r}{\alpha}\right]} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . \mu(\sigma_1 - \lambda_1\alpha, \sigma_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \sigma_r - \lambda_r\alpha) = \overline{F}_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

so bestehen die Relationen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . \lambda_\alpha(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \overline{\overline{F}}_\alpha(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \prod_{\lambda=1}^{r} \mu(\varepsilon_\lambda) F(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r) (\nu_\lambda = \alpha\rho_\lambda + \varepsilon_\lambda),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . \mu_\alpha(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) F(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \overline{F}_1(\rho_1 - \lambda_1, \rho_2 - \lambda_2, \ldots, \rho_r - \lambda_r),$$

und speciell für $\alpha = 1$

$$.., _{\nu_r}(\nu_1, \nu_2, . \;\; ., \nu_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1,\, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) F(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1,\, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \overline{F}_1(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \;\; ., \nu_r - \lambda_r),$$

eine Gleichung, deren erster Theil das Analogon der Baker-schen Formel im Gebiete der Relationen zweiter Kategorie bildet.

β) Auf Grund der bisherigen Erörterungen hat man die Gleichungen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1,\, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, . \;\; ., \lambda_r)\, \mu(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \;\; . ., \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\, \mu(\nu_\sigma - \lambda_\sigma),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1,\, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda_\alpha(\lambda_\sigma),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1,\, \lambda_2 = \nu_2, \;\; \cdot = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, . \;\; ., \lambda_r) \,.$$

$$. \mu_\alpha(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, . . \;, \nu_r - \lambda_r) = \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\, \mu_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1,\, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, . \;\; ., \lambda_r) \,.$$

$$. \lambda_\alpha(\nu_1 - \lambda_1 \alpha, \nu_2 - \lambda_2 \alpha, . \;\; ., \nu_r - \lambda_r \alpha) = \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) \lambda_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma \alpha),$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\lambda_r=\nu_r} \mu_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r).$$

$$.\lambda_\alpha(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r) = \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu_\alpha(\lambda_\sigma)\lambda_\alpha(\nu_\sigma-\lambda_\sigma),$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1,\lambda_2=\rho_2,\ldots,\lambda_r=\rho_r} \mu_\alpha(\nu_1-\lambda_1\alpha,\nu_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\nu_r-\lambda_r\alpha) =$$

$$= \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\rho_\sigma} \mu_\alpha(\nu_\sigma-\lambda_\sigma\alpha)$$

Nun ist aber

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\mu(\nu_\sigma-\lambda_\sigma) = \begin{cases} 0 & (\nu_\sigma > 2) \\ 1 & (\nu_\sigma = 2, 0), \\ -2 & (\nu_\sigma = 1) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\mu_\alpha(\nu_\sigma-\lambda_\sigma) = \mu(\rho_\sigma(\rho_\sigma-1)\alpha+\varepsilon_\sigma+1)$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \lambda_\alpha(\lambda_\sigma) = \begin{cases} 1 & (\nu_\sigma = \rho_\sigma\alpha) \\ 0 & (\nu_\sigma = \rho_\sigma\alpha+\varepsilon_\sigma,\ \varepsilon_\sigma > 0) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\rho_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\lambda_\alpha(\nu_\sigma-\lambda_\sigma\alpha) = \begin{cases} 0 & (\varepsilon_\sigma > 1) \\ (-1)^{\varepsilon_\sigma} \sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\rho_\sigma} \mu(\lambda_\sigma) & (\varepsilon_\sigma \leqq 1), \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu_\alpha(\lambda_\sigma)\lambda_\alpha(\nu_\sigma-\lambda_\sigma) = \begin{cases} \sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\varepsilon_\sigma} \lambda_\alpha(\lambda_\sigma) & (\nu_\sigma < \alpha) \\ \sum_{\lambda_\sigma=(\rho_\sigma-1)\alpha+\varepsilon_\sigma+1}^{\lambda_\sigma=\rho_\sigma\alpha+\varepsilon_\sigma} \lambda_\alpha(\lambda) & (\rho_\sigma \geqq 1) \end{cases}$$

und daher

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu_\alpha(\lambda_\sigma)\lambda_\alpha(\nu_\sigma-\lambda_\sigma) = \begin{cases} 0 & (\nu_\sigma > 0) \\ 1 & (\nu_\sigma = 0) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \rho_\sigma} \mu_\alpha(\nu_\sigma - \lambda_\sigma \alpha) = \mu_\alpha(\varepsilon_\sigma),$$

$$= 1$$

und demnach hat man die Beziehungen

$$\sum_{\lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, \mu(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \quad \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \begin{cases} 0 \\ (-2)^\tau \end{cases}$$

je nachdem unter den Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) solche vorkommen, welche grösser als 2 sind oder nicht, wenn τ die Anzahl derjenigen unter den genannten Zahlen ist, welche den Werth 1 haben,

$$\sum_{, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem sämmtliche Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) Vielfache von α sind oder nicht,

$$\sum_{\ldots, \lambda_r = 0}^{= \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, \lambda_\alpha(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \mu(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, \mu_\alpha(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \begin{cases} \mu(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r) \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem sämmtliche Zahlen $\nu_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) durch α theilbar sind oder nicht,

$$\sum_{\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\ \lambda_2=\nu_2,\ldots,\ \lambda_r=\nu_r} \mu_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,\lambda_\alpha(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r) = \\ = \begin{cases} 0 & \left(\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=r}\nu_\sigma>0\right) \\ 1 & (\nu_\sigma=0;\ \sigma=1,2,\ldots,r) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\rho_1,\ \lambda_2=\rho_2,\ldots,\ \lambda_r=\rho_r} \mu_\alpha(\nu_1-\lambda_1\alpha,\nu_2-\lambda_2\alpha,\ldots,\nu_r-\lambda_r\alpha) = 1.$$

Setzt man nun in II) und III) speciell der Reihe nach

$$f^{(\rho)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r) = \mu(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\quad 1;\quad \mu(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\\ \mu(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\quad \mu_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\quad 1,$$

$$f^{(\sigma)}_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r) = \mu(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\quad \lambda_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\\ \lambda_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\quad \mu_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\quad \lambda_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r);\\ \mu_\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r),$$

so wird

$$F^{(\rho,\sigma)}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r) = \begin{cases} 0 & (\text{irgend ein } \nu_\varkappa>2); \\ (-2)^\tau & (\nu_\varkappa<3;\ \varkappa=1,2,\ldots,r;\ \tau \text{ Anzahl} \\ & \text{derjenigen } \nu_\varkappa, \text{ welche gleich 1 sind}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & (\varepsilon_\varkappa=0;\ \varkappa=1,2,\ldots,r) \\ 0 & \left(\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=r}\varepsilon_\varkappa>0\right) \end{cases} \qquad \mu(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r);$$

$$\begin{cases} \mu(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_r) & (\varepsilon_\varkappa=0;\ \varkappa=1,2,\ldots,r) \\ 0 & \left(\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=r}\varepsilon_\varkappa>0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & \left(\sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=r}\nu_\sigma>0\right) \\ 1 & (\nu_\sigma=0;\ \sigma=1,2,\ldots,r) \end{cases} \qquad 1$$

und daher hat man das Theorem:

Sind $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$ beliebige Functionen der willkürlichen Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$, welche selbstverständlich auch zum Theile oder in ihrer Gesammtheit gleich sein können, bezeichnet man dieselben ferner zur Abkürzung mit $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ und setzt

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \sigma_1, \lambda_2 = \sigma_2, \ldots, \lambda_r = \sigma_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\sigma_2}{\alpha}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\sigma_r}{\alpha}\right]} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \,.\, \mu(\sigma_1 - \lambda_1\alpha, \sigma_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \sigma_r - \lambda_r\alpha) = \overline{F}_\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\sigma_2}{\alpha}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\sigma_r}{\alpha}\right]} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \,.\, \mu_\beta(\sigma_1 - \lambda_1\alpha, \sigma_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \sigma_r - \lambda_r\alpha) = F_{\alpha,\beta}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\sigma_1}{\alpha}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\sigma_r}{\alpha}\right]} f_{\lambda_1, \lambda_3, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \,.\, \lambda_\beta(\sigma_1 - \lambda_1\alpha, \sigma_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \sigma_r - \lambda_r\alpha) = \overline{F}_{\alpha,\beta}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r),$$

so hat man die Beziehungen

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \varepsilon(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)(-2)^{\tau(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} \,.\, f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\overline{F}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r),$$

wo $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ die Anzahl derjenigen Zahlen $\lambda_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ vorstellt, welche gleich 1 sind, und $\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem unter den genannten Zahlen $\lambda_\varkappa$ welche vorkommen, die 2 überschreiten oder nicht,

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\nu_1}{\beta}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\nu_2}{\beta}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\nu_r}{\beta}\right]} f_{\beta\lambda_1, \beta\lambda_2, \ldots, \beta\lambda_r}(\beta\lambda_1, \beta\lambda_2, \ldots, \beta\lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda_\beta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) F(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \overline{F}_{1, \beta}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r),$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \left[\frac{\nu_1}{\beta}\right], \lambda_2 = \left[\frac{\nu_2}{\beta}\right], \ldots, \lambda_r = \left[\frac{\nu_r}{\beta}\right]}$$

$$f_{\nu_1 - \lambda_1\beta, \nu_2 - \lambda_2\beta, \ldots, \nu_r - \lambda_r\beta}(\nu_1 - \lambda_1\beta, \nu_2 - \lambda_2\beta, \ldots, \nu_r - \lambda_r\beta)\mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) F_{1, \beta}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \overline{F}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r),$$

$$\sum_{\ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$. \mu(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \overline{F}_{\alpha, \alpha}(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha) =$$

$$= \prod_{\varkappa}^{r}{}_{1} \lambda_\alpha(\varepsilon_\varkappa) \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} \overline{F}(\rho_1 - \lambda_1, \rho_2 - \lambda_2, \ldots, \rho_r - \lambda_r),$$

$$\sum_{\lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \ldots, \lambda_r = \rho_r} F_{\alpha, \alpha}(\nu_1 - \lambda_1\alpha, \nu_2 - \lambda_2\alpha, \ldots, \nu_r - \lambda_r\alpha).$$

$$f\qquad(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\nu_1,\, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} \mu_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, \overline{F}_{1,\alpha}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\nu_1,\, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} \lambda_\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, F_{1,\alpha}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r).$$

γ) Die Function $\alpha(a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_r^{\nu_r})$ der willkürlichen Grössen $a_1^{\nu_1}, a_2^{\nu_2}, \ldots, a_r^{\nu_r}$ habe den Werth 0, wenn entweder alle Exponenten $\nu_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \quad r)$ gleich 0 sind, oder auch nur einer derselben grösser als 2 ist, oder endlich wenn mehr als zwei von ihnen die Einheit überschreiten, sie sei gleich $(-1)^{\tilde\omega(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)} f(a_\varkappa)$, wenn $\nu_\varkappa = 2$ und alle anderen Exponenten kleiner als 2 sind, und besitze endlich in allen anderen Fällen den Werth $(-1)^{\tilde\omega(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)+1} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} f(a_{\varkappa_\sigma})$, wenn die Zahlen $\nu_{\varkappa_1}, \nu_{\varkappa_2}, \ldots, \nu_{\varkappa_\tau}$ gleich 1, die übrigen aber gleich Null sind.

Nach dieser Definition ist

$$\sum_{\lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\nu_1,\, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) =$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} f(a_{\varkappa_\sigma}) \left\{ 1 - \binom{\tau-1}{1} + \binom{\tau-1}{2} - \ldots + (-1)^{\tau-1} \right\} +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{\rho=\beta} f(a_{\varkappa_\sigma}) \left\{ -1 + \binom{\tau-\beta}{1} - \binom{\tau-\rho}{2} + \ldots - (-1)^{\tau-\beta} \right\},$$

wenn nur die Zahlen $\nu_{\varkappa_1}, \nu_{\varkappa_2}, \ldots, \nu_{\varkappa_\tau}$ grösser als Null sind und unter diesen $\nu_{\varkappa_1}, \nu_{\varkappa_2}, \ldots, \nu_{\varkappa_\beta}$ die Einheit überschreiten, und daher hat man die Relation

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1=\nu_1,\, \lambda_2=\nu_2, \ldots, \lambda_r=\nu_r} \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \begin{cases} f(a_\varkappa) & (\nu_\varkappa = 1, \nu_\lambda = 0 \quad \lambda \gtrless \varkappa) \\ 0 & \left(\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \nu_\varkappa \gtrless 1\right) \end{cases}$$

Setzt man nun in II) und III)

$$\alpha = 1$$
$$f^{(\rho)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r),$$
$$f^{(\sigma)}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = 1,$$

so wird

$$F^{(\rho,\sigma)}_{\alpha}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \begin{cases} f(a_\varkappa) & (\lambda_\varkappa = 1;\ \lambda_\rho = 0, \rho \gtreqless \varkappa) \\ 0 & \left(\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \lambda_\varkappa \gtreqless 1\right) \end{cases}$$

und daher hat man den Satz:

Sind $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r})$ beliebige Functionen der willkürlichen Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$, welche auch zum Theile oder insgesammt gleich sein können, bezeichnet man dieselben ferner zur Abkürzung mit $f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ und setzt

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = F(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} f_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) . \\ .\,\alpha(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = F_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r),$$

so besteht die Beziehung

$$f_{\nu_1 - 1, \nu_2, \ldots, \nu_r}(\nu_1 - 1, \nu_2, \ldots, \nu_r)\, f(a_1) + \\ + f_{\nu_1, \nu_2 - 1, \nu_3, \ldots, \nu_r}(\nu_1, \nu_2 - 1, \nu_3, \ldots, \nu_r) . \\ .\, f(a_2) + \ldots + f_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r-1}, \nu_r - 1}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r-1}, \nu_r - 1)$$

$$f(a_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

$$.\, F(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} F_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r).$$

δ) Man hat ferner

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)\, 2^{\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} =$$

$$= \prod_{\sigma=1}^{r} \sum_{\lambda_\sigma = 0}^{\lambda_\sigma = \nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma)\, 2^{\tilde{\omega}(\lambda_\sigma)} \qquad (\lambda(m) = \lambda_2(m))$$

$$\sum_{\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ \lambda_r=\nu_r} \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\, 2^{\bar\omega(\nu_1-\lambda_1,\,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\,\nu_r-\lambda_r)} = \\ = \prod_1^r{}_\sigma \sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma)\, 2^{\bar\omega(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)}$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\, 2^{\bar\omega(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)+\bar\omega(\nu_1-\lambda_1,\,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\,\nu_r-\lambda_r)} = \\ = \prod_1^r{}_\sigma \sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma)\, 2^{\bar\omega(\lambda_\sigma)+\bar\omega(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)}$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \mu(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\, 2^{\bar\omega(\nu_1-\lambda_1,\,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\,\nu_r-\lambda_r)} = \\ = \prod_1^r{}_\sigma \sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\, 2^{\bar\omega(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)}$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \mu_2(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,. \\ .\,\lambda(\nu_1-\lambda_1,\,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\,\nu_r-\lambda_r)\, 2^{\bar\omega(\nu_1-\lambda_1,\,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\,\nu_r-\lambda_r)} = \\ = \prod_1^r{}_\sigma \sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu_2(\lambda_\sigma)\,\lambda(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)\, 2^{\bar\omega(\lambda_\sigma+\nu_\sigma)}$$

Nun ist aber

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma)\, 2^{\bar\omega(\lambda_\sigma)} = (-1)^{\nu_\sigma}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma)\, 2^{\bar\omega(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)+\bar\omega(\lambda_\sigma)} = \begin{cases} 0 & (\nu_\sigma > 0) \\ 1 & (\nu_\sigma = 0) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \lambda(\lambda_\sigma)\, 2^{\bar\omega(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)} = 1$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu(\lambda_\sigma)\, 2^{\bar\omega(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)} = \mu_2(\nu_\sigma)$$

$$\sum_{\lambda_\sigma=0}^{\lambda_\sigma=\nu_\sigma} \mu_2(\lambda_\sigma)\,\lambda(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)\,2^{\bar\omega(\nu_\sigma-\lambda_\sigma)} = \mu(\nu_\sigma)$$

und demnach hat man die Beziehungen

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,2^{\bar\omega(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)} = \lambda(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,2^{\bar\omega(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)} = 1$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \lambda(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,2^{\bar\omega(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)+\bar\omega(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \left(\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \nu_\varkappa = 0\right) \\ 0 & \left(\sum\limits_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \nu_\varkappa > 0\right) \end{cases}$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \mu(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,2^{\bar\omega(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)} =$$

$$= \mu_2(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} \mu_2(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)\,.$$

$$.\,\lambda(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)\,2^{\bar\omega(\nu_1-\lambda_1,\nu_2-\lambda_2,\ldots,\nu_r-\lambda_r)} = \mu(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_r),$$

auf Grund deren man aus II) und III) das folgende specielle Theorem ableitet:

Sind $f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, a_r^{\lambda_r})$ beliebige Functionen der willkürlichen Grössen $a_1^{\lambda_1}, a_2^{\lambda_2}, \ldots, a_r^{\lambda_r}$, von denen mehrere oder auch alle zu verschiedenen Indexsystemen gehörige gleich sein können, bezeichnet man dieselben ferner zur Abkürzung mit $f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r)$ und setzt

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r=0}^{\lambda_1=\nu_1,\,\lambda_2=\nu_2,\ldots,\,\lambda_r=\nu_r} f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r) = F(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \, . \, f_{\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) = \bar{F}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} 2^{\bar{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} \, . \, f_{\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) = F'(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) 2^{\bar{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} \, . \, f_{\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) = F_1(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \, . \, f_{\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) = F_2(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$$

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{= \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \, . \, f_{\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) = F_3(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r),$$

so hat man die Relationen

$$\bar{F}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} F_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \, . \, \lambda(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r) 2^{\bar{\omega}(\nu_1-\lambda_1, \nu_2-\lambda_2, \ldots, \nu_r-\lambda_r)} =$$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} F_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$

$$F(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r).$$

$$.F'(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} 2^{\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)}$$
$$.\overline{F}(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots \nu_r - \lambda_r)$$

$$f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} 2^{\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)}$$

$$.F_1(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$
$$.2^{\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} F'(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)$$

$$F_3(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} 2^{\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)}$$

$$.F_2(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$
$$.F'(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r)$$

$$F_2(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \mu_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r).$$

$$.F_1(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 0}^{\lambda_1 = \nu_1, \lambda_2 = \nu_2, \ldots, \lambda_r = \nu_r} \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$$
$$.2^{\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)} F_3(\nu_1 - \lambda_1, \nu_2 - \lambda_2, \ldots, \nu_r - \lambda_r).$$

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Gegenbauer Leopold

Artikel/Article: Das Additionstheorem der Functionen C v n(x). 942-978