Notiz über die zu einer Fundamentaldiscriminante gehörigen Bernoulli'schen Zahlen

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Ich werde in den folgenden Zeilen einige Reihen mit Hilfe der zu einer Fundamentaldiscriminante gehörigen Bernoulli'schen Zahlen summiren und sodann auf Grund eines der angegebenen Resultate den Grenzwerth einer unendlichen Doppelsumme ermitteln, welche in einer gewissen Beziehung zu einem bestimmten Doppelintegrale mit unendlichem Integrationsintervalle steht.

I. Ist Δ eine Fundamentaldiscriminante und $\varepsilon\Delta > 0$, so sind die zu Δ gehörigen Bernoulli'schen Zahlen $B(\lambda, \Delta)$ nach der von Herrn Berger in seiner in den Schriften[1] der schwedischen Akademie der Wissenschaften zu Stockholm veröffentlichten Abhandlung: »Sur une généralisation des nombres et des fonctions de Bernoulli« gegebenen Definition durch die Gleichung

$$\frac{v}{e^{v}-1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} B(\lambda, \Delta)\, v^{\lambda}$$

bestimmt, aus welcher folgt, dass

$$B(\lambda, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, \lambda\right)$$

[1] Bihang till kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. 13. Bandet, Afdelning 1.

ist, wo $\varphi(z, \lambda)$ die gewöhnliche Bernoulli'sche Function ist, also durch die Gleichung

$$v\frac{e^{zv}-1}{e^{v}-1}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\varphi(z,\lambda)\,v^{\lambda}$$

definirt wird, und dass für diese rationalen Zahlen die Recursionsformel

$$B(0,\Delta)=0,\; B(\lambda,\Delta)=\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\lambda}\frac{B_{\lambda-\varkappa}}{\varkappa!\,(\varepsilon\Delta)^{\varkappa}}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^{\varkappa}\quad(\lambda\geqq 1)$$

besteht.

Auf diese Zahlen lässt sich eine grosse Anzahl von Reihen zurückführen, von denen einige hier angegeben werden mögen. Dieselben sind in dem folgenden Theoreme enthalten.

Ist $\mu_{\varkappa}(n)$ gleich 0 oder 1, je nachdem die ganze Zahl n durch eine $\varkappa^{\text{te}}$ Potenz theilbar ist oder nicht,

$\lambda_{\varkappa}(n)$ gleich 0, wenn bei der Darstellung von n als ein Product von Primzahlpotenzen auch nur einer der Exponenten nach dem Modul $\varkappa$ einer von 0 oder 1 verschiedenen Zahl congruent ist, und gleich $(-1)^{\tau}$ in allen anderen Fällen, wo τ die Anzahl der Exponenten von der Form $\sigma\varkappa+1$ vorstellt,

$\mu(n)$ gleich 0, wenn n durch ein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, sonst aber gleich $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl der Primtheiler von n gerade oder ungerade ist,

bezeichnet ferner $\varphi_{\varkappa}(n)$ die Anzahl der Systeme von $\varkappa$ ganzen Zahlen der Intervalles $1\ldots n$, deren grösster gemeinsamer Theiler zu n theilerfremd ist,

$f_{\rho}(n)$ die Anzahl der Zerlegungen der ganzen Zahl n in ρ Factoren,

$\omega(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei theilerfremde Factoren,

$\rho_{\varkappa,\tau}(n)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler von n, welche ρ^{te} Potenzen sind,

so bestehen die Beziehungen

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\mu_{2r}(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}|\Delta|^{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\Gamma\left(2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)+1\right)B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{\varphi_{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}(|\Delta|)(2\pi)^{(2r-1)\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}B_{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\mu_{2r+1}(x)}{x^{2s}}=\frac{B(2s,\Delta)}{(2\pi)^{4rs}B((2r+1)s,\Delta)}\qquad(\varepsilon>0)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\lambda_{2r}(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}(2\pi)^{(2r-1)\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\varphi_{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}(|\Delta|)B_{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|}{|\Delta|^{2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\Gamma\left(2r\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)+1\right)B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\lambda_{2r+1}(x)}{x^{2s}}=\frac{(2\pi)^{4rs}B((2r+1)s,\Delta)}{B(2s,\Delta)}\qquad(\varepsilon>0)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\mu(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}2\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|}{(2\pi)^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\varphi_{2\varkappa}(x)}{x^{2(s+\varkappa)+\frac{1-\varepsilon}{1}}}=\frac{(-1)^{\varkappa}B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{(2\pi)^{2\varkappa}B\left(2(s+\varkappa)+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\lambda_2(x)\,\omega(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{2\varphi_{4s+1-\varepsilon}(|\Delta|)\,B_{4s+1-\varepsilon}}{|\Delta|^{4s-\varepsilon}\,\Gamma(4s+2-\varepsilon)\,B^2\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\omega(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{|\Delta|^{4s-\varepsilon}\,\Gamma(4s+2-\varepsilon)\,B^2\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{2\varphi_{4s+1-\varepsilon}(|\Delta|)\,B_{4s+1-\varepsilon}}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\psi(x^2)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}(2\pi)^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}\,|\Delta|^{4s-\varepsilon}\,\Gamma(4s+2-\varepsilon)\,B^3\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{4\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|\varphi_{4s+1-\varepsilon}(|\Delta|)\,B_{4s+1-\varepsilon}}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\psi^2(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(2\pi)^{4s+1-\varepsilon}\,|\Delta|^{4s-1-\varepsilon}\,\Gamma(4s+2-\varepsilon)\,B^4\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{8\varphi_{4s+1-\varepsilon}(|\Delta|)\,B_{4s+1-\varepsilon}}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f_2(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(2\pi)^{4s+1-\varepsilon}B^2\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{4|\Delta|}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f_3(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(1)^{s+1}(2\pi)^{6s+\frac{3(1-\varepsilon)}{2}}B^3\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{8|(\varepsilon\Delta)^{3/2}|}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f_4(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(2\pi)^{8s+2-2\varepsilon}B^4\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)}{16\Delta^2}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\rho_{2\varkappa,2\tau+1}(x)}{x^{2s+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{\varkappa+\frac{1-\varepsilon}{2}\tau}(2\pi)^{2\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)(\tau+1)}B\left(2s-2\varkappa+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)B\left(\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)(2\tau+1),\Delta\right)}{4|\Delta|}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\rho_{\varkappa,2\tau}}{x^{2s+\varkappa+\frac{1-\varepsilon}{2}}}=\frac{(-1)^{s+1}(2\pi)^{\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)(2\tau+1)+2\tau\varkappa}B\left(2s+\frac{1-\varepsilon}{2},\Delta\right)B_{2\tau\left(\varkappa+2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}\varphi_{2\tau\left(\varkappa+2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}(|\Delta|)}{4\left|\sqrt{\varepsilon\Delta}\right|\Gamma\left(2\tau\left(\varkappa+2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)+1\right)|\Delta|^{2\tau\left(\varkappa+2s+\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}}$$

II. Das eigentliche bestimmte Doppelintegral

$$\int_0^a \int_0^b f(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

ist der Grenzwerth der Doppelsumme

$$\sum_{r=1,\,s=1}^{r=n_1,\,s=n_2} \delta_r\,\delta'_s\,f(x_r^2+y_s^2)$$

bei unbegrenzter, im Übrigen beliebiger Abnahme einer jeden der Zahlen

$$\delta_r = x_{r+1} - x_r;\; \delta'_s = y_{s+1} - y_s,$$

wobei jedoch stets

$$\sum_{r=1}^{r=n_1} \delta_r = a, \quad \sum_{s=1}^{s=n_2} \delta'_s = b$$

bleibt, und es ist das uneigentliche bestimmte Doppelintegral mit unendlichem Integrationsintervalle

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

der Grenzwerth, welchem sich das obige eigentliche Integral bei unbegrenzter Zunahme von a und b nähert. Theilt man das Integrationsgebiet in lauter gleiche Quadrate von der Seite $\sqrt{\varepsilon}$, so handelt es sich demnach bei der Ermittlung des zuletzt genannten uneigentlichen bestimmten Integrales um die Bestimmung des Werthes, welchem sich die Summe

$$\sum_{\lambda,\,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon f\big(\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)\big)$$

bei unbegrenzter Abnahme von ε und unbegrenzter Zunahme von s_1 und s_2 nähert. Es ist nun nicht uninteressant, zu untersuchen, welche Änderung dieser Grenzwerth erfährt, wenn man den ganzen Zahlen λ und μ nicht alle, sondern nur gewisse ausgewählte ganzzahlige Werthe des Bereiches zuertheilt, also gewissermassen eine Reihe von Punkten desselben dadurch ausscheidet, dass man in denselben die Function $f(x, y)$ Null sein lässt. Ein derartiger, unter Benützung eines zahlentheoretischen Satzes bei Voraussetzung der absoluten Convergenz des erwähnten Integrales leicht zu behandelnder Fall ist derjenige in welchem den Zahlen λ und μ nur jene ganzzahligen positiven Werthe beigelegt werden, welche zu einander theilerfremd sind. Da die mittlere Flächendichtigkeit dieser Zahlenpaare nach einem von mir früher abgeleiteten Satze $\frac{6}{\pi^2}$ ist, so ist von vorneherein zu erwarten, dass dadurch die Summe eine Änderung erleiden wird. Unter der eben genannten Voraussetzung findet man auf demselben Wege, welchen ich in der vor Kurzem veröffentlichten Mittheilung:[1] »Eine Anwendung der Zahlentheorie auf die Integralrechnung« eingeschlagen habe die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\,\mu=0}^{\lambda_1=s_1,\,\lambda_2=s_2} \varepsilon f(\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\,\varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) =$$

$$= M\int_0^{\infty} f(y)\,dy, \qquad ([\lambda, 0] = \lambda;\ [0, 0] > 1)$$

wo $[\lambda, \mu]$ der grösste gemeinsame Theiler der zwei ganzen Zahlen λ und μ ist, die zahlentheoretische Function $\varepsilon(\alpha)$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $\alpha \geqq 1$ ist oder nicht und mit $4M$ die mittlere Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer ganzen Zahl durch die binäre quadratische Form (1, 0, 1) bezeichnet wird.

Da die Anzahl der eigentlichen Darstellungen von n als Summe zweier Quadrate bekanntlich gleich der über alle ungeraden Theiler d dieser Zahl erstreckten Summe

$$\sum_d (-1)^{\frac{d-1}{2}} \mu_2(d)$$

ist, so ergibt sich unter Benützung der ersten Gleichung des im vorigen Abschnitte angegebenen Theorems für die Gesammt-

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, Abth. II. a.

anzahl $A(n)$ der genannten Darstellungen aller Zahlen von 1 bis n nach einer leichten Rechnung die Relation

$$A(n) = \frac{2n}{\pi} + a_1 n^{3/4},$$

wo a_1 eine für alle Werthe von n endliche Grösse bezeichnet, und daher hat man schliesslich die Relationen

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon f(\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\,\varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(y)\,dy$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon f(\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\,\varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) = \frac{\pi^2-8}{4\pi}\int_0^\infty f(y)\,dy.$$

Man hat also beispielsweise die Beziehungen

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon^{\rho+1} e^{-a^2\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)^2}(\lambda^2+\mu^2)^{\rho} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\,\varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) =$$

$$= \frac{\Pi\left(\frac{\rho+\nu-1}{2}\right) a_1^{\nu}}{2^{\nu}\pi\,\Pi(\nu)\,a^{\rho+\nu+1}}\, e^{-\frac{a_1^2}{4a^2}}\,\varphi\left(\frac{\nu+1-\rho}{2},\, \nu+1,\, \frac{a_1^2}{4a^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^2 e^{-a^2\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)^2} (\lambda^2+\mu^2) J^\nu(\rho_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, J^\nu(\rho_2\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) = \frac{i^\nu}{a^2\pi} e^{-\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{4a^2}} J^\nu\left(\frac{\rho_1\rho_2}{2a^2 i}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^{\rho+1} e^{-a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} J^\nu(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))(\lambda^2+\mu^2)^\rho\, \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) =$$

$$= \frac{\Pi(\rho+\nu)\, a_1^\nu}{2^{\nu-1}\pi\,\Pi(\nu)\, a^{\rho+\nu+1}} F\left(\frac{\rho+\nu+1}{2},\ \frac{\rho+\nu+2}{2}\ \ \nu+1,\ -\frac{a_1^2}{a^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^{\rho+1} e^{-a^2\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)^2} (\lambda^2+\mu^2)^\rho J^\nu(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) =$$

$$= \frac{(\pi^2-8)\,\Pi\left(\frac{\rho+\nu-1}{2}\right) a_1^\nu}{2^{\nu+3}\pi\,\Pi(\nu)\, a^{\rho+\nu+1}} e^{-\frac{a_1^2}{4a^2}} \varphi\left(\frac{\nu+1-\rho}{2}\right),\ \nu+1,\ \frac{a_1^2}{4a^2}\right)$$

70* $$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^2 e^{-a^2\varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)^2} (\lambda^2+\mu^2) J^\nu(\rho_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, J^\nu(\rho_2\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) =$$

$$= \frac{i^\nu(\pi^2-8)}{8\pi a^2} e^{-\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{4a^2}} J^\nu\left(\frac{\rho_1\rho_2}{2a^2 i}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^{\rho+1} e^{-a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))(\lambda^2+\mu^2)^{\rho}\,\varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right)=$$

$$=\frac{\Pi(\rho+\nu)\,a_1^{\nu}(\pi^2-8)}{2^{\nu+2}\,\pi\,\Pi(\nu)\,a^{\rho+\nu+1}}\,F\left(\frac{\rho+\nu+1}{2},\ \frac{\rho+\nu}{2}+1,\ \nu+1,\ -\frac{a_1^2}{a^2}\right) \qquad (R(a)\geqq J(a_1);\ \nu>1)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)\, e^{-a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, J^{\nu}(a_2\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\,\varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right)=$$

$$=\frac{2(a_1a_2)^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\pi^{3/2}\,\Pi(\nu)\,a^2(a^2+a_1^2+a_2^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,F\left(\frac{2\nu+1}{4},\ \frac{2\nu+3}{4},\ \nu+1,\ \frac{4a_1^2a_2^2}{(a^2+a_1^2+a_2^2)^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\,\mu=s_2} \varepsilon^2(\lambda^2+\mu^2)\, e^{-a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} J^{\nu}(a_1\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\, J^{\nu}(a_2\varepsilon(\lambda^2+\mu^2))\,\varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right)=$$

$$=\frac{(\pi^2-8)(a_1a_2)^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{4}\right)}{4\,\pi^{3/2}\,\Pi(\nu)\,a^2(a^2+a_1^2+a_2^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,F\left(\frac{2\nu+1}{4},\ \frac{2\nu+3}{4}\ \ \nu+1,\ \frac{4a_1^2a_1^2}{(a^2+a_1^2+a_2^2)^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon e^{-2a\varepsilon(\lambda^2\cdot} \left(J^{(0)}\left(ia\varkappa\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)\right)\right)^2 \varepsilon\left(\frac{1}{[\lambda,\mu]}\right) = \frac{2}{\pi^2 a} K$$

$$\lim_{\varepsilon=0,\, s_1=\infty,\, s_2=\infty} \sum_{\lambda,\mu=0}^{\lambda=s_1,\, \mu=s_2} \varepsilon e^{-2a\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)} \left(J^{(0)}\left(ia\varkappa\varepsilon(\lambda^2+\mu^2)\right)\right)^2 \varepsilon\left(\frac{[\lambda,\mu]}{2}\right) = \frac{\pi^2-8}{4a\pi^2} K,$$

wo $\varphi(\alpha, \beta, y)$ die von E. E. Kummer zuerst untersuchte Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{1!\,\beta} y + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\beta(\beta+1)} y^2 + .$$

ist.