Über eine algebraische Theorie der Schaaren nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören

Wilhelm Weiss,

Assistent für Mathematik an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juli 1893.)

Die Arbeit, welche ich mir hiemit der hohen Akademie vorzulegen erlaube, ist eine Fortsetzung der in diesen Sitzungsberichten, Bd. XCIX unter gleichem Titel erschienenen Abhandlung. Es werden in derselben zum erstenmale die Systeme nichtadjungirter Berührungscurven einer algebraischen Curve untersucht, wenn neben den gewöhnlichen auch nur erst die einfachsten höheren Singularitäten, nämlich dreifache Punkte mit getrennten Tangenten, auftreten. Es ist leicht zu sehen und bekannt, dass auch schon hiezu der gegenwärtige Stand der Theorie der Abel'schen Functionen nicht hinreicht, weil das zugehörige Umkehrproblem ein allgemeineres ist. Die Behandlung ist algebraisch, und die Resultate dürften schon desshalb nicht ganz ohne Interesse sein, weil aus ihnen hervorgeht, wie sehr anders diese Systeme von Berührungscurven durch einen dreifachen Punkt beeinflusst werden, als etwa durch drei getrennte Doppelpunkte, welche ja in mancher anderen Hinsicht (Classe, Geschlecht u. s. w.) dem dreifachen Punkte äquivalent sind.

Es sei $f(s, z) = 0$ die Grundcurve und $z = 0$, $s = 0$ ein dreifacher Punkt von f mit getrennten Tangenten

$$f(s, z) \equiv (f_{30} z^3 + f_{31} z^2 s + f_{32} z s^2 + f_{33} s^3) + f_4 + f_5 +$$

$\mathfrak{A}^{(0)}(s, z)$ sei eine Curve, welche den dreifachen Punkt nicht enthält, f in einer Gruppe G_{2Q} berührt (in Q Punkten) und noch in einer Restgruppe G_R schneidet. Das Ziel der folgenden Untersuchung ist dann im Wesentlichen die Bestimmung der Gesammtheit $\mathfrak{A}$ aller Curven gleicher Ordnung und Art wie $\mathfrak{A}^{(0)}$, welche durch G_R gehen.

Es mögen $A^{(0)}(s, z) = 0$; $A(s, z) = 0$ und

$$P(s, z) \equiv \lambda_0 P^{(0)} + \lambda_1 P^{(1)} + \lambda_2 P^{(2)} + \ldots \lambda_2 P^{(q)} = 0$$

dieselbe Bedeutung haben wie in §. 5 der Abhandlung I. Sollen in den Berührungsgruppen von A Curven $\mathfrak{A}$ berühren, so muss nach §. 5, Gleichung 3) die Identität bestehen:

$$\mathfrak{A}^{(0)} P^2 \equiv \mathfrak{A} A^{(0)\,2} + \mathfrak{B} f,$$

welche in der Umgebung von $s = 0$, $z = 0$ die Identität

$$\mathfrak{A}^{(0)} P^2 \equiv \mathfrak{A}'(s, z) A^{(0)\,2} + \mathfrak{B}'(s, z) f$$

zur nothwendigen und hinreichenden Voraussetzung hat.

Da im vorliegenden Falle $\sigma = 0$ ist, tritt die l. c. §. 5 angegebene Vereinfachung ein, so dass die Bedingungsidentität die folgende ist:

$$P^2 \equiv \mathfrak{A}'(s, z) A^{(0)\,2} + \mathfrak{B}'(s, z) f, \qquad 1)$$

$\mathfrak{A}'(s, z)$, $\mathfrak{B}'(s, z)$ sind Potenzreihen.

Zum Bestehen dieser Identität an der Stelle $s = 0$, $z = 0$ sind nach der allgemeinen Theorie durch die Parameter λ von P, $\frac{1}{2} 3 . (3-1) = 3$ Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Soll der vorliegende Specialfall auch durch die Bezeichnung ersichtlich sein, so hat man:

$$(P_2 + P_3 + \ldots)^2 \equiv (\mathfrak{A}'_0 + \mathfrak{A}'_{10} z + \mathfrak{A}'_{11} s + \ldots)(A_2^{(0)} + A_3^{(0)} + \ldots)^2 + \\ + (\mathfrak{B}'_{10} z + \mathfrak{B}'_{11} s + \mathfrak{B}'_{20} z^2 + \mathfrak{B}'_{21} zs + \ldots)(f_3 + f_4 + \ldots). \quad 1)$$

Die drei Bedingungsgleichungen ergeben sich aus:

$$(P_{20} z^2 + P_{21} zs + P_{22} s^2)^2 = \mathfrak{A}'_0 (A_{20}^{(0)} z^2 + A_{21}^{(0)} zs + A_{22}^{(0)} s^2)^2 + \\ + (\mathfrak{B}'_{10} z + \mathfrak{B}'_{10} s)(f_{30} z^3 + f_{31} z^2 s + f_{32} zs^2 + f_{33} s^3) \qquad 2)$$

und

$$2P_2P_3 \equiv (\mathfrak{A}'_{10}z+\mathfrak{A}'_{11}s)A_2^{(0)2}+2\mathfrak{A}'_0A_2^{(0)}A_3^{(0)}+ \\ +(\mathfrak{B}'_{10}z+\mathfrak{B}'_{11}s)(f_{40}z^4+f_{41}z^3s+f_{42}z^2s^2+f_{43}zs^3+f_{44}s^4)+ \\ +(\mathfrak{B}'_{20}z^2+\mathfrak{B}'_{21}zs+\mathfrak{B}'_{22}s^2)(f_{30}z^3+f_{31}z^2s+f_{32}zs^2+f_{33}s^3). \quad 3)$$

Die Gleichung 2) liefert zwei der Bedingungsgleichungen; denn sollen die Constanten $\mathfrak{A}'_0$, $\mathfrak{B}'_{10}$, $\mathfrak{B}'_{11}$ so bestimmt werden können, dass 2) eine Identität wird, so ergeben sich für dieselben durch Coëfficientenvergleichung fünf Gleichungen und also durch Elimination zwei Bedingungen für die Grössen $P_{20}^2 \quad . P_{20}P_{21}$

Beide Gleichungen sind in den Parametern der Schaar P quadratisch, da P_{20}, P_{21}, P_{22} dieselben linear enthalten. Die Identität 3) gibt die letzte Bedingung, da zur Bestimmung der fünf Constanten $\mathfrak{A}'_{10}$, $\mathfrak{A}'_{11}$, $\mathfrak{B}'_{20}$, $\mathfrak{B}'_{21}$, $\mathfrak{B}'_{22}$ sechs lineare Gleichungen vorliegen.

Auch diese Bedingungsgleichung ist in den λ quadratisch, da sie die Producte $P_{20}P_{30}$. linear enthält.

Die Untersuchung dieser drei Bedingungsgleichungen bildet den Kernpunkt der vorliegenden Behandlungsweise der Berührungsschaaren. Die Berührungsgruppen der nichtadjungirten Berührungsschaar $\mathfrak{A}$ sind offenbar zwar specielle, aber doch lineare Schaaren. Gerade diese Schaaren werden auch durch jene Curven P ausgeschnitten, deren Parameter jenen drei Bedingungen genügen. Darum ist a priori einzusehen, dass jede der quadratischen Bedingungsgleichungen in zwei Linearfactoren zerfallen muss, und nur die wirkliche Zerfällung kann als abschliessende Erledigung angesehen werden.

Die beiden aus 2) folgenden Bedingungsgleichungen gestalten sich, sammt ihrer Zerlegung in Linearfactoren, wesentlich einfacher, wenn man die drei Wurzeln der Form:

$$f_{30}z^3+f_{31}z^2s+f_{32}zs^2+f_{33}s^3 = 0$$

einführt. Diese seien w_1, w_2, w_3.

Dann geht 2) über in

$$(P_{20}w_i^2+P_{21}w_i+P_{22})^2 = \mathfrak{A}'_0(A_{20}^{(0)}w_i^2+A_{21}^{(0)}w_i+A_{22}^{(0)}) \\ i = 1, 2, 3.$$

Führt man noch die Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
P_{20} w_i^2 + P_{21} w_i + P_{22} &= P_2(w_i) \\
A_{20}^{(0)} w_i^2 + A_{21}^{(0)} w_i + A_{22}^{(0)} &= A_2^{(0)}(w_i) \\
P_{30} w_i^3 + P_{31} w_i^2 + P_{32} w_i + P_{33} &= P_3(w_i) \\
A_{30}^{(0)} w_i^3 + A_{31}^{(0)} w_i^2 + A_{32}^{(0)} w_i + A_{33}^{(0)} &= A_3^{(0)}(w_i),
\end{aligned}
$$

so erhält man

$$
\begin{aligned}
P_2^2(w_1) &= \mathfrak{A}'_0 (A_2^{(0)}(w_1))^2 \\
P_2^2(w_2) &= \mathfrak{A}'_0 (A_2^{(0)}(w_2))^2 \\
P_2^2(w_3) &= \mathfrak{A}'_0 (A_2^{(0)}(w_3))^2
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich durch Elimination von $\mathfrak{A}'_0$ die beiden Bedingungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
P_2^2(w_1)(A_2^{(0)}(w_2))^2 - P_2^2(w_2)(A_2^{(0)}(w_1))^2 &= 0 \\
P_2^2(w_1)(A_2^{(0)}(w_3))^2 - P_2^2(w_3)(A_2^{(0)}(w_1))^2 &= 0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

welche unmittelbar in Linearfactoren zerlegt werden können und das folgende System bilden:

$$
\begin{aligned}
P_2(w_1) A_2^{(0)}(w_2) + \varepsilon P_2(w_2) A_2^{(0)}(w_1) &= 0 \\
P_2(w_1) A_2^{(0)}(w_3) + \varepsilon' P_2(w_3) A_2^{(0)}(w_1) &= 0 \\
\varepsilon = \pm 1 \qquad \varepsilon' &= \pm 1.
\end{aligned}
\tag{4'}
$$

Die Identität 3), welche die letzte der drei Bedingungsgleichungen liefert, wird bei Einführung der w_i und der obigen Bezeichnungen durch das folgende System ersetzt:

$$
\begin{aligned}
2 P_2(w_i) P_3(w_i) = (\mathfrak{A}'_{10} w_i + \mathfrak{A}'_{11})(A_2^{(0)}(w_i))^2 + 2 \mathfrak{A}'_0 A_2^{(0)}(w_i) A_3^{(0)}(w_i) + \\
+ (\mathfrak{B}'_{10} w_i + \mathfrak{B}'_{11}) f_4(w_i) \\
i = 1, 2, 3,
\end{aligned}
$$

worin

$$
f_4(w_i) = f_{40} w_i^4 + f_{41} w_i^3 + f_{42} w_i^2 + f_{43} w_i + f_{44}.
$$

Die Gleichung selbst folgt unmittelbar durch Elimination von $\mathfrak{A}'_{10}, \mathfrak{A}'_{11}$, wenn man nur noch irgend drei Gleichungen hinzunimmt, die bei der Behandlung der Identität 2) als zur Bestimmung von $\mathfrak{A}'_0 \mathfrak{B}'_{10} \mathfrak{B}'_{11}$ geeignet erkannt sind. So erweist es sich von Vortheil, die folgende Combination von sechs Gleichungen zu benützen:

$$2P_2(w_i)P_3(w_i) = \mathfrak{A}'_{10}w_1(A_2^{(0)}(w_i))^2 + \mathfrak{A}'_{11}(A_2^{(0)}(w_i))^2 + 2\mathfrak{A}'_0 A_2^{(0)}(w_i)A_3^{(0)}(w_i) + \mathfrak{B}'_{10}w_i f_4(w_i) + \mathfrak{B}'_{11}f_4(w_i)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

$$P_2^2(w_1) = \mathfrak{A}'_0(A_2^{(0)}(w_i))^2 \tag{5}$$

$$(P_2(w_1))^2 A_{20}^{(0)2} - P_{20}^2(A_2^{(0)}(w_1))^2 = -\mathfrak{B}'_{10}f_{30}$$

$$(P_2(w_1))^2 A_{22}^{(0)} - P_{22}(A_2^{(0)}(w_1))^2 = -\mathfrak{B}'_{11}f_{33}.$$

Die letzten zwei Gleichungen entstehen, wenn man in der Identität 2), die nach Erfüllung der Bedingungen 4) in der That besteht, einmal $z = 1$, $s = 0$, das anderemal $s = 1$, $z = 0$ setzt.

Die gesuchte letzte Bedingungsgleichung ist dann:

$$\begin{vmatrix} P_2(w_1)P_3(w_1) & w_1(A_2^{(0)}(w_1))^2 & (A_2^{(0)}(w_1))^2 & A_2^{(0)}(w_1)A_3^{(0)}(w_1) & w_1 f_4(w_1) & f_4(w_1) \\ P_2(w_2)P_3(w_2) & w_2(A_2^{(0)}(w_2))^2 & (A_2^{(0)}(w_2))^2 & A_2^{(0)}(w_2)A_3^{(0)}(w_2) & w_2 f_4(w_2) & f_4(w_2) \\ P_2(w_3)P_3(w_3) & w_3(A_2^{(0)}(w_3))^2 & (A_2^{(0)}(w_3))^2 & A_2^{(0)}(w_3)A_3^{(0)}(w_3) & w_3 f_4(w_3) & f_4(w_3) \\ (P_2(w_1))^2 & 0 & 0 & (A_2^{(0)}(w_1))^2 & 0 & 0 \\ (P_2(w_1))^2 A_{20}^{(0)2} - P_{20}^2(A_2^{(0)}(w_1))^2 & 0 & 0 & 0 & -f_{30} & 0 \\ (P_2(w_1))^2 A_{22}^{(0)2} - P_{22}^2(A_2^{(0)}(w_1))^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Die Parameter λ der Schaar P sind nur in der ersten Colonne enthalten, und es ist ersichtlich, dass sie in der Gleichung 6) quadratisch auftreten. Die Zerlegung in zwei Linearfactoren bietet hier schon bedeutende Schwierigkeiten; sie wird aber gerade durch die Auswahl des Gleichungssystems 5) erleichtert. Es lässt sich nämlich mit Hilfe der früheren Relationen die Determinante 6) so umformen, dass die erste Colonne irgend eine der drei Grössen $P_2(w_1)$, $P_2(w_2)$, $P_2(w_3)$ als Factor enthält.

Zunächst folgen aus den Gleichungen 4) die Beziehungen

$$\begin{aligned} P_2(w_2) &= -\varepsilon \frac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)} P_2(w_1) \\ P_2(w_3) &= -\varepsilon' \frac{A_2^{(0)}(w_3)}{A_2^{(0)}(w_1)} P_2(w_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Die beiden letzten Elemente der ersten Colonne:

$$\begin{aligned} &(P_2(w_1))^2 A_{20}^{(0)2} - P_{20}^2 (A_2^{(0)}(w_1))^2 \\ &(P_2(w_1))^2 A_{22}^{(0)2} - P_{22}^2 (A_2^{(0)}(w_1))^2 \end{aligned}$$

enthalten die Parameter λ auch in den Formen P_{20}^2, P_{22}^2. Es ist daher nöthig, diese Grössen durch $P_2(w_1)$, $P_2(w_2)$, $P_2(w_3)$ auszudrücken.

Dazu führen die Gleichungen

$$\begin{aligned} P_{20} w_1^2 + P_{21} w_1 + P_{22} &= P_2(w_1) \\ P_{20} w_2^2 + P_{21} w_2 + P_{22} &= P_2(w_2) \\ P_{20} w_3^2 + P_{21} w_3 + P_{22} &= P_2(w_3). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\Delta = \begin{vmatrix} w_1^2 & w_1 & 1 \\ w_2^2 & w_2 & 1 \\ w_3^2 & w_3 & 1 \end{vmatrix},$$

so folgt aus der Annahme, dass $s=0$, $z=0$ für die Grundcurve $f_3(s,z)+f_4(s,z)+\ldots=0$ ein dreifacher Punkt mit getrennten Tangenten ist, dass Δ von Null verschieden sein muss.

Man hat daher

$$\begin{aligned} \Delta P_{20} &= P_2(w_1)(w_2-w_3)+P_2(w_2)(w_3-w_1)+P_2(w_3)(w_1-w_2) \\ \Delta P_{21} &= P_2(w_1)(w_3^2-1)+P_2(w_2)(w_1^2-1)+P_2(w_3)(w_2^2-1) \\ \Delta P_{22} &= P_2(w_1)w_2w_3(w_2-w_3)+P_2(w_2)w_3w_1(w_3-w_1)+ \\ &\quad + P_2(w_3)w_1w_2(w_1-w_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung von 7) und 8) geht die Bedingungsgleichung 6) in die folgende über:

$$\begin{vmatrix} P_3(w_1) & w_1\,(A_2^{(0)}(w_1))^2 & (A_2^{(0)}(w_1))^2 & A_2^{(0)}(w_1)\,A_3^{(0)}(w_1) & w_1 f_4(w_1) & f_4(w_1) \\ -\varepsilon\,\dfrac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)}\,P_3(w_2) & w_2\,(A_2^{(0)}(w_2))^2 & (A_2^{(0)}(w_2))^2 & A_2^{(0)}(w_2)\,A_3^{(0)}(w_2) & w_2 f_4(w_2) & f_4(w_2) \\ -\varepsilon'\,\dfrac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)}\,P_3(w_3) & w_3\,(A_2^{(0)}(w_3))^2 & (A_2^{(0)}(w_3))^2 & A_2^{(0)}(w_3)\,A_3^{(0)}(w_3) & w_3 f_4(w_3) & f_4(w_3) \\ P_2(w_1) & 0 & 0 & (A_2^{(0)}(w_1))^2 & 0 & 0 \\ P_2(w_1)\,(A_{22}^{(0)2}-(A_2^{(0)}(w_1))^2 M) & 0 & 0 & 0 & -f_{30} & 0 \\ P_2(w_1)\,(A_{20}^{(0)2}-(A_2^{(0)}(w_1))^2 N) & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_{33} \end{vmatrix} . P_2(w_1) = 0, \quad 9)$$

worin

$$M = \frac{1}{\Delta^2}\left\{(w_2-w_3)-\varepsilon\,\frac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)}\,(w_3-w_1)-\varepsilon'\,\frac{A_2^{(0)}(w_3)}{A_2^{(0)}(w_1)}\,(w_1-w_2)\right\}^2$$

$$N = \frac{1}{\Delta^2}\left\{w_2 w_3(w_2-w_3)-\varepsilon\,\frac{A_2^{(0)}(w_2)}{A_2^{(0)}(w_1)}\,w_3 w_1(w_3-w_1)-\varepsilon'\,\frac{A_2^{(0)}(w_3)}{A_2^{(0)}(w_1)}\,w_1 w_2(w_1-w_2)\right\}^2$$

Bezeichnen wir die letzte Determinante mit $\Delta_{\varepsilon\varepsilon'}$, so hat die Gleichung 6) schliesslich die Form:

$$\Delta_{\varepsilon\varepsilon'} . P_2(w_1) = 0. \qquad 10)$$

Die Gleichungen 4′) und 10) stellen die drei gesuchten Bedingungsgleichungen in ihrer endgiltigen Gestalt dar, und es folgen aus ihnen unmittelbar die wesentlichsten Resultate über die hier in Frage kommenden Berührungscurvenschaaren.

Durch diese Gleichungen werden, wie bekannt, aus der Schaar P gerade jene Theilschaaren ausgesondert, in deren freien Schnittpunkten mit f, Curven $\mathfrak{A}$ berühren. Nun gibt es zur Erfüllung der ersten beiden Bedingungen, wegen der Combinationen $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, vier Möglichkeiten und jeder derselben gehört eine und nur eine Möglichkeit zu, der letzten Bedingung $\Delta_{\varepsilon\varepsilon'} = 0$ zu genügen.

Die Bedingung 10) ist aber auch erfüllt, wenn man die Parameter von P der Gleichung $P_2(w_1) = 0$ genügen lässt; dann ist aber vermöge 7) auch $P_2(w_2) = 0$, $P_2(w_3) = 0$ und daher nach 8) auch:

$$P_{20} = P_{21} = P_{22} = 0, \tag{11}$$

so dass die drei Bedingungsgleichungen jetzt die Gleichungen 11) sind, und da dies für jede Combination $\varepsilon\varepsilon'$ eintritt, ist die durch 11) definirte Schaar von P vierfach zählend.

Die Curven der Schaar P, deren Parameter den Gleichungen 11) genügen, haben aber in $s = 0$, $z = 0$ nicht mehr wie alle anderen Curven P einen Doppelpunkt, sondern einen dreifachen Punkt, und es rücken daher von ihren freien Schnittpunkten drei in den dreifachen Punkt.

Da aber in jedem dieser Punkte eine Berührung zwischen f und $\mathfrak{A}$ statthaben muss, so gehören diesen besonderen P-Curven Berührungscurven $\mathfrak{A}$ zu, die in $s = 0$, $z = 0$ einen Doppelpunkt haben. (Drei uneigentliche Berührungen.) Aus dem Vorstehenden folgt:

Jedes System adjungirter Berührungscurven bestimmt vier von einander getrennte Schaaren von Berührungscurven, welche den dreifachen Punkt nicht enthalten und selbst Systeme bilden und überdies noch ein vierfach zählendes uneigentliches System, bei welchem drei Berührungspunkte dadurch in den dreifachen Punkt gerückt sind, dass die sämmtlichen Curven desselben dort einen Doppelpunkt haben.[1]

[1] Es sind für die $\mathfrak{A}$ ebenso drei Bedingungen f drei Stellen berühren wie in $s = 0$, $z = 0$ einen Doppelpunkt zu haben.

Curve 4. Ordnung mit dreifachem Punkt. $p=0$.

Die an vier Stellen berührenden Kegelschnitte bilden vier von einander verschiedene einfach unendliche Systeme; überdies treten die doppelt gezählten Geraden durch den dreifachen Punkt (vierfach zählend) als uneigentliches System auf.

Die überall berührenden Curven dritter Ordnung, welche den dreifachen Punkt nicht enthalten, bilden vier von einander verschiedene Schaaren von der Mannigfaltigkeit 3. Diese Schaaren sind nichtadjungirte Systeme, d. h. die 12 Berührungspunkte zweier Curven einer Schaar sind der volle Schnitt einer weiteren C_3. Überdies tritt bei unserer Bestimmung das System der adjungirten Berührungscurven C_3 vierfach zählend als uneigentliches System auf.

Curve 5. Ordnung mit einem dreifachen Punkt. $p=3$.

Durch drei beliebige Punkte a_1, a_2, a_3 der C_5^3 gibt es $2^{2.3}.4=256$ Curven dritter Ordnung, welche sonst nur noch an sechs Stellen berühren.

Überdies treten die 64 adjungirten Berührungscurven dritter Ordnung, jede vierfach zählend, als uneigentliche Lösungen auf. Dabei können a_1, a_2, a_3 und die 12 Berührungspunkte zweier der obigen Curven niemals auf einer C_3 liegen.

Curve 6. Ordnung mit zwei dreifachen Punkten. $p=4$.

Es sollen die überall berührenden Curven 4. Ordnung bestimmt werden, welche die dreifachen Punkte t und t' nicht enthalten. Nimmt man eine dieser Curven an und ergänzt auf irgend eine Weise ein adjungirtes System, zu welchem sie gehört, so treten in der zugehörigen Schaar P genau acht freie Parameter auf, welche in t und t' je den drei Bedingungen 4) und 10) zu unterwerfen sind.

Bezeichnet man die Combinationen, welche bezüglich t zu eigentlichen oder uneigentlichen Lösungen führen, mit t_e, beziehungsweise t_u und analog t'_e und t'_u, so kann man zusammennehmen: 1. $t_e t'_e$; 2. $t_e t'_u$; 3. $t_u t'_e$; 4. $t_u t'_u$, und es folgt: Die Curve 6. Ordnung mit zwei dreifachen Punkten hat $2^{2.4}.4^2=4096$ Systeme von überall berührenden Curven 4. Ordnung, die keinen der beiden dreifachen Punkte enthalten und die Mannigfaltigkeit 2 haben. Ferner treten 2048 Systeme auf, deren Curven in je einem der dreifachen Punkte adjungirt sind und sonst an neun Stellen berühren. Diese Systeme zählen als uneigentliche Lösungen vierfach. Endlich zählen die 256 Systeme adjungirter Berührungscurven 4. Ordnung 16fach als uneigentliche Lösungen.

Hat endlich allgemein eine Curve vom Geschlechte p etwa d dreifache Punkte, so gibt es durch eine geeignet gewählte Anzahl von festen Punkten auf der Curve im Ganzen: $2^{2p}.4^d$ Systeme von überallberührenden Curven, die keinen der dreifachen Punkte enthalten; $2^{2p}.d.4^{d-1}$ je vierfach zählende uneigentliche Systeme, die nur in je einem der dreifachen Punkte einen Doppelpunkt haben und die anderen $(d-1)$ nicht enthalten; $2^{2p}\binom{d}{2}4^{d-2}$ je 4^2-fach zählende uneigentliche Systeme, die nur in je zweien der dreifachen Punkte adjungirt sind und sonst überall berühren u. s. w., endlich 2^{2p} je 4^d-fach zählende uneigentliche Systeme, die in allen dreifachen Punkten adjungirt sind.

Sind ausser den d dreifachen Punkten noch δ Doppelpunkte vorhanden, so ist, wegen §. 6, Abhandlung I, jede der erhaltenen Anzahlen mit 2^δ zu multipliciren, während sich die Mannigfaltigkeit jedes der Systeme um δ vermindert.

Treten endlich noch r Rückkehrpunkte hinzu, so erleidet die Mannigfaltigkeit jeder der bisher angegebenen Schaaren eine weitere Reduction um r, und eine jede derselben zeigt an den r Rückkehrpunkten folgendes Verhalten:

Die Schaar theilt sich in:

$$1;\ \binom{r}{1};\ \binom{r}{2};\ \binom{r}{3};\ \ldots\ \binom{r}{\nu}$$

Unterschaaren, welche nur je

$$0,\ 1,\ 2,\ 3.\ \ldots\ \nu$$

der Rückkehrpunkte enthalten (vergl. Abhandlung I, §. 6).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Weiss Wilhelm

Artikel/Article: Über eine algebraische Theorie der Schaaren nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören. 1025-1034