Aufstellung eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems

Prof. Dr. **Anton Puchta** in Czernowitz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. October 1893.)

Ich werde in dieser kurzen Abhandlung ein neues dreifach orthogonales Flächensystem aufstellen, wobei vielleicht das Wichtigste darin liegt, dass ich das erwähnte Flächensystem durch sehr einfache Combination zweier bekannter, nur etwas verallgemeinerter Sätze vollständig fertig besass, ehe ich eine Zeile rechnete, und dass sich auch in diesem Falle zeigte, von welchem Vortheile Speculationen über mehrdimensionale Räume für den gewöhnlichen Raum sein können. Der Gedankengang, der mich dabei leitete, war folgender. Der bekannte Dupin'sche Satz behält auch für quadratische Räume höherer Dimension seine Giltigkeit, da formell nur eine Variable mehr in die Rechnung eintritt. Nun bilden, nach einem in der Festschrift für den verstorbenen Prof. Dr. H. Durège[1] von mir erwähnten, gewiss schon länger bekannten Satz, die Hauptkrümmungsrichtungen auf einem Raume R_1 von drei Dimensionen in einem Raume von vier Dimensionen drei zu einander orthogonale Flächensysteme. Sind also $xyzt$ rechtwinkelige Cartesische Punktcoordinaten, so ist auf dem Kugelraume

$$x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$$

ein dreifach orthogonales Flächensystem bekannt. Die stereographische Projection lässt, wie bekannt, auch in höherer Dimension die Winkel unverändert; wird demnach von dem Punkte $x = y = z = 0$, $t = 1$ auf den dreidimensionalen linearen

[1] Freitag und Tempsky, Prag, 1892.

Raum $t+1=0$ das berührte dreifach orthogonale projicirt, so resultirt ein dreifach orthogonales Flächensystem in einem Raume von drei Dimensionen.

Nach diesem Gedankengange werde ich nun zunächst auf dem Kugelraume $x^2+y^2+z^2+t^2=1$ ein dreifach orthogonales Flächensystem aufstellen und von ihm mittelst der Formeln:

$$X=\frac{2x}{1-t},\quad Y=\frac{2y}{1-t},\quad Z=\frac{2z}{1-t}, \tag{I}$$

welche die stereographische Projection vermitteln, zu dem gesuchten dreifach orthogonalen Flächensystem übergehen.

Nachdem so das Flächensystem gefunden ist, werde ich den Beweis für die dreifache Orthogonalität direct führen, wodurch die Behauptung auch für solche Leser klar wird, die Betrachtungen über Räume höherer Dimension vermeiden wollen.

Löst man die vier Gleichungen

$$x^2+y^2+z^2+t^2-1=0 \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u}+\frac{t^2}{d-u}=0 \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a-v}+\frac{y^2}{b-v}+\frac{z^2}{c-v}+\frac{t^2}{d-v}=0 \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a-w}+\frac{y^2}{b-w}+\frac{z^2}{c-w}+\frac{t^2}{d-w}=0 \tag{4}$$

in der Weise auf, dass man aus 2), 3), 4) zunächst die Verhältnisse von x^2, y^2, z^2, t^2 und dann mittelst 1) diese Werthe selbst bestimmt, so erhält man durch einfache Determinantensätze an Stelle von 1) bis 4) leicht das System

$$\frac{x^2}{+(b-d)(c-b)(d-c)f(a)}=\frac{y^2}{-(a-d)(c-a)(d-c)f(b)}$$

$$=\frac{z^2}{+(a-d)(b-a)(d-b)f(c)}=\frac{t^2}{-(a-c)(b-a)(c-b)f(d)}$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}, \tag{II}$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left.\begin{aligned} f(a) &\equiv (a-u)(a-v)(a-w) \\ f(b) &\equiv (b-u)(b-v)(b-w) \\ f(c) &\equiv (c-u)(c-v)(c-w) \\ f(d) &\equiv (d-u)(d-v)(d-w) \end{aligned}\right\} \qquad \text{III)}$$

Entnimmt man II) die Werthe von x, y, t und führt dieselben in I) ein, so erhält man, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{aligned} A &\equiv +(b-d)(c-b)(d-c) \\ B &\equiv -(a-d)(c-a)(d-c) \\ C &\equiv +(a-d)(b-a)(d-b) \\ D &\equiv -(a-c)(b-a)(c-b), \end{aligned}$$

endlich das gesuchte dreifach orthogonale Flächensystem in der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2\sqrt{Af(a)}}{\sqrt{\rho}-\sqrt{Df(d)}} \\ Y &= \frac{2\sqrt{Bf(b)}}{\sqrt{\rho}-\sqrt{Df(d)}} \\ Z &= \frac{2\sqrt{Cf(c)}}{\sqrt{\rho}-\sqrt{Df(d)}} \end{aligned}\right\} \qquad A)$$

worin ist:

$$\rho \equiv Af(a)+Bf(b)+Cf(c)+Df(d)$$

oder auch:

$$\rho \equiv (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

In A) sind a, b, c, d gegebene Constanten und u, v, w veränderliche Parameter, und zwar soll $a > b > c > d$ sein und w, v, u respective — alle Constanten sind reell vorausgesetzt und positiv — in den Intervallen variiren:

$$\begin{aligned} &a \text{ bis } b, \\ &b \text{ bis } c, \\ &c \text{ bis } d. \end{aligned}$$

Dann wird, wie ein blosses Abzählen der Vorzeichen bei den Factoren in II) ergibt, x^2, y^2, z^2, t^2 immer positiv, also X, Y, Z in A) immer reell, und A) stellt ein dreifaches Flächensystem dar.

Die Orthogonalität erkennt man dann leicht in folgender Weise. Sind F_1, F_2, F_3, F_4 die linken Seiten in 1) bis 4), so hat man sofort:

$$\frac{\partial F_h}{\partial x}\frac{\partial F_i}{\partial x}+\frac{\partial F_h}{\partial y}\frac{\partial F_i}{\partial y}+\frac{\partial F_h}{\partial z}\frac{\partial F_i}{\partial z}+\frac{\partial F_h}{\partial t}\frac{\partial F_i}{\partial t}=0,$$

$h, i = 1, 2, 3, 4$, d. h. es ist

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial u}=0 \qquad B)$$

und ebenso

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}=0 \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}=0. \qquad C)$$

Nun folgt aber aus I)

$$\frac{1}{2}(1-t)^2\frac{\partial X}{\partial u}=(1-t)\frac{\partial x}{\partial u}+x\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{1}{2}(1-t)^2\frac{\partial X}{\partial v}=(1-t)\frac{\partial x}{\partial v}+x\frac{\partial t}{\partial v}$$

und hieraus unter Beachtung von 1) einfach

$$\frac{1}{4}(1-t)^2\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

d. h. wegen B) und C)

$$\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}=0 \qquad \sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{dX}{\partial w}=0 \qquad \sum\frac{\partial X}{\partial w}\frac{\partial X}{\partial u}=0,$$

oder A) stellt in der That ein dreifach orthogonales, und zwar unter den über die Constanten gemachten Voraussetzungen reelles Flächensystem dar w. z. b. w.

Selbstverständlich resultiren die einzelnen Flächen des Systems durch u-Cst., respective v-Cst., respective w-Cst.

Das System A) kann, wie eine einfache Rechnung ergibt, auch ersetzt werden durch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{16\,\xi^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-4)^2} &= \frac{Af(a)}{Df(d)} \\ \frac{16\,\eta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-4)^2} &= \frac{Bf(b)}{Df(d)} \\ \frac{16\,\zeta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-4)^2} &= \frac{Cf(c)}{Df(d)} \end{aligned}\right\} \qquad A')$$

Statt A') nehme ich für die weitere Gestaltung dieses Gleichungssystem, indem ich statt ξ, η, ζ respective 2ξ, 2η, 2ζ schreibe — es kommt dies geometrisch gesprochen darauf hinaus, dass die frühere stereographische Projection statt auf den linearen Raum $t+1=0$ auf $t=0$ ausgeführt wird — das System A''):

$$\left.\begin{aligned} \frac{4\,\xi^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^2} &= \frac{Af(a)}{Df(d)} \\ \frac{4\,\eta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^2} &= \frac{Bf(b)}{Df(d)} \\ \frac{4\,\zeta^2}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^2} &= \frac{Cf(c)}{Df(d)} \end{aligned}\right\} \qquad A'')$$

Befreit man A'') von den Brüchen und eliminirt mittelst eines bekannten Determinantensatzes 1, $-(v+w)$, vw, so resultirt das dreifach orthogonale Flächensystem durch Entwickelung der berührten Determinante dritten Grades, sobald der Factor $ABCD(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^4$ unterdrückt wird, schliesslich in der Form:

$$\frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1)^2}{d-u} - 4\left\{\frac{\xi^2}{a-u}+\frac{\eta^2}{b-u}+\frac{\zeta^2}{c-u}\right\} = 0. \qquad A'')$$

Man erhält nämlich je drei orthogonale Flächen, wenn dem Parameter u irgend ein Werth aus den drei Intervallen d bis c, respective c bis b, respective b bis a ertheilt wird.

Es ist jetzt auch nicht schwer, direct den Beweis für die Orthogonalität von A'') noch einmal zu führen, was umso wichtiger erscheint, als hiedurch zugleich eine Probe für die

Richtigkeit der Elimination erbracht wird. Ich bezeichne hiezu, wenn u, v, w drei beliebige Werthe aus den gedachten drei Intervallen vorstellen, die linken Seiten von $A''')$ mit

$$F_1(u) \equiv F_1 = 0$$
$$F_2(v) \equiv F_2 = 0$$
$$F_3(w) \equiv F_3 = 0$$

Schreibt man für einen Moment statt $\xi^2+\eta^2+\zeta^2-1$ den Buchstaben r, so hat man sofort

$$\frac{1}{16}\sum\frac{\partial F_1}{\partial\xi}\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi} = \frac{r^3-r^2}{(d-u)(d-v)} - \frac{2r}{d-v}\sum\frac{\xi^2}{a-u} - \\ - \frac{2r}{d-u}\sum\frac{\xi^2}{a-v} + 4\sum\frac{\xi^2}{(a-u)(a-v)},$$

wobei die Summation sich auf ξ, η, ζ und gleichzeitig a, b, c bezieht. Weil aber für die Schnittcurve von $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ auch

$$F_1-F_2 = (u-v)\left[\frac{r^2}{(d-u)(d-v)} - 4\sum\frac{\xi^2}{(a-u)(a-v)}\right]$$

verschwindet und anderseits ist:

$$\sum\frac{\xi^2}{a-u} = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{d-u}$$
$$\sum\frac{\xi^2}{a-v} = \frac{1}{4}\,\frac{r^2}{d-v},$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{16}\sum\frac{\partial F_1}{\partial\xi}\,\frac{\partial F_2}{\partial\xi} \equiv \frac{r^3-r^2}{(d-u)(d-v)} - \frac{r^3}{(d-v)(d-u)} + \\ + \frac{r^2}{(d-v)(d-u)} = 0,$$

d. h., da durch eine cyklische Vertauschung von u, v und w auch F_1, F_2 und F_3 cyklisch permutirt werden, $A'')$ stellt in der That ein dreifach orthogonales Flächensystem dar, und zwar von Flächen vierter Ordnung.

Aus der Gleichung $A'')$ ergibt sich aber ferner, dass $A'')$ durch eine veränderliche Raumcurve vierter Ordnung erzeugt werden kann, nämlich, wenn λ ein veränderlicher Parameter ist, durch die Curve C)

$$\left.\begin{array}{c} \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1+\lambda \\ \dfrac{\xi^2}{\dfrac{\lambda^2}{4}\,\dfrac{a-u}{d-u}} + \dfrac{\eta^2}{\dfrac{\lambda^2}{4}\,\dfrac{b-u}{d-u}} + \dfrac{\zeta^2}{\dfrac{\lambda^2}{4}\,\dfrac{c-u}{d-u}} = 1 \end{array}\right\} \qquad C)$$

Es dürfte hienach für einen gewandten Zeichner, der ich nicht bin, kaum erhebliche Schwierigkeiten darbieten, beliebig viele Tripeln von solchen orthogonalen Flächenindividuen, wie sie $A''')$ bietet, zu zeichnen.

Die sämmtlichen Krümmungslinien sind dann durch $A'')$ gegeben, wenn zweien der drei Parameter u, v, w irgend welche constante Werthe aus den betreffenden Intervallen beigelegt werden, der dritte aber sein Intervall durchlauft.

Die Betrachtungen bezüglich der Realität von u, v, w aus $A''')$ für beliebiges $\xi\eta\zeta$ dürften sich wohl mit den analogen Überlegungen beim confocalen Flächensystem zweiter Ordnung völlig decken. Erwähnenswerth ist vielleicht die Bemerkung, dass aus $A''')$ sofort sich ein biquadratisches n-fach orthogonales Raumsystem in einem Raume von n Dimensionen ergibt, so ist z. B., wenn die reellen Constanten a, b, c, d, e eine fallende Reihe bilden und ξ, η, ζ, τ rechtwinkelige Punktcoordinaten darstellen, durch $A'''')$ ein vierfach orthogonales biquadratisches Raumsystem dargestellt

$$\frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\tau^2-1)^2}{e-u} - 4\left\{\frac{\xi^2}{a-u} + \frac{\eta^2}{b-u} + \frac{\zeta^2}{c-u} + \right.$$
$$\left. + \frac{\tau^2}{d-u}\right\} = 0. \qquad A'''')$$

Der Beweis ist durch die obige Bildung von $\sum \dfrac{\partial F_1}{\partial \xi}\,\dfrac{\partial F_2}{\partial \xi}$ geführt.