

Einige Constructionen bezüglich der Schraubungsflächen

von

J. Sobotka in Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. October 1893.)

I. *Zur* Krümmung der Schraubungsflächen.

1. Mit der Ermittlung der Krümmungsverhältnisse und der Indicatrix für irgend einen Punkt einer Schraubungsfläche habe ich mich eingehend in einer in den Sitzungsberichten der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. CI, Abth. II. a. 1892, veröffentlichten Arbeit beschäftigt. Im Folgenden möge auf dieselbe durch die blosse Bandnummer »CI« hingewiesen werden.

Hier werden andere das angeführte Problem betreffende Constructionen entwickelt.

Zur Feststellung einer Schraubung im Raume gehört die Angabe ihrer Axe Z und ihres Parameters p der Grösse und dem Sinne nach. Durch irgend eine Curve A ist in der Schraubung eine Schraubungsfläche A bestimmt, auf welcher ihrer Erzeugung gemäss zwei besondere Systeme von Curven enthalten sind; erstens ein System von Schraubenlinien, die als Bahncurven einzelner Punkte von A aufzufassen sind und zweitens ein System congruenter Curven, welche die einzelnen Lagen der Curve A während der Schraubung vorstellen. Durch jeden Punkt u von A geht eine Curve U des ersten und eine Curve A_μ des zweiten Systems.

Es möge zunächst die Durchmesserinvolution der Indicatrix für den beliebig angenommenen Punkt u der Schraubungsfläche ermittelt werden. Dies geschieht durch Construction von zwei Paaren conjugirter Durchmesser derselben.

Die Berührungsebenen von A längs der Helix U umhüllen ein developpables Helikoid. Die Tangente S in u an die Helix U bildet mit der durch u gehenden Erzeugenden F des developpablen Helikoids ein Paar conjugirter Durchmesser der Indicatrix. Die Gerade F ist Charakteristik der Tangentialebene T_u in u an A und wird als Gerade grösster Neigung in Bezug auf eine Normalebene M der Schraubung erhalten; die Tangentialebene T_u selbst ist durch S und durch die Tangente T in u an die Curve A_μ gegeben.

Zum Zwecke der weiteren Construction kann die Curve A_μ durch irgend einen sie in u osculirenden Kegelschnitt B ersetzt werden. Irgend zwei Lagen des Kegelschnittes B in der Schraubung bestimmen zwei congruente ebene Felder; die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte erfüllen eine Regelfläche vierten Grades. Dies bleibt aufrecht auch dann, wenn die Lagen consecutiv werden, und wir also den Kegelschnitt B mit dem ihm unendlich benachbarten B' in Betracht ziehen. Für die erwähnte Regelfläche vierten Grades werden jetzt die erzeugenden Geraden zu Tangenten an die Bahncurven in sämmtlichen Punkten von B. Diese Regelfläche, die wir mit R bezeichnen wollen, berührt die Schraubungsfläche, welche durch B erzeugt wird, längs des Kegelschnittes B. Deshalb ist der zu T conjugirte Durchmesser V der Indicatrix von R in u gleichzeitig auch der zu T conjugirte Durchmesser für die Indicatrix in u der durch B, hiemit auch der durch A erzeugten Schraubungsfläche.

Es liegt also die Aufgabe vor, den Durchmesser V für die Indicatrix von R in u zu construiren.

Denken wir uns weiter die Fläche zweiten Grades H, welche die Fläche R längs ihrer Erzeugenden S berührt und den Kegelschnitt B enthält, so osculirt dieselbe die Fläche R im Punkte u [1] und man kann demnach zum Zwecke der Ermittlung von V die Fläche R durch die Fläche zweiten Grades H ersetzen, so dass es im Folgenden nur darauf ankommt, die Polare V von T in Bezug auf H zu construiren.

---

[1] J. Šolín: Construction der Osculationshyperboloide, in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag 1883.

Da bestimmen wir zuerst die Berührungspunkte für den Tangentialebenenbüschel durch S.

Analog dem Vorigen schliessen wir, dass die Tangenten an die Bahncurven sämmtlicher Punkte von T ein hyperbolisches Paraboloid P erfüllen, welches die Fläche R, somit auch die Fläche zweiten Grades H längs S berührt. Mit Hilfe von P lässt sich in jedem Punkte der Geraden S die den Flächen H, R gemeinsame Tangentenebene ermitteln.

Sind nun T_m, T_n zwei derartige von T_u verschiedene Ebenen mit den Berührungspunkten m respective n und bezeichnen wir die Pole dieser Ebenen mit Bezug auf B mit m' respective n', dann schneiden sich die Geraden (mm'), (nn') im Punkte v und (vu) ist bereits die gesuchte Gerade V [1]

Durch die Strahlenpaare SF, TV ist die Durchmesserinvolution für die Indicatrix im Punkte u der Schraubungsfläche A bestimmt.

Betreffs der Darstellung dieser Construction wählen wir — Fig. 1 [2] — die vom Punkte u um den Parameter p etwa im negativen Sinne entfernte Normalebene M der Schraubung als Spurebene. Von den Berührungsebenen durch S können wir insbesondere die projicirende T_m und die asymptotische T_n hervorheben. Die Conturparabel der Hauptprojection von P hat T_{I} zur Scheiteltangente und Z_{I} zum Brennpunkte. Trägt man also $\overline{u_{\mathrm{I}}\, i_{\mathrm{I}}} = \overline{Z_{\mathrm{I}}\, u_{\mathrm{I}}}$ auf $(Z_{\mathrm{I}}u_{\mathrm{I}})$ auf und fällt von i_{I} die Senkrechte auf T_{I}, so schneidet dieselbe die Tangente S_{I} der Conturparabel in ihrem Berührungspunkte m_{I}, welcher die Projection des Berührungspunktes m für die projicirende Tangentialebene T_m ist. Der Pol von $\mathrm{T}_{m_{\mathrm{I}}}$ in Bezug auf B_{I} ist m'_{I}. Die asymptotische Ebene T_n von P für die Gerade S ist normal zur projicirenden Ebene von T Fällt man also vom Spurpunkte s der Geraden S die Senkrechte auf T_{I}, so schneidet dieselbe die Spur O der Ebene O, in welcher der Kegelschnitt B liegt, in einem Punkte, dessen Verbindungsgerade J mit u den Schnitt von T_n mit O

---

[1] Man sehe in den Sitzungsberichten der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften in Prag die Abhandlung vom 24. März 1893.

[2] Es wird auch hier die orthogonale Projection in eine Normalebene der Schraubung als Hauptprojection bezeichnet und für ein Gebilde Σ durch Σ_{I}, ihr Bild durch Σ_{I} symbolisch ausgedrückt.

vorstellt. Führt man also durch den Pol n'_{I} von J_{I} in Bezug auf B_{I} die Parallele $S_{n'_{\mathrm{I}}}$ zu S_{I}, so schneidet diese die Verbindungsgerade $(m'_{\mathrm{I}}\, m_{\mathrm{I}})$ im Punkte v_{I} von V_{I}.

2. In dem eben Erläuterten haben wir ein Mittel gewonnen, den zu T conjugirten Strahl V zu construiren, wenn die Osculationsebene O und der Osculationskegelschnitt B der Curve A_{μ} gegeben waren. Trachten wir die entwickelten Constructionen in umgekehrter Reihenfolge durchzuführen, so gelangen wir zur Construction irgend eines osculirenden Kegelschnittes B, wenn die Osculationsebene O und der conjugirte Strahl V gegeben sind, oder zur Construction der Osculationsebene O, wenn B und V gegeben sind. In beiden Fällen kann man unbeschadet der Allgemeinheit den Kegelschnitt B so ermitteln oder wählen, dass B_{I} ein Kreis wird. Es heisse der Mittelpunkt dieses Kreises o_{I}. Dieser Annahme gemäss wird $(m'_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}}) \perp S_{\mathrm{I}}$ und $(n'_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}}) \perp J_{\mathrm{I}}$.

Ist im ersten Falle O gegeben, so kennen wir auch J_{I}. Nehmen wir nun einen Punkt v^{+}_{I} beliebig auf der Geraden V_{I} an, verbinden denselben mit m_{I} durch eine Gerade und ziehen durch ihn eine Parallele zu S_{I}, errichten wir ferner aus dem Schnittpunkte der ersten von den beiden soeben gezogenen Geraden mit T_{I} die Senkrechte zu S_{I}, aus dem Schnittpunkte der Parallelen zu S_{I} mit T_{I} die Senkrechte zu J_{I}, so erhalten wir im Schnitte o^{+}_{I} beider Senkrechten einen Punkt, der eine Hyperbel H_{I} beschreibt, wenn sich v^{+}_{I} auf der Geraden V_{I} bewegt. Der Mittelpunkt o_{I} muss auch auf dieser Hyperbel, welche T_{I} in u_{I} berührt, liegen; da er nebstdem auf der Senkrechten G_{I} in u_{I} zu T_{I} liegen muss, so erhält man ihn als den zweiten Schnittpunkt der Hyperbel H_{I} mit der Geraden G_{I}.

Hiemit gestaltet sich die Construction von o_{I} äusserst einfach. Zieht man nämlich durch m_{I} die Parallele zu T_{I}, bis sie V_{I} in v'_{I} trifft und trägt auf T_{I} die Strecke $\overline{v'_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}}}$ von u_{I} aus einmal in gleichem Sinne nach m''_{I}, das zweite Mal in entgegengesetztem Sinne nach n''_{I} auf, so ist die Senkrechte L_{I} durch m'_{I} zu S_{I} eine Asymptote, die Senkrechte F_{I} durch n''_{I} zu J_{I} die zweite Asymptote von H_{I}. Wird nun G_{I} von L_{I} in g_{I}, von F_{I} in h_{I} getroffen, so erübrigt nur noch, den Punkt o_{I} so zu ermitteln, dass $\overline{h_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}}} = \overline{u_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}}}$ wird.

Ist im zweiten von uns angeführten Falle der Mittelpunkt o_{I} des Kreises B_{I} gegeben, so fällen wir von ihm auf S_{I} die Senkrechte, welche T_{I} in m'_{I} schneidet; $(m_{\mathrm{I}} m'_{\mathrm{I}})$ trifft dann V_{I} im Punkte v_{I}. Die Parallele durch v_{I} zu S_{I} schneidet wiederum T_{I} in n'_{I}; die Gerade J_{I} ist alsdann senkrecht zu $(n'_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}})$. Hiedurch ist die Gerade J in der Ebene T_{u} bestimmt; die Ebene (TJ) ist die gesuchte Osculationsebene O. Man kann auch auf die vorige Art die Punkte m''_{I}, n''_{I} und die Asymptote L_{I} ermitteln und auf G_{I} den Punkt h_{I} so annehmen, dass $\overline{o_{\mathrm{I}} h_{\mathrm{I}}} = \overline{g_{\mathrm{I}} u_{\mathrm{I}}}$ wird; alsdann ist J_{I} senkrecht zu $(h_{\mathrm{I}} n''_{\mathrm{I}})$. Doch kürzer zum Ziele gelangt man dadurch nicht.

Da man nach Art. 1 in irgend einem Punkte der Schraubungsfläche zu jeder Tangente derselben den conjugirten Durchmesserstrahl der Indicatrix leicht finden kann, so ist man nach dem gerade entwickelten Vorgang im Stande, die Krümmung einer Curve auf der Schraubungsfläche in irgend einem Punkte u zu bestimmen, für welchen man die Osculationsebene der Curve kennt, insbesondere also die Krümmung einer ebenen Schnittcurve in jedem beliebigen Punkte derselben. Umgekehrt kann man danach die Osculationsebene einer Curve auf der Schraubungsfläche in einem Punkte ermitteln, wenn der Krümmungsmittelpunkt für die Projection der Curve im entsprechenden Punkte bekannt ist.

Bemerkt sei, dass die Auseinandersetzungen dieses Artikels fast wörtlich für alle windschiefen Flächen anwendbar bleiben und uns für dieselben eine Construction von praktischem Nutzen gewähren.

Die sowohl in Art. 1, als auch Art. 2 gegebenen Entwickelungen bleiben im Wesen auch für alle besonderen Fälle anwendbar; nur erhält die Durchführung eine geringe Modification hauptsächlich dadurch, dass man, wo es nöthig erscheint, noch eine zweite Projection in eine zur Axe Z parallele Ebene darstellt.

II. *Zur* Construction umschriebener Developpablen der Schraubungsflächen.

3. Es handelt sich hier um eine durch die Abhandlung: »Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenflächen. von Burmester in Schlö-

milch's Zeitschrift für Math. und Phys., 18. Jahrgang, 1873, angeregte Bemerkung. Mit der Bestimmung der Berührungscurve C einer gegebenen Schraubungsfläche mit der ihr umschriebenen Developpablen D von gegebenem Richtungskegel K oder umgekehrt, habe ich mich a. a. O. beschäftigt.[1] Es ist dort gezeigt worden, dass in der gegebenen Schraubung die Charakteristiken der Tangentialebenen in den Punkten der Berührungscurve C sämmtlich eine zur Schraubungsaxe Z parallele Cylinderfläche C berühren. Setzen wir voraus, dass der Mittelpunkt des Richtungskegels K auf Z liegt und bezeichnen für diese Lage mit L die Spur in derjenigen Normalebene der Schraubung, von welcher der Mittelpunkt um den Parameter p in positivem Sinne der Axe Z entfernt ist. Drehen wir alsdann die Spur L um Z im Sinne der Schraubung um 90° so erhalten wir in ihrer neuen Lage L^+ einen Normalschnitt der Cylinderfläche C. Da für jeden Punkt der Schraubungsfläche die Normale der durch ihn gehenden Normalcurve und die Charakteristik seiner Tangentialebene in einer zu Z parallelen Ebene liegen, so folgt daraus:

Die Normalen in sämmtlichen Punkten der Berührungscurve C zu den durch dieselben gehenden Normalcurven der Schraubungsfläche bilden eine Conoidfläche G, welche in der Richtung der Axe Z durch die Cylinderfläche C projicirt wird.

Aus diesem Satze ergibt sich in einfacher Weise die Construction der Krümmungsmittelpunkte für die Spur D der Developpablen D in einer Normalebene M der Schraubung, sowie die Construction einzelner Punkte der Rückkehrkante der Developpablen D.

Es sei — Fig. 2 — e ein Punkt der Berührungscurve C; die diesem Punkte zugehörige Erzeugende des Conoids G, welche die Cylinderfläche im Punkte e' berührt, heisse E. Ferner sei P die durch e gehende Erzeugende von D, für die P_{I} senkrecht steht zu $(Z_{\mathrm{I}} e'_{\mathrm{I}})$, und T die Tangente in e an C, welche als der zu P conjugirte Durchmesserstrahl der Indicatrix nach Art. 1 construirt werden kann. Schliesslich sei noch e''_{I} der Krümmungsmittelpunkt von C_{I} in e'_{I}.

[1] Monatshefte für Math. u. Phys., IV Jahrg., S. 59.

Zunächst sehen wir, dass die Spur der Ebene (PE) in M identisch mit der Normalen N^{s} von D im Spurpunkte m_P der Geraden P ist. Der Krümmungsmittelpunkt ${}^{\gamma}e$ der Spur D in m_P ist der Schnitt der Normalen N^{s} mit ihrer consecutiven $N^{s\prime}$ Ist nun E' die auf E unmittelbar folgende Erzeugende von G und P' die auf P folgende Nachbarerzeugende von D, so ist $N^{s\prime}$ ebenso die Spur der Ebene $(P'E')$. Die Schnittgerade R der Ebenen (PE), $(P'E')$ enthält nun den Krümmungsmittelpunkt ${}^{\gamma}e$ von D in m_P als den Schnittpunkt der Spurgeraden N^{s}, $N^{s\prime}$; sie enthält auch einen Punkt q der Rückkehrkante der Developpablen D als den Schnittpunkt der Geraden P, P' Es wird sich desshalb nur darum handeln, die Gerade R zu ermitteln. Von dieser Geraden kann man den Punkt r, in welchem sie die Gerade E schneidet, als den Berührungspunkt der Ebene (PE) mit dem Conoid G ohneweiters finden. Wir kennen für das Conoid die Tangentialebene (TE) in e, die zu Z parallele Tangentialebene in e' und die asymptotische Ebene durch E, sind somit im Stande, aus dem projectiven Zusammenhange des Tangentialebenenbüschels um E mit der Reihe der Berührungspunkte auf E den Berührungspunkt r von (PE) zu construiren. Danach trifft die Parallele, die man zu T_{I} durch den Schnittpunkt von P_{I} mit $(e'_{\mathrm{I}}e''_{\mathrm{I}})$ zieht, die Gerade E_{I} in der Projection r_{I} des fraglichen Punktes r.

Betreffs der Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes ${}^{\gamma}e$ kann man die Developpable D durch einen längs P osculirenden Kegel, dessen Mittelpunkt in q sein wird, ersetzen; daraus ergibt sich, dass $R_{\mathrm{I}} \perp (Z_{\mathrm{I}}e''_{\mathrm{I}})$, wodurch die Richtung von R bestimmt wird. Da wir jetzt von R bereits den Punkt r und die Richtung kennen, so ist diese Gerade selbst und durch sie auch die in Frage gestellten Punkte ${}^{\gamma}e$ und q gefunden.

Führen wir die entwickelte Construction in umgekehrter Reihenfolge durch, so gelangen wir zur Lösung folgender Aufgabe.

In einer gegebenen Schraubung ist diejenige Schraubungsfläche zu bestimmen, welche eine gegebene developpable Fläche D berührt.

Wir ermitteln zuerst den Richtungskegel der Developpablen und leiten aus ihm dann die Cylinderfläche C ab. Jeder

Erzeugenden P von D entspricht auf C_I ein Punkt e'_I, wobei $(Z_I e'_I) \perp P_I$ ist. Hiedurch ist auch schon die betreffende Gerade E des Conoids Ġ bestimmt, welche P in einem Punkte e der Berührungscurve zwischen D und der Schraubungsfläche trifft. Weil wir die Fläche D kennen, so sind wir im Stande, die Gerade R und den auf ihr liegenden Punkt ${}^{\nu}e$ zu construiren. Alsdann sind uns für das Conoid die Tangentialebenen in den Punkten e', r und die asymptotische Ebene durch E bekannt und wir sind in der Lage, die Tangentialebene desselben in e zu finden, deren Schnitt mit der längs P berührenden Tangentialebene von D uns die Tangente T in e an die Berührungscurve C liefert, wobei die Verbindungsgerade von r_I mit demjenigen Punkte der Geraden P_I, welcher auf der in e'_I zu E_I errichteten Senkrechten liegt, die Richtung von T_I angibt. E ist die Normale in e der durch diesen Punkt gehenden Normalcurve N_e der Schraubungsfläche. Die Charakteristik der Tangentialebene in e zur Schraubungsfläche bildet mit der Tangente $\underset{\sim}{Q}$ der durch e gehenden coaxialen Helix H der Fläche ein Paar, die Geraden T, P bilden ein zweites Paar der Durchmesserinvolution für die Indicatrix und es lässt sich desshalb der zur Tangente von N_e in e conjugirte Durchmesserstrahl I derselben leicht ermitteln. Die Senkrechte durch Z_I zu I schneidet dann E_I im Mittelpunkte ${}^{=}o'_I$ des zu e_I gehörigen Krümmungskreises von Ne_I.

Um nun die Spur N der Schraubungsfläche in irgend einer Normalebene M der Schraubung, die wir als Hauptprojectionsebene betrachten können, zu construiren, suchen wir die Spur m_Q von $\underset{\sim}{Q}$ in M und tragen der Grösse und dem Sinne nach die Länge $\overline{e_I m_Q}$ von e_I auf H_I bis zum Punkte ${}^{=}m$ auf, welcher bereits ein Punkt der Normalspur N ist. Dreht man in demselben Sinne E_I und ${}^{=}o'_I$ um Z_I um den Winkel $(e_I Z_I {}^{=}m)$ nach $E^{=}$, respective ${}^{=}o$, so ist $E^{=}$ die Normale und ${}^{=}o$ der Krümmungsmittelpunkt von N für den Punkt ${}^{=}m$.

III. Zur Construction umschriebener Developpablen der Schraubungsregelflächen.

4. In diesem Abschnitte will ich mich mit der Lösung folgender Aufgabe befassen

In irgend einem Punkte e der Berührungscurve C einer Schraubungsregelfläche A mit einer ihr umschriebenen Developpablen D ist die Osculationsebene O und das Krümmungscentrum $^{\omega}e$ dieser Berührungscurve zu construiren.

Es sei — Fig. 3 — O die Rückkehrhelix für die asymptotische Fläche der gegebenen Schraubungsregelfläche, C_{I} die Projection der Cylinderfläche, von welcher im vorangehenden Abschnitte die Rede war, und L die Lage, in welche diese Projection gelangt, wenn sie um Z_{I} in der Schraubung entgegengesetztem Sinne eine Vierteldrehung vollzieht. Nehmen wir weiter auf Z den Punkt v an, welcher in positiver Richtung von unserer Hauptprojectionsebene um den Parameter p entfernt ist und betrachten denselben als gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Richtungskegel S, K der Schraubungsregelfläche, beziehungsweise der umschriebenen Developpablen, so ist O_{I} die Spur des ersteren, L die Spur des letzteren Kegels in der Projectionsebene und es ist dann, wie bekannt, die Berührungscurve C die Durchdringungscurve der Schraubungsregelfläche mit einer windschiefen Fläche Q, deren Geraden C berühren, O schneiden und zu den Erzeugenden des zu K in Bezug auf S polarreciproken Kegels L parallel sind. Irgend ein Punkt e der Berührungscurve C ist also der Schnittpunkt einer Erzeugenden H der Fläche A mit der entsprechenden Erzeugenden R der Fläche Q.[1]

Ermittelt man das längs H die Schraubungsregelfläche osculirende Hyperboloid H und das längs R die Fläche Q osculirende Hyperboloid R, dann ist die fragliche Osculationsebene O die Osculationsebene in e für die Durchdringungscurve der Flächen H und R. Ist nun T die Tangente in e an C, so ist O die längs T berührende Tangentialebene des zur Punktreihe auf T doppelt conjugirten Kegels V in Bezug auf die Schmiegungshyperboloide H, R.

Die Construction von H ist bekannt, wesshalb wir bloss auf die Construction von R näher eingehen wollen.

---

[1] Monatshefte a. a. O.

Die Gerade R treffe O im Punkte o und berühre C im Punkte e'. Weil O eine asymptotische Curve der Fläche Q ist, so ist die Tangente T_o in o an O eine Erzeugende von R. Als zweite Erzeugende von R werden wir diejenige R' bestimmen, welche zu R parallel ist. Zu dem Behufe legen wir durch v die Ebene, welche zur Tangentialebene T_o in o an Q, und weiter die Ebene, welche zur projicirenden Tangentialebene $\mathrm{T}_{e'}$ in e' an Q parallel ist, suchen ihre Polargeraden J, J' in Bezug auf den Kegel L, legen durch o die Parallele J_o zu J und durch e' die Parallele $J_{e'}$ zu J'. Beide Parallelen schneiden sich in einem Punkte h; die Gerade R' ist alsdann die zu R in Bezug auf den Punkt h symmetrische Gerade.[1] Dass man bei der Durchführung der soeben beschriebenen Construction nicht die Kegelfläche L selbst construiren wird, sondern die Constructionen, die mit Hilfe derselben durchgeführt werden sollen, durch die Reciprocität auf den Kegel K überträgt, also zuerst die Polarebenen von J und J' in Bezug auf S aufsucht und aus ihnen erst dann die Geraden J, J' ableitet, ist natürlich. Das Resultat dieser Überlegung ist, wie leicht zu erkennen, folgendes: Ist e''_{I} der Krümmungsmittelpunkt von $\mathrm{C_I}$ in e'_{I}, so ist $J_{o_{\mathrm{I}}}$ senkrecht zu $(e''_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}})$ und $J_{e'_{\mathrm{I}}}$ fällt mit $(e''_{\mathrm{I}} e'_{\mathrm{I}})$ zusammen. Die Contur K'_{I} von R ist als Kegelschnitt, der $T_{o_{\mathrm{I}}}$, R'_{I} berührt und $\mathrm{C_I}$ in e'_{I} osculirt, somit bestimmt. Dadurch ist auch R bereits gefunden, denn jede Erzeugende X von R, welche R schneidet, hat ihre Projection in einer Tangente von K'_{I} und liegt in der Tangentialebene der Fläche Q im Punkte (XR) und kann demnach ohneweiters erhalten werden. Die Tangenten des Kegelschnittes K'_{I} bekommt man aus den entsprechenden Tangenten des Krümmungskreises K_{I} von $\mathrm{C_I}$ in e'_{I} vermittelst centrischer Collineation die zwischen $K_{\mathrm{I}}, K'_{\mathrm{I}}$ besteht, in einfacher Weise. Für diese centrisch collineare Lage ist, wie bekannt, R_{I} die Collineationsaxe. Der Tangente R'_{I} entspricht die zu ihr parallele, von R_{I} verschiedene Tangente $R'_{+\mathrm{I}}$ des Kreises K_{I}, der Tangente $T_{o_{\mathrm{I}}}$ entspricht die noch durch o_{I} an K_{I} gehende Tangente $T^{+}_{o_{\mathrm{I}}}$. Dem Punkte $j_{\mathrm{I}} \equiv (R'_{\mathrm{I}} T_{o_{\mathrm{I}}})$ entspricht der Punkt $j_{\mathrm{I}}^{+} \equiv (R'_{+\mathrm{I}} T^{+}_{o_{\mathrm{I}}})$, so dass die Gerade $(j_{\mathrm{I}} j^{+}_{\mathrm{I}})$ durch das Collineationscentrum r_{I} geht, wodurch

---

[1] Man sehe Amerkung 1 auf S. 206.

dieses als Schnitt von $(j_\mathrm{I} j_\mathrm{I}^+)$ mit R_I gefunden wird, und man jetzt leicht zu jedem Elemente das ihm entsprechende construiren kann.

Suchen wir zunächst den Berührungspunkt i der Tangente T_{o_I} mit dem Kegelschnitt K'_I; derselbe entspricht dem Berührungspunkt i_I^+ von $T_{o_\mathrm{I}}^+$ mit K_I. Nun ist $(j_\mathrm{I}^+ e''_\mathrm{I}) \| (i_\mathrm{I}^+ e'_\mathrm{I}) \| (o_\mathrm{I} h_\mathrm{I})$, wesshalb wir haben

$$\overline{j_\mathrm{I}^+ i_\mathrm{I}^+} \;\; \overline{i_\mathrm{I}^+ o_\mathrm{I}} = \overline{e''_\mathrm{I} e'_\mathrm{I}} \;\; \overline{e'_\mathrm{I} h_\mathrm{I}} = \overline{l_\mathrm{I}^+ e'_\mathrm{I}} \;\; \overline{e'_\mathrm{I} h'_\mathrm{I}},$$

wenn l_I^+ der Schnittpunkt von $R'_{+\mathrm{I}}$, und h'_I der Schnittpunkt von R'_I mit der Geraden $J_{e'_\mathrm{I}}$ ist. Aus dieser Relation folgt, dass auch

$$\overline{j_\mathrm{I}^+ i_\mathrm{I}^+} \;\; \overline{i_\mathrm{I}^+ o_\mathrm{I}} = \overline{j_\mathrm{I}^+ r_\mathrm{I}} \;\; \overline{r_\mathrm{I} j_\mathrm{I}},$$

dass also $(r i_\mathrm{I}^+)$ parallel zu T_{o_I} ist.

Man ermittelt also das Collineationscentrum r_I dadurch, dass man durch den von e'_I verschiedenen Schnittpunkt der Polare von o_I in Bezug auf K_I die Parallele zu T_{o_I} zieht, welche R_I bereits in r_I trifft. Aus dieser einfachen Erwägung ergibt sich, dass K'_I im Allgemeinen eine Hyperbel ist, welche C_I in e'_I osculirt und T_{o_I} zur Asymptote hat.

Demnach ist R mit den Bestimmungsstücken von Q auch selbst direct gegeben.

Die Parallele durch i_I^+ zu R_I trifft den Kreis K_I noch im Punkte f_I^+ Trägt man $\overline{e'_\mathrm{I} o'_\mathrm{I}} = \overline{o_\mathrm{I} e'_\mathrm{I}}$ auf R_I auf, dann ist die durch o'_I zu $(r_\mathrm{I} f_\mathrm{I}^+)$ gezogene Parallele F_I die zweite Asymptote von K'_I.

Nach der gepflogenen Vorbereitung kann die Durchführung der eingangs dieses Abschnittes gestellten Aufgabe rasch bewerkstelligt werden. — Fig. 4. —

Wir wollen die Spur M^ω der fraglichen Osculationsebene in der durch den Centralpunkt c von H gelegten Normalebene, die wir zugleich als Projectionsebene betrachten, construiren. Zuerst ermitteln wir die Tangente T im Punkte e an die Berührungscurve C als die Schnittgerade der Tangentialebene der Schraubungsfläche mit der Tangentialebene der Fläche Q im Punkte e. Die Senkrechte M^s durch c_I auf R_I ist die Spur der ersten der beiden Berührungsebenen; die Spur der zweiten ist die Gerade $M^{\equiv\prime}$, welche durch o_{I} und durch den Schnittpunkt von $(e'_{\mathrm{I}} Z_{\mathrm{I}})$ mit der durch e_{I} zu $(o_{\mathrm{I}} Z_{\mathrm{I}})$ gelegten Parallele geht. $M^{\equiv}$ und $M^{\equiv\prime}$ schneiden sich im Spurpunkte t von T.

Es handelt sich noch darum, vier weitere Punkte für die Spur V des Kegels V zu ermitteln, um dann an sie in t die Tangente M^{ω}, welche ja die verlangte Spur selbst ist, construiren zu können.

Die Senkrechte von e_{I} auf $(Z_{\mathrm{I}} e'_{\mathrm{I}})$ ist die Projection der durch e gehenden Erzeugenden der umschriebenen Developpablen D, also die Projection der Polaren von T in Bezug auf H. Der Schnittpunkt w_{I} dieser Senkrechten mit $M^{\equiv}$ ist darum ein zweiter Punkt von V Ferner construiren wir die Polare von T in Bezug auf R als die harmonisch conjugirte zu T in Bezug auf die durch e gehenden Erzeugenden von R; ihr Spurpunkt heisse u.[1] Jetzt erübrigt noch, zwei Punkte des Kegelschnittes aufzusuchen. Zu dem Behufe wählen wir auf T zwei Punkte m, n und bestimmen ihre doppeltconjugirten Geraden in Bezug auf beide Schmiegungsflächen H, R. In unserem Falle wurde der Punkt m von T in der projicirenden Ebene von T_{o} angenommen. Diese Ebene geht also durch m und berührt das Hyperboloid R im unendlich fernen Punkte i von T_{o}; demnach gehört der Punkt i der Polarebene von m in Bezug auf R an, welche nebstdem durch (eu) gehen muss und somit hinreichend bestimmt ist. Die Parallele durch e zu T_{o} fällt mit H zusammen; desshalb ist die besagte Polarebene identisch mit der Ebene (uH); ihre Spur ist die Gerade $(u_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{I}})$. Bezüglich des Hyperboloides H sehen wir aus dem Umstande, dass m in einer Hauptebene dieses Hyperboloids, nämlich in der projicirenden Ebene von T_{o} liegt, dass seine Polarebene senkrecht zu dieser projicirenden Ebene sein wird und da dieselbe nebstdem durch (ew) gehen muss, so ist die aus w_{I} auf $T_{o_{\mathrm{I}}}$ gefällte Senkrechte bereits die Spur der Polarebene. Der Schnittpunkt x beider so ermittelten Spuren ist die Spur der dem Punkte m entsprechenden doppeltconjugirten Geraden; es ist also x ein weiterer Punkt von V

[1] Die von R_{I} verschiedene Tangente an K_{I} durch e_{I} schneidet $(i^{+}_{\mathrm{I}} f^{\,\cdot}_{\mathrm{I}})$ in einem Punkte, auf dessen Verbindungsgeraden mit r_{I} durch T_{I} und $(e_{\mathrm{I}} u)$ eine Strecke herausgeschnitten wird, welche durch R_{I} halbirt wird.

Als den zweiten Punkt n nehmen wir den unendlich fernen Punkt von T an. Seine Polarebene in Bezug auf R geht durch den Mittelpunkt q dieses Hyperboloids, welcher im Schnitte von $T_{o_{\mathrm{I}}}$ mit F_{I} seine Projection hat und in der durch R gehenden asymptotischen Ebene von R enthalten ist. Die Parallele G durch o_{I} zu $(e'_{\mathrm{I}} Z_{\mathrm{I}})$ ist die Spur dieser asymptotischen Ebene; sie wird von $(q_{\mathrm{I}} e_{\mathrm{I}})$ im Spurpunkte g der Geraden (qe) getroffen, so dass (ug) die Spur der Polarebene von n in Bezug auf R ist.

Die Gerade (wo) ist die Spur der Polarebene von n in Bezug auf H. Der Schnittpunkt y der Spuren (ug) und (wo) ist der fünfte Punkt von V

Bezeichnen wir den Nachbarpunkt von t auf V durch t', so können wir schliesslich M^{ω} als die Seite (tt') des Pascal'schen Sechsecks $uxywtt'$ erhalten, wobei wir die Reihenfolge der Eckpunkte so gewählt haben, dass so wenig als möglich Hilfsgeraden von Neuem gezogen werden müssen; es ist hier (oc) bereits die betreffende Pascalgerade.

Bei unserer Darstellung haben wir noch den Punkt n' im Schnitte von T mit der die Asymptote F_{I} projicirenden Ebene angenommen und den ihm zugehörigen Punkt y' von V aufgesucht. Da diese projicirende Ebene eine durch n' gehende Tangentialebene des Hyperboloides R ist, so ist durch deren Berührungspunkt f und durch die Gerade (eu) die Polarebene von n' in Bezug auf R bestimmt. Der Punkt f ist nun als der unendlich ferne Punkt auf der Erzeugenden F von R, welche R in o' trifft, auch schon gegeben. Zieht man also durch e die Parallele F_e zu F, so ist (uF_e) die besagte Polarebene. Um nun ihre Spur darzustellen, suchen wir den Spurpunkt von F_e. Derselbe liegt auf der Spur der Ebene (RF), und da diese Ebene die Fläche Q in o' berührt, so hat man bloss durch o'_{I} die Parallele zu $(Z_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}})$ zu ziehen, bis sie $(Z_{\mathrm{I}} e'_{\mathrm{I}})$ in o''_{I} trifft; $(o''_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}})$ ist alsdann die Spur von (RF). Die Gerade F_e wird von dieser Spur im Punkte f^{ε} getroffen und (uf^{ε}) ist die Spur der Polarebene von n' in Bezug auf R.

Wir suchen noch die Polarebene von n' in Bezug auf H. Zu dem Behufe legen wir durch n' die zur Axe (co) senkrechte Ebene G, welche sie im Punkte g' treffen möge. Tragen wir auf die Axe (co) die Länge $\overline{oc'} = \overline{co}$ auf, so ist der zu g' in Bezug auf die Punkte c, c' harmonisch conjugirte Punkt g'' der Pol von G, und da G durch n' geht, so muss die Polarebene des Punktes n' durch g'' gehen, und (wg'') ist die Spur der Polarebene von n' in Bezug auf H. Die Spuren $(u\, f^{\equiv})$, (wg'') schneiden sich im Spurpunkte y' der zu n' doppeltconjugirten Geraden (ey') und y' ist ein weiterer Punkt von V.

Es ist aus der ganzen Darstellung einleuchtend, wie man vorzugehen hätte, wenn man die Punkte m, n oder auch die zu Z normale Spurebene der Genauigkeit der graphischen Durchführung halber anders als in der angegebenen Weise wählen müsste.

Wie auf Grund der Osculationsebene $O \equiv (eM^{\omega})$ die Construction des Krümmungskreises der Berührungscurve C im Punkte e oder ihrer Projection in irgend eine Normalebene in der Projection von e vorgenommen wird, ist im I. Abschnitte erledigt worden.[1]

5. Wenn die umschriebene Developpable D eine Cylinderfläche ist, dann ist C_{I} ein Punkt und die Schmiegungsfläche R wird zu einem hyperbolischen Paraboloid; an unserer Darstellung ändert sich wesentlich nichts. Wenn in diesem Falle e speciell ein Punkt von C auf der Strictionshelix der Schraubungsregelfläche ist, so vereinfacht sich noch unsere Lösung bedeutend. Wir wählen hier — Fig. 5 — die Spur- und zugleich Projectionsebene in der Entfernung p von e im negativen Sinne (unterhalb) Da hier die dem Punkte e entsprechende Gerade R parallel zur Projectionsebene ist, so sind die Spuren der Tangentialebenen von Q in Punkten auf R gleichfalls zu R parallel. Wir ermitteln die Schnittpunkte dieser Spuren mit der Geraden $T_{o_{\mathrm{I}}}$. Es wird $T_{o_{\mathrm{I}}}$ von der Spur der Tangentialebene des Punktes e'_{I} in ${}^{\equiv}m' \equiv o_{\mathrm{I}}$, von der Spur der Tangentialebene des Punktes o im Punkte ${}^{\omega}m$, für den $\overline{o_{\mathrm{I}}{}^{\omega}m} = \overline{Z_{\mathrm{I}}o_{\mathrm{I}}}$ ist, wobei der Sinn von $\overline{o_{\mathrm{I}}{}^{\omega}m}$ leicht bestimmt wird, von der asymptotischen Ebene in ${}^{\infty}m$ getroffen, wobei die Spur der asymptotischen Ebene die um 90° um Z_{I} in entgegengesetztem Sinne der Schraubung gedrehte Polare von e'_{I} in Bezug auf O_{I} ist. Die Spur $M^{\equiv}$ für die Tangentialebene in e construirt man danach, dass die Reihe der

---

[1] Man sehe auch »CI«.

Punkte auf R_{I} projectiv ist mit der Reihe entsprechender Spurpunkte auf $T_{o_{\mathrm{I}}}$; man bringt die Gerade $(^{\infty}me_{\mathrm{I}})$ mit $(e_{\mathrm{I}}'^{\,\infty}m)$ zum Schnitte; durch den so erhaltenen Schnittpunkt geht dann $M^{\ddagger}$ parallel zu R.

Die Tangente T an C in e ist die Schnittgerade der Ebene $(RM^{\ddagger})$ mit der projicirenden Ebene der durch e gehenden Erzeugenden der Schraubungsregelfläche. Man sieht, dass hier die Tangente T eine Erzeugende des Schmiegungsparaboloids R ist, woraus man entnimmt, dass $(eM^{\ddagger})$ zugleich auch die Osculationsebene von C im Punkte e ist.

Die Construction des Krümmungshalbmessers ρ von C in einem derartigen Punkte lässt sich in bekannter Weise durchführen. Für die geschlossene Schraubungsfläche bekommen wir aus dieser Construction auch einen sehr einfachen Ausdruck für ρ; seine Ableitung würde aber nichts Neues bieten.

Ist r der Radius von O_{I}, l die Entfernung des Punktes C_{I} von Z_{I}, p wie früher der Parameter der Schraubung, und betrachten wir den Sinn von $\overline{Z_{\mathrm{I}} C_{\mathrm{I}}}$ als positiv, dann ist

$$\rho = \frac{l^2 r^2 + p^2 (2\,l \pm r)^2}{\pm 2\,lr(l \pm r)}$$

in welchem Ausdrucke entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen zu nehmen sind. Aus dieser Formel bekommt man auch einen Ausdruck für die Krümmungsradien der Curve C_{I} in ihren Scheiteln, für welche sich die absoluten Werthe $\dfrac{lr}{2(l \pm r)}$ ergeben.

6. Nicht ohne Interesse ist die Übertragung der Constructionen dieses Abschnittes auf die normalen Schraubungsregelflächen. Das Osculationshyperboloid H wird jetzt zu einem hyperbolischen Paraboloid, dessen Scheitel der Centralpunkt c und dessen Axe die Senkrechte A von c auf Z ist. — Fig. 6. — Die Fläche Q kann man zu unseren Zwecken durch eine normale Schraubungsregelfläche B ersetzen, deren Strictionshelix in den Krümmungskreis K_{I} von C_{I} sich projicirt, so dass $(e_{\mathrm{I}} e_{\mathrm{I}}')$ die Projection einer Erzeugenden (ee') und e_{I}'' die Projection der Axe von B ist.. Die Fläche R ist also ein hyper-

bolisches Paraboloid, dessen Scheitel in e und dessen Axe A' die Senkrechte von e auf die Axe der Fläche B ist.

Bezeichnen wir mit d den Schnittpunkt (AA'), so ist $(d_I e_I)$ wie bekannt die Normale in e_I an C_I. Hiedurch ist auch die Tangente T in e an die Berührungscurve C bestimmt.

Es ist leicht zu sehen, dass der doppeltconjugirte Kegel V von T in Bezug auf die beiden Paraboloide H, R von den Normalebenen der Schraubung in Kreisen geschnitten wird. Wir brauchen nämlich nur zu zeigen, dass die in einer solchen Normalebene gelegenen Spurgeraden der Polarebenen P_m, P'_m irgend eines Punktes m von T in Bezug auf die beiden Paraboloide zu einander senkrecht sind.

Legen wir durch m die zur Tangentialebene von H im Scheitel c parallele Ebene Z, so liegt ihr Pol z bezüglich H auf A symmetrisch zum Schnittpunkte (AZ) in Bezug auf den Scheitel c und ist ein Punkt der Ebene P_m. Ebenso wenn wir durch m die zur Tangentialebene von R im Scheitel e' parallele Ebene Z' legen, ist deren Pol z' in Bezug auf R der zum Punkte $(A'Z')$ bezüglich e' symmetrisch gelegene Punkt von A'; derselbe ist ein Punkt der Ebene P'_m. Es sind also (ze), $(z'e)$ die in der durch e gehenden Normalebene der Schraubung gelegenen Spuren von P_m, respective P'_m. Dass $(ze) \perp (z'e)$ ist, ergibt sich unmittelbar aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (zce), $(z'e'e)$.

Wir wollen den Spurkreis V des Kegels V ermitteln, welcher in der Normalebene der Schraubung sich befindet, die von e in negativem Sinne die Entfernung p besitzt. Ist alsdann v die Spur von T, für welche $\overline{e_I v_I} = \overline{e_I d_I}$, dann liegt der Spurpunkt p der Polare von T in Bezug auf H in der durch v zu (ce) gezogenen Parallelen und es ist $(e_I p_I) \perp (Z_I e'_I)$, $\overline{e_I p_I} = \overline{Z_I e'_I}$. Aus demselben Grunde liegt der Spurpunkt q der Polare von T in Bezug auf R in der durch v zu (ee') gezogenen Parallelen und es ist $(e_I q_I) \perp (e''_I c_I)$, $\overline{e_I q_I} = \overline{e''_I c_I}$.

Setzen wir $\overline{ce} = l$, $\overline{ee'} = l'$, $\overline{c_I Z_I} = r$, $\overline{e'_I e''_I} = r'$, so ist $\overline{v_I p_I} = 2l' \pm r$, $\overline{v_I q_I} = 2l \pm r'$, wobei in der Wahl der Zeichen kein Zweifel obliegen kann.

Aus der Lage des Durchmessers $\overline{pq}$ ergibt sich die Lage des zu v gehörigen Durchmessers von V also auch die

Spur M^{ω} der Osculationsebene O als die Tangente von V im Punkte v äusserst einfach.

Diese Entwickelung liefert folgende Construction der Osculationsebene O. Man zieht durch den Halbirungspunkt von $\overline{c_\mathrm{I} Z_\mathrm{I}}$ die Parallele zu A'_I, durch den Halbirungspunkt von $\overline{e'_\mathrm{I} e''_\mathrm{I}}$ die Parallele zu A_I. Bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser Parallelen mit g_I, alsdann ist die Spur M^{ω} der gesuchten Osculationsebene parallel zu $(d_\mathrm{I} g_\mathrm{I})$.

Ist nun die Osculationsebene O gefunden, so kann man den Krümmungsmittelpunkt o_I von C_I in e_I nach einer in CI, S. 911, Fig. 1, entwickelten Construction aufsuchen. Im Schnittpunkte von $(Z_\mathrm{I} e'_\mathrm{I})$ mit $(d_\mathrm{I} e_\mathrm{I})$ errichtet man die Senkrechte zu $(d_\mathrm{I} e_\mathrm{I})$, welche die Gerade $(e_\mathrm{I} e'_\mathrm{I})$ in i_I schneiden möge; die Senkrechte in i_I auf $(d_\mathrm{I} g_\mathrm{I})$ trifft die Normale $(d_\mathrm{I} e_\mathrm{I})$ von C_I im verlangten Punkte o_I. Da bezüglich der Lösung unserer Aufgabe die gegebene normale Schraubungsfläche und die Schraubungsfläche B ihre Rollen auch austauschen können, so kann man auch im Schnittpunkte von $(d_\mathrm{I} e_\mathrm{I})$ mit $(c_\mathrm{I} e''_\mathrm{I})$ die Senkrechte zu $(d_\mathrm{I} e_\mathrm{I})$ errichten, welche die Gerade $(c_\mathrm{I} e_\mathrm{I})$ im Punkte j_I treffen möge. Die Senkrechte von j_I auf $(d_\mathrm{I} g_\mathrm{I})$ trifft $(d_\mathrm{I} e_\mathrm{I})$ abermals im fraglichen Punkte o_I.

Vereingen wir die zwei letzten von einander unabhängigen Constructionen, so bekommen wir den Krümmungsmittelpunkt o_I, ohne erst auf vorhergegangene Erörterungen Rücksicht nehmen zu müssen, einfach dadurch, dass wir $(d_\mathrm{I} e_\mathrm{I})$ mit der Geraden $(i_\mathrm{I} j_\mathrm{I})$ zum Schnitte bringen. Diese Construction von o_I bestimmt auch die Osculationsebene O, indem $(i_\mathrm{I} j_\mathrm{I})$ senkrecht zu $(d_\mathrm{I} g_\mathrm{I})$, also senkrecht zur Spur M^{ω} von O sein muss.

Dass $(i_\mathrm{I} j_\mathrm{I})$ senkrecht zu $(d_\mathrm{I} g_\mathrm{I})$ ist, folgt auch leicht aus planimetrischen Gründen; wir finden nämlich, wenn wir $\overline{d_\mathrm{I} e_\mathrm{I}} = d$ setzen, dass $\overline{j_\mathrm{I} e_\mathrm{I}} = \dfrac{d^2}{2\,l \pm r'}$, $\overline{e_\mathrm{I} i_\mathrm{I}} = \dfrac{d^2}{2\,l' \pm r}$, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung sich sogleich ergibt.

Wenn in besonderem Falle der Punkt e auf die Strictionshelix der gegebenen Schraubungsfläche zu liegen kommt, oder wenn e_I auf K_I liegt, dann ergibt sich für den Krümmungshalbmesser von C_I aus den letzten Gleichungen der Werth $\dfrac{l^2}{2\,l \pm r'}$

beziehungsweise $\frac{l'^2}{2l' \pm r}$, wobei bezüglich des Zeichens wieder die Wahl leicht zu treffen ist. Auch die Gerade $(i_I j_I)$, also die Osculationsebene O selbst ergibt sich aus den genannten Gleichungen für diese Speciallagen von e ohneweiters; übrigens bleibt die zuerst gegebene Construction von $(d_I g_I)$ auch hier anwendbar.

Unsere Betrachtungen liefern nebenbei die Lösung folgender Aufgabe. Ein rechter Winkel bewegt sich in seiner Ebene derart, dass seine Schenkel beständig zwei feste Curven berühren; es ist der Krümmungsmittelpunkt der durch den Scheitel des Winkels beschriebenen Bahn in irgend einem Punkte e derselben zu ermitteln.

Die der Natur der Aufgabe entsprechende Lösung lässt sich unmittelbar vornehmen, indem der Wendekreis der umgekehrten Bewegung bekannt ist, da er durch die Punkte d_I, Z_I, e''_I geht. Die elegante Durchführung der Lösung unserer Aufgabe auf dieser Grundlage gibt in einfachster Anordnung Burmester in seinem Lehrbuche der Kinematik an betreffender Stelle.

IV. Zur Construction von Conturen und Conturevoluten der Schraubungsflächen.

7. Es möge zunächst eine Bemerkung über die Conturbestimmung einer Fläche überhaupt vorausgeschickt werden.

Es sei E eine Ebene, in die wir die gegebene Fläche R von irgend einem im Endlichen gelegenen oder unendlich fernen Centrum q projiciren. Der Berührungskegel der Fläche, welcher in q seinen Mittelpunkt hat, schneidet die Ebene E in der Conturcurve C' der Projection dieser Fläche. Eine beliebige, durch q gehende Tangentialebene der Fläche schneidet demnach die Projectionsebene in einer Tangente der Conturcurve; der Berührungspunkt e' dieser Tangente ist die Projection des Berührungspunktes e der Fläche mit der erwähnten Tangentialebene.

Zu dieser allgemein gebrauchten Construction von C' wollen wir noch hinzufügen, wie man den Krümmungskreis K dieser Contur für den beliebig auf C' gelegenen Punkt e' ermitteln würde.

Wir denken uns nämlich eine die gegebene Fläche in e osculirende Fläche zweiten Grades F und projiciren dieselbe ebenfalls von q aus in die Ebene E; dann osculirt der Conturkegelschnitt F' der Projection von F die Curve C' im Punkte e'

Der Krümmungskreis von F' in e' ist also der gesuchte Kreis K; sein Mittelpunkt k ist derjenige Punkt der Conturevolute, in welchem dieselbe von der Normalen in e' zu C' berührt wird. Der Kegelschnitt F' ist die Projection desjenigen Kegelschnittes F von F, welcher in der Polarebene Q des Punktes q in Bezug auf F enthalten ist. Somit geht Q durch die Polare von (qe) in Bezug auf die Fläche F, oder mit anderen Worten, durch den zu (qe) conjugirten Durchmesser L der Indicatrix in e für die gegebene Fläche R. Irgend ein Kegelschnitt G auf F hat mit F zwei Punkte gemeinschaftlich; seine Projection G' berührt desshalb F' in zwei Punkten. Fallen nun die Schnittpunkte von F und G zusammen, beispielsweise im Punkte e, dann schmiegt sich G' dem Kegelschnitte F' hier im Punkte e' vierpunktig an, so dass der Krümmungskreis von G' mit dem fraglichen Kreise K identisch ist.

Hieraus resultirt beiläufig folgende Construction von k, respective K.

Man sucht zu dem projicirenden Strahle (qe) den conjugirten Strahl L der Indicatrix des Punktes e, legt durch L eine beliebige Ebene (insbesondere die Normalebene) und ermittelt in bekannter Weise den Krümmungskreis G der Schnittcurve von R mit dieser Ebene; der Krümmungsmittelpunkt der Projection G' dieses Kreises in e' ist der gesuchte Punkt k.

Für die Contur der Orthogonalprojection einer Fläche führt uns diese Construction leicht zu einer von Mannheim (Cours de géom. descr., 2. Aufl., S. 301) herrührenden Formel, nach welcher der Krümmungsradius von C' für irgend einen Punkt e' berechnet wird.

Kennt man umgekehrt zu dem aus irgend einem Punkte auf (qe) der Fläche R umschriebenen Kegel einen längs (qe) sich anschmiegenden Kegel zweiten Grades, so kann man daraus leicht die Krümmung in e der Schnittcurve von R mit einer durch L gelegten Ebene ermitteln.

8. Die Übertragung der jetzt besprochenen Constructionen auf Schraubungsflächen unterliegt keinen Schwierigkeiten, da man zum Krümmungsmittelpunkte einer Curve auf der Schraubungsfläche in jedem Punkte, für den man die Osculationsebene der Curve kennt, auf kurzem Wege gelangen kann.

Für die Construction der Contur und Conturevolute der Projection einer Schraubungsfläche für den Fall, dass wir aus irgend einem im Endlichen gelegenen oder unendlich fernen Punkte q in eine Normalebene $\mathbf{M}$ der Schraubung projiciren, folgern wir aus dem II. Abschnitte ein sehr einfaches Verfahren.

Wir projiciren die Schraubungsfläche mit der Berührungscurve C des projicirenden Berührungskegels ausserdem auch orthogonal in die Ebene $\mathbf{M}$. Ist nun c ein Punkt auf C, und E die Normale in e der diesem Punkte entsprechenden Normalcurve der Schraubungsfläche, so fällt man der in Fig. 2 dargestellten Construction zufolge von Z_{I} auf $(q_{\mathrm{I}}e_{\mathrm{I}})$ die Senkrechte, welche E_{I} im Punkte e'_{I} trifft. Alsdann ist man im Stande, den Punkt r auf E nach der Erläuterung des Art.   zu construiren; die Centralprojection dieses Punktes ist der der Centralprojection von e entsprechende Krümmungsmittelpunkt der Conturcurve.

Dieses Verfahren lässt sich auch bei der Conturbestimmung der Projection einer Schraubungsfläche verwenden, wenn die Projectionsebene $\mathbf{E}$ wie immer gegen die Schraubungsaxe geneigt ist. Dasselbe führt, was die Darstellung anbelangt, allgemein rascher zum Ziele, als das vordem erläuterte. Es möge die Durchführung hier skizzirt werden.

Ist das Projectionscentrum q im Endlichen, so legt man durch dasselbe eine Normalebene der Schraubung $\mathbf{M}_q$, die man als zweite Projectionsebene betrachtet, in welche orthogonal projicirt wird. Die Projection auf diese Ebene stellt man in der Umklappung in die Projectionsebene $\mathbf{E}$ dar. Es sei abermals e der Berührungspunkt einer durch q gehenden Berührungsebene der Schraubungsfläche; seine Orthogonalprojection e_{μ} auf $\mathbf{M}_q$ und aus dieser seine Centralprojection e' auf $\mathbf{E}$ wird in bekannter Weise dargestellt. Nun ermitteln wir die dem Punkte e gehörige Normalebene der Schraubung $\mathbf{M}_e$ und zu der in ihr gelegenen Spur des aus q der Schraubungsfläche umschriebenen

Wir denken uns nämlich eine die gegebene Fläche in e osculirende Fläche zweiten Grades F und projiciren dieselbe ebenfalls von q aus in die Ebene E; dann osculirt der Conturkegelschnitt F' der Projection von F die Curve C' im Punkte e'

Der Krümmungskreis von F' in e' ist also der gesuchte Kreis K; sein Mittelpunkt k ist derjenige Punkt der Conturevolute, in welchem dieselbe von der Normalen in e' zu C' berührt wird. Der Kegelschnitt F' ist die Projection desjenigen Kegelschnittes F von F, welcher in der Polarebene Q des Punktes q in Bezug auf F enthalten ist. Somit geht Q durch die Polare von (qe) in Bezug auf die Fläche F, oder mit anderen Worten, durch den zu (qe) conjugirten Durchmesser L der Indicatrix in e für die gegebene Fläche R. Irgend ein Kegelschnitt G auf F hat mit F zwei Punkte gemeinschaftlich; seine Projection G' berührt desshalb F' in zwei Punkten. Fallen nun die Schnittpunkte von F und G zusammen, beispielsweise im Punkte e, dann schmiegt sich G' dem Kegelschnitte F' hier im Punkte e' vierpunktig an, so dass der Krümmungskreis von G' mit dem fraglichen Kreise K identisch ist.

Hieraus resultirt beiläufig folgende Construction von k, respective K.

Man sucht zu dem projicirenden Strahle (qe) den conjugirten Strahl L der Indicatrix des Punktes e, legt durch L eine beliebige Ebene (insbesondere die Normalebene) und ermittelt in bekannter Weise den Krümmungskreis G der Schnittcurve von R mit dieser Ebene; der Krümmungsmittelpunkt der Projection G' dieses Kreises in e' ist der gesuchte Punkt k.

Für die Contur der Orthogonalprojection einer Fläche führt uns diese Construction leicht zu einer von Mannheim (Cours de géom. descr., 2. Aufl., S. 301) herrührenden Formel, nach welcher der Krümmungsradius von C' für irgend einen Punkt e' berechnet wird.

Kennt man umgekehrt zu dem aus irgend einem Punkte auf (qe) der Fläche R umschriebenen Kegel einen längs (qe) sich anschmiegenden Kegel zweiten Grades, so kann man daraus leicht die Krümmung in e der Schnittcurve von R mit einer durch L gelegten Ebene ermitteln.

8. Die Übertragung der jetzt besprochenen Constructionen auf Schraubungsflächen unterliegt keinen Schwierigkeiten, da man zum Krümmungsmittelpunkte einer Curve auf der Schraubungsfläche in jedem Punkte, für den man die Osculationsebene der Curve kennt, auf kurzem Wege gelangen kann.

Für die Construction der Contur und Conturevolute der Projection einer Schraubungsfläche für den Fall, dass wir aus irgend einem im Endlichen gelegenen oder unendlich fernen Punkte q in eine Normalebene M der Schraubung projiciren, folgern wir aus dem II. Abschnitte ein sehr einfaches Verfahren.

Wir projiciren die Schraubungsfläche mit der Berührungscurve C des projicirenden Berührungskegels ausserdem auch orthogonal in die Ebene M. Ist nun e ein Punkt auf C, und E die Normale in e der diesem Punkte entsprechenden Normalcurve der Schraubungsfläche, so fällt man der in Fig. 2 dargestellten Construction zufolge von Z_{I} auf $(q_{\mathrm{I}} e_{\mathrm{I}})$ die Senkrechte, welche E_{I} im Punkte e'_{I} trifft. Alsdann ist man im Stande, den Punkt r auf E nach der Erläuterung des Art. 3 zu construiren; die Centralprojection dieses Punktes ist der der Centralprojection von e entsprechende Krümmungsmittelpunkt der Conturcurve.

Dieses Verfahren lässt sich auch bei der Conturbestimmung der Projection einer Schraubungsfläche verwenden, wenn die Projectionsebene E wie immer gegen die Schraubungsaxe geneigt ist. Dasselbe führt, was die Darstellung anbelangt, allgemein rascher zum Ziele, als das vordem erläuterte. Es möge die Durchführung hier skizzirt werden.

Ist das Projectionscentrum q im Endlichen, so legt man durch dasselbe eine Normalebene der Schraubung M_q, die man als zweite Projectionsebene betrachtet, in welche orthogonal projicirt wird. Die Projection auf diese Ebene stellt man in der Umklappung in die Projectionsebene E dar. Es sei abermals e der Berührungspunkt einer durch q gehenden Berührungsebene der Schraubungsfläche; seine Orthogonalprojection e_{μ} auf M_q und aus dieser seine Centralprojection e' auf E wird in bekannter Weise dargestellt. Nun ermitteln wir die dem Punkte e gehörige Normalebene der Schraubung M_e und zu der in ihr gelegenen Spur des aus q der Schraubungsfläche umschriebenen

Kegels den Krümmungskreis $\mathfrak{K}$ in e, dessen Radius in der umgelegten Projection auf M_q nach Früherem auf kurzem Wege erhalten wird. Die Centralprojection $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ osculirt C' im Punkte e'. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises K von $\mathfrak{K}'$ in e' ist der zu e' gehörige Punkt k der gesuchten Conturevolute. Der Radius von K kann aus dem Radius von $\mathfrak{K}$ nach der bekannten Formel von Geisenheimer[1] bequem construirt werden, wenn man die durch die bisherige Darstellung bereits gegebene centrische Collineation zwischen $\mathfrak{K}'$ und der Umlegung von $\mathfrak{K}$ in die Projectionsebene E berücksichtigt.

Für eine Parallelprojection wird unsere Darstellung nur noch einfacher. Sind aber die projicirenden Strahlen parallel zur Normalstellung der Schraubung, dann versagt das eben erläuterte Verfahren den Dienst.

Ist T die Tangente und O die Osculationsebene im Punkte e einer Curve auf einer Schraubungsfläche, so könnten wir nach dem Gesagten auch die Krümmung dieser Curve im Punkte e aufsuchen. Wir ermitteln nämlich den zu T conjugirten Durchmesser L der Indicatrix und denken uns der Schraubungsfläche die Cylinderfläche von der Richtung L umschrieben, zu welcher wir nach Früherem diejenige Cylinderfläche zweiten Grades construiren, welche sich ihr längs L anschmiegt und von den Normalebenen der Schraubung in Kreisen geschnitten wird. Der Schnittkegelschnitt dieser Cylinderfläche zweiten Grades mit O osculirt die erwähnte Curve in e. Diese Construction gestaltet sich am einfachsten, wenn in einer Normalebene der Schraubung die Spur von O senkrecht ist zur Spur der Tangentialebene in e, auf welchen Fall der allgemeine mit Hilfe des Satzes von Meusnier zurückgeführt werden kann. Indessen ist die Darstellung dieser an sich einfachen Construction umständlicher, als diejenige der früher und in »CI« abgeleiteten, diesen Gegenstand betreffenden Constructionen.

9. Projiciren wir die Schraubungsfläche parallel zur Normalstellung der Schraubung, dann lässt sich das Problem der Conturbestimmung stets auch auf den Fall der Orthogonal-

---

[1] Zeitschrift für Math. Phys., 1880, Bd. 25, S. 214, oder Chr. Wiener, Lehrb. der darst. Geom., Bd. 1, S. 218.

projection in eine zur Schraubungsaxe Z parallele Ebene zurückführen.

Aus diesem Grunde, dann wegen der häufigsten Verwendung und der überaus einfachen Darstellung wollen wir uns jetzt insbesondere mit der Construction der Contur und Conturevolute der Orthogonalprojection einer Schraubungsfläche A in eine zur Axe Z parallele Ebene N näher befassen.[1] — Fig. 7 —

Diese Contur C_{II} ist die Projection der Berührungscurve C der Schraubungsfläche mit der sie berührenden zu N normalen Cylinderfläche. Wir wollen den Mittelpunkt k_{II} des Krümmungskreises von C_{II} in irgend einem Punkte e_{II} construiren.

Wir sehen, dass die Projection der Flächennormale in einem Punkte von C auch die Normale von C_{II} in der Projection dieses Punktes ist. Bezeichnen wir also die Normale der Schraubungsfläche im Punkte e mit N und die Normale des consecutiven Punktes auf C mit N', so können wir k_{II} als Schnittpunkt von N_{II} mit N'_{II} auffassen. Denken wir uns durch die beiden Normalen N, N' eine Regelfläche zweiten Grades, so wird dieselbe von der projicirenden Ebene Y der Normale N im Punkte k berührt, dessen Projection der verlangte Krümmungsmittelpunkt k_{II} ist. Es kommt somit nur auf die Ermittelung einer derartigen Regelfläche zweiten Grades an. Als solche wählen wir ein besonderes hyperbolisches Paraboloid P Wir suchen zu dem Zwecke die Tangente T der Curve C in e, dann die Spur M der Ebene (TN) in einer Normalebene der Schraubung M. Die durch M zur Axe Z parallel gelegte Ebene Z_{μ} nehmen wir als Richtebene des Paraboloides P an, wodurch dasselbe unzweideutig bestimmt ist. Die in der durch e gehenden Normalebene der Schraubung gelegene, die Axe Z schneidende und zu N parallele Gerade J gehört gleichfalls dem Paraboloid an.[2]

Jetzt kann man auch schon ohneweiters den Berührungspunkt k der Ebene Y mit P aufsuchen. Man hat bloss durch Z_{I}

---

[1] Wir bezeichnen diese Projection als die zweite, die Hauptprojection als die erste behaltend und stellen beide Orthogonalprojectionen im üblichen Zusammenhange dar.

[2] CI, S. 911, Fig. 1.

die Parallele J_{I} zu N_{I} zu ziehen und auf dieselbe die Senkrechte von e_{I} zu fällen. Die Parallele zu M_{I} durch den Schnittpunkt i_{I} dieser Senkrechten mit J_{I} schneidet N_{I} im Punkte k_{I}, aus dem man dann k_{II} als die zweite Projection von k ableitet.

Wie man vorzugehen hätte, wenn bei Anwendung des Paraboloides P sich die Constructionen nicht mit nöthiger Genauigkeit darstellen lassen, ist aus der soeben citirten Abhandlung ersichtlich. Ist insbesondere die Tangentialebene der Schraubungsfläche in e normal zur Schnittgeraden X unserer Projectionsebene mit der Hauptprojectionsebene, so kann man folgendermassen zum Ziele kommen. Man construirt die Axen A, B der Indicatrix in e, nimmt auf Z denjenigen Punkt an, welcher von der dem Punkte e gehörigen Normalebene der Schraubung in positivem Sinne um den Parameter p entfernt ist, zieht durch ihn die Parallelen A', B' zu A respective B und lässt die Ebene $(A'B')$ um Z eine Vierteldrehung im Sinne der Schraubung vollziehen. Alsdann wird N von A' im Hauptkrümmungsmittelpunkte a des Schnittes (BN) und von B' im Hauptkrümmungsmittelpunkte b des Schnittes (AN) getroffen. Eine Regelfläche durch die benachbarten Normalen N, N' wird von den Ebenen (AN), (BN), (TN), (ZN), beziehungsweise in a, b, t und dem unendlich fernen Punkte berührt, wodurch die Ermittelung von k als des Berührungspunktes der projicirenden Ebene Y auf mannigfache Weise vorgenommen werden kann.[1]

10. In Fig. 7 ist die Construction des vorigen Artikels für eine allgemeine Schraubungsregelfläche dargestellt worden. Aus der Construction lässt sich leicht eine Formel zur Berechnung des Krümmungshalbmessers ρ von C_{II} gewinnen. An dieselbe anschliessend möge eine Gleichung der Conturevolute entwickelt werden.

Im Folgenden setzen wir den Parameter p der gegebenen Schraubungsregelfläche A, den Drehungsradius s für die Strictionshelix S, den Drehungsradius r für die Rückkehrhelix O der asymptotischen Schraubenfläche von A als bekannt voraus.

[1] Man vergl. CI, S. 913.

Die Lage irgend einer geraden Erzeugenden P der Schraubungsregelfläche lässt sich fixiren, wenn man noch den Punkt c angibt, in welchem sie die Strictionshelix schneiden soll. Betrachten wir die durch Z zur Axe X, in der sich unsere beiden Projectionsebenen schneiden, senkrechte Ebene Z als diejenige, von der aus die Drehung um Z gemessen wird, so können wir den Winkel φ, welchen die Ebene (Zc) mit Z einschliesst, als veränderlichen, die Erzeugende P bestimmenden Parameter in unsere Entwickelung einführen. Dabei ist zu bemerken, dass einem in Z als Anfangspunkt angenommenen Punkt ω von S die Amplitude θ zukommt und entsprechend der Entstehung von S man auch alle ausserhalb des Intervalls $\theta — 2\pi$ liegenden Amplituden zu berücksichtigen hat

Die Ebene M des vorigen Artikels wählen wir jetzt von e in der Entfernung p im negativen Sinne gemessen und bezeichnen sie mit M'. Dieselbe schneide N im Punkte m, T im Punkte m' und P im Punkte m'' Den Schnittpunkt von N_{I} mit $(m'_{\mathrm{I}} m''_{\mathrm{I}})$ bezeichnen wir mit j_{I}. Es ergeben sich nach einander die folgenden Ausdrücke:

$$\overline{e_{\mathrm{I}} m''_{\mathrm{I}}} = r, \quad \overline{j_{\mathrm{I}} e_{\mathrm{I}}} = r \cos \varphi, \quad \overline{e_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}}} = \frac{p^2}{r . \cos \varphi},$$

$$\overline{j_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}}} = \frac{p^2 + r^2 \cos^2 \varphi}{r \cos \varphi}.$$

$(Z_{\mathrm{I}} c_{\mathrm{I}})$ und N_{I} schneiden sich bekanntlich im Punkte o_{I} auf dem Kreise O_{I}; die Tangente dieses Kreises in o_{I} schneide Z_{I} in z_{I}; trägt man $\overline{o_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}}} = \overline{z_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}}}$ auf diese Tangente auf, so erhält man in der Verbindungsgeraden $(f_{\mathrm{I}} e_{\mathrm{I}})$ die Tangente T_{I}. Fällen wir noch von f_{I} auf N_{I} die Senkrechte, deren Fusspunkt g_{I} heissen möge, so findet man weiter

$$\overline{f_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}}} = \frac{r \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \qquad \overline{e_{\mathrm{I}} g_{\mathrm{I}}} = \frac{r(1 + \sin^2 \varphi) \pm s}{\sin \varphi}$$

und

$$\overline{m'_{\mathrm{I}} j_{\mathrm{I}}} = \frac{r^2 \sin^3 \varphi}{r(1 + \sin^2 \varphi) \pm s}.$$

Aus den Dreiecken $(i_{\mathrm{I}} e_{\mathrm{I}} k_{\mathrm{I}})$, $(m'_{\mathrm{I}} j_{\mathrm{I}} m_{\mathrm{I}})$ folgt

$$\overline{e_{\mathrm{I}} k_{\mathrm{I}}} = \frac{p^2 + r^2 \cos^2 \varphi}{r^2 \sin^3 \varphi} . [r(1+\sin^2 \varphi) \pm s],$$

so dass schliesslich für den gesuchten Radius sich ergibt

$$\rho = \frac{r(1+\sin^2 \varphi) \pm s}{p r^2 \sin^3 \varphi} . (p^2 + r^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}.$$

Für die Scheitelpunkte der Conturcurve ist $\sin \varphi = 1$, $\cos \varphi = 0$, somit der Krümmungsradius $\rho_0 = \frac{p^2}{r^2} . (2r \pm s)$.

Die Gleichungen der Contur und Conturevolute entwickeln wir in rechtwinkeligen Coordinaten, und zwar wählen wir für das Coordinatensystem die Projection ω_{II} des zuvor hervorgehobenen Punktes ω als Ursprung, Z_{II} der Lage und dem Sinne nach als Y-Axe; was die X-Axe der Coordinaten anbelangt, so nehmen wir bei rechtsseitiger Schraubung den einen, bei linksseitiger den anderen Sinn derselben als positiv an, etwa wie in der Figur angedeutet worden ist. Dieser Anordnung zufolge ist, wie leicht aus dem Zusammenhange der Constructionslinien zu entnehmen, die Conturcurve ausgedrückt durch die beiden Gleichungen

$$x = \frac{r \cos^2 \varphi \pm s}{\sin \varphi} \qquad y = p\left(\varphi - \frac{r \pm s}{r} \cot \varphi\right)$$

und mit Berücksichtigung des Ausdruckes für ergeben sich aus diesen Gleichungen die beiden Gleichungen für die Conturevolute

$$x = \frac{1}{r^2 \sin^3 \varphi} \left\{ p^2 r(1+\sin^2 \varphi) + r^3 \cos^2 \varphi (1+2\sin^2 \varphi) \pm s(p^2+r^2) \right\},$$

$$y = p\varphi + \frac{\cos \varphi}{p r \sin^3 \varphi} \left\{ p^2 r + r^3 \cos^2 \varphi (1+\sin^2 \varphi) \pm s(p^2+r^2) \cos^2 \varphi \right\}.$$

Für $s = 0$ folgen aus unseren Gleichungen die Gleichungen für die Conturcurven und Conturevoluten axialer (geschlossener)

Schraubungsregelflächen in ähnlicher Form wie sie Herr Tesař geliefert hat.[1]

11. Für die Schraubungsregelflächen ergeben sich nebstdem noch andere Lösungen des in Art. 9 behandelten Problems, die wir noch besprechen wollen.

Es sei wie vordem e_{II} die Projection des Berührungspunktes der durch die Erzeugende P gelegten projicirenden Ebene mit der Schraubungsregelfläche und wir wollen wieder den Mittelpunkt k_{II} des zu e_{II} gehörigen Krümmungskreises von C_{II} construiren.

Wir denken uns das die Schraubungsfläche längs P osculirende Hyperboloid H. Der Conturkegelschnitt F_{II} seiner Projection osculirt C_{II} in e_{II}, hat also für diesen Punkt mit C_{II} denselben Krümmungsmittelpunkt. F_{II} ist die Projection eines Kegelschnittes F von H, auf dessen Darstellung es bei unserer Aufgabe lediglich ankommt. Da wir von diesem Kegelschnitt einen Punkt e kennen, so reicht es zu seiner Bestimmung hin, wenn wir etwa noch seine Durchmesserinvolution ausdrücken. — Fig. 8.

Die Senkrechte vom Centralpunkte c der Erzeugenden P auf die Schraubungsaxe Z trifft die Rückkehrhelix O im Mittelpunkte o des Hyperboloids H, somit auch des Kegelschnittes F. Die durch o zur Tangente T der Curve C im Punkte e gezogene Parallele G bildet mit (oe) ein Paar conjugirter Durchmesser von F, deren Projectionen $G_{II} \| P_{II}$ und $(o_{II} e_{II})$ ein Paar conjugirter Durchmesser in Bezug auf F_{II} sind. Bezeichnen wir die Contur der ersten Projection von H mit H_{I}. Dieselbe ist die Projection des Kegelschnittes H auf II. Die Ebenen von H und F schneiden sich in einem Durchmesser V' des Hyperboloids, dessen Polare in Bezug auf dasselbe unendlich fern durch die Normalstellung zu X gegeben ist. Deshalb schneidet die durch o senkrecht zu X gelegte Ebene die Ebene von F in dem zu V' conjugirten Durchmesser V dieses Kegelschnittes. Zu dem Durchmesser V' führt uns folgende Überlegung. Da der Kreis S_{I} den Kegelschnitt H_{I} im Scheitel c_{I} osculirt, so kann man

[1] J. Tesař, »Conturevolute axialer Schraubenflächen«, diese Sitzungsberichte, Bd. 94, Abth. II, S. 181.

beide als sich doppelt berührende Kegelschnitte auffassen; P_{I} ist die Berührungssehne. Die Polaren irgend eines Punktes in Bezug auf solche Kegelschnitte schneiden sich auf der Berührungssehne. Aus diesem Grunde ist der Schnittpunkt i_{I} der durch Z_{I} zu X_{I} gezogenen Parallelen N'_{I} mit P_{I} auch schon ein Punkt von V'_{I}. Die Ebene von H geht durch die Tangente T_{σ} in c an die Strictionshelix S; somit ist i_{I} die Projection des Punktes i auf T_{σ}, der dem Durchmesser V' angehört. Die Gerade T_{σ} ist dadurch ermittelt worden, dass wir ihren Punkt m^{σ} in der Normalebene der Schraubung, welche von c die Entfernung $-p$ hat, construirt haben. Es bildet demnach die von o_{II} auf X_{II} gefällte Senkrechte V_{II} mit der Geraden $V'_{\mathrm{II}} \equiv (o_{\mathrm{II}} i_{\mathrm{II}})$ ein zweites Paar conjugirter Durchmesser von F_{II}.

Zieht man durch e_{I} die Parallele zu $(o_{\mathrm{I}} Z_{\mathrm{I}})$, bis sie N'_{I} in j_{I} trifft, so ist $(o_{\mathrm{I}} j_{\mathrm{I}})$ parallel zur ersten Spur der Ebene von F[1] Irgend eine Normalebene der Schraubung M' werde von der asymptotischen Ebene (oP) in der Geraden M' getroffen. Alsdann ist die durch den Schnittpunkt von M'_{I} mit $(e_{\mathrm{I}} o_{\mathrm{I}})$ zu $(o_{\mathrm{I}} j_{\mathrm{I}})$ gezogene Parallele L'_{I} die Projection der Spurgeraden, in welcher die Ebene des Kegelschnittes F von M' geschnitten wird.

Denken wir uns ferner durch o die zu P parallele Erzeugende P' der asymptotischen Schraubungsfläche, so schneidet die durch P' zu Z parallel gelegte Ebene die Gerade L' im Mittelpunkte l des Spurkegelschnittes U in M' für den asymptotischen Kegel des Hyperboloids H, wie leicht einzusehen ist. Übrigens lässt die Darstellung von l verschiedene Variationen zu. Die Verbindungsgerade Q der Punkte l und o ist ein Durchmesser von F; die zu ihm in Bezug auf den asymptotischen Kegel von H, also in Bezug auf H selbst conjugirte Durchmesserebene ist parallel zu M' und trifft die Ebene von F in dem zu (lo) conjugirten Durchmesser. Hiemit repräsentirt Q_{II} und $(o_{\mathrm{II}} c_{\mathrm{II}})$ ein drittes Paar conjugirter Durchmesser von F_{II}.

Die Ermittlung des Durchmessers Q vereinfacht sich noch erheblich, wenn wir statt einer beliebigen Normalebene der Schraubung M' diejenige M_e wählen, welche durch den Punkt e selbst geht. Wenden wir nämlich jetzt die soeben durchgeführte

[1] Monatshefte a. a. O.

Construction an, so ergibt sich, wenn wir auf $(c_I o_I)$ die Länge $\overline{o_I q'_I} = \overline{Z_I o_I}$ auftragen, dass $(q'_I e_I)$ die Gerade F'_I in der Projection q_I des Schnittpunktes q von Q mit $\mathfrak{M}_e$ trifft.

Da das Durchmesserpaar G_{II} $(o_{II} e_{II})$ unmittelbar gegeben ist, so reicht es hin, bloss eines der Paare $V_{II} V'_{II}$, Q_{II} $(o_{II} c_{II})$ noch zu construiren, wodurch dann die Durchmesserinvolution von F_{II} bestimmt ist.

Den Krümmungsmittelpunkt k_{II} können wir auf N_{II} etwa in der Weise ermitteln, dass wir den Parameter d der Involution, in welcher P_{II} von der Durchmesserinvolution getroffen wird, aufsuchen. Dieser Parameter gibt die Länge des zu $(o_{II} e_{II})$ conjugirten Durchmessers von F_{II} an. Ist weiter t die Entfernung des Punktes o_{II} von P_{II}, so ergibt sich k_{II} aus der bekannten Gleichung $\rho = \frac{d^2}{t}$, wenn wir wieder für $\overline{e_{II} k_{II}}$ kurzweg ρ setzen.

Für den Fall einer axialen Schraubungsfläche ist U eine Ellipse, hiemit F_{II} eine Hyperbel. Die Construction von k_{II} kann jetzt wie folgt vorgenommen werden. — Fig. 9. —

Wir legen die Normalebene der Schraubung $\mathfrak{M}'$ in der Entfernung $2p$ von c etwa im negativen Sinne gemessen. Ist m' der Spurpunkt von P in dieser Ebene, so ist der auf O_I liegende Punkt p_I von P_I, welcher in der Mitte von $\overline{c_I m'_I}$ liegt, ein Brennpunkt von U; machen wir $\overline{o_I l_I} \#\!\!\!= \overline{c_I p_I}$, so ist l_I der Mittelpunkt und $\overline{l_I c_I}$ die Länge der Hauptaxe von V_I Legen wir desshalb durch c_I den Kreis, welcher in l_I seinen Mittelpunkt hat, so wird derselbe von der durch p_I zu X_I gezogenen Parallelen in zwei reellen Punkten $g_I g'_I$ geschnitten, welche als Projectionen zweier Punkte in der Ebene $\mathfrak{M}'$ aufzufassen sind. Die Geraden $(g_{II} o_{II})$, $(g'_{II} o_{II})$ sind die Asymptoten von F_{II}. Schneidet also etwa $(g_{II} o_{II})$ die Gerade P_{II} in h_{II}, so repräsentirt $\overline{h_{II} e_{II}}$ die Länge d, so dass k_{II} nach obiger Formel jetzt ohne weiters erhalten wird.

Einfacher gelangt man auch hier zum Ziele, wie man im nächsten Artikel sehen wird, wenn man die Durchmesserinvolution von F_{II} darstellt.

Trägt man $\overline{cj} = \overline{ec}$ auf die Erzeugende P auf und fällt von j die Senkrechte auf Z, so ist der Fusspunkt dieser Senkrechten der früher mit i bezeichnete Punkt, so dass (io) auch jetzt der Durchmesser V' von F ist. Dies leuchtet sogleich ein, wenn man den Berührungspunkt von Z_{II} mit F_{II} nach dem Satze von Brianchon sucht.

Wollte man den zu $(c_{II} o_{II})$ conjugirten Durchmesser $\underset{\sim}{Q}_{II}$ von F_{II} darstellen, so könnte man hier ebenso einfach wie den Punkt q, auch den Punkt l von $\underset{\sim}{Q}$ in der zuletzt angenommenen Ebene M′, dessen Projection l_I soeben benutzt worden ist, construiren.

Durch nachstehende Modification wird die Construction dieses Artikels noch vereinfacht.

Wir legen nämlich durch o die Parallele G zu T und bestimmen auf ihr die Involution conjugirter Punkte bezüglich der Fläche II. Der Parameter dieser Involution wird abermals durch d repräsentirt. Der Mittelpunkt o und der unendlich ferne Punkt $g\infty$ von G bilden ein Paar dieser Involution. Die Polarebene eines beliebigen Punktes u auf G schneidet G in dem conjugirten Punkte u' von u und durch uu' ist ein zweites Paar besagter Involution bestimmt. Die zu G conjugirte Durchmesserebene von II geht durch (oe) und ist senkrecht zu unserer zweiten Projectionsebene. Die Polarebene von u muss zu dieser Ebene parallel sein; sie wird deshalb bestimmt sein, wenn wir noch einen ihrer Punkte aufsuchen. Wählen wir nun den Punkt u im Schnitte der Tangentialebene der Schraubungsfläche, also auch der Fläche II in einem beliebig auf P angenommenen Punkte, so geht durch diesen auch schon die Polarebene des Punktes u und ist dem Gesagten zufolge bereits vollkommen bestimmt.

In unserem Falle haben wir u im Schnitte der Centralebene durch P mit G angenommen, so dass die Polarebene von u durch den Centralpunkt c geht. Es schneidet somit die durch c_{II} zu $(e_{II} o_{II})$ gezogene Parallele den Durchmesser G_{II} im Punkte u'_{II}.

Die Involution $o_{II} g\infty_{II}, u_{II} u'_{II}, \ldots$ auf G_{II} kann man behufs Construction von d schon im Vorhinein in der Richtung von $(o_{II} e_{II})$ verschieben, bis sie auf die Gerade P_{II} beziehungsweise nach $e_{II} p_{\infty II}, v_{II} c_{II}, \ldots$ zu liegen kommt.

Haben wir nun d construirt, so wird ρ wieder aus obiger Relation erhalten. Statt dessen können wir auch in folgender Art verfahren.

Wir projiciren die Involution $e_{II} p_{\infty II}, v_{II} c_{II}, \ldots$ von o_{II} aus durch eine Strahleninvolution, die wir als Durchmesserinvolution des durch e_{II} gehenden Kegelschnittes F'_{II} auffassen wollen. Dabei können wir F'_{II} im Sinne von Chr. Wiener als die durch die Richtung von P_{II} gegebene Imaginärprojection von F_{II} betrachten. Die Kegelschnitte F_{II}, F'_{II} haben in e_{II} der Grösse nach gleiche, dem Sinne nach entgegengesetzte Krümmungsradien. Unsere Aufgabe ist also gelöst, wenn wir den Krümmungsmittelpunkt k'_{II} von F'_{II} in e_{II} aufsuchen, zu welchem Zwecke wir etwa nach der im folgenden Artikel erläuterten Construction vorgehen.

Dass man auch hier aus dem Zusammenhange der Constructionslinien den analytischen Ausdruck für ρ und die Gleichung der Conturevolute in früher gegebener Form leicht von Neuem finden würde, ist selbstverständlich.

Die Ableitung der Conturevolute einer beliebigen Parallelprojection oder Centralprojection für irgend eine Schraubungsregelfläche könnte auf Grund ähnlicher Betrachtungen bewerkstelligt werden.

12. Im vorigen Artikel haben wir die Bestimmung von ρ abhängig gemacht von der Ermittelung des Parameters d einer Involution, die zwar rasch durchgeführt werden kann, jedoch auf einer quadratischen Construction beruht. Linear und zudem auf kürzerem Wege kann ρ auf Grund der Betrachtungen von Herrn C. Pelz in seiner Abhandlung: »Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steiner'schen Satzes« in den Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellschaft der Wissensch. in Prag, Jhrg. 1879, S. 205, gefunden werden.

Den erwähnten Satz leitet H. Pelz in folgender Form ab: »Wird in der Ebene eines Kegelschnittes C um einen beliebigen Punkt t desselben ein Strahl gedreht, so ist die Enveloppe des ihm in jeder Lage bezüglich C conjugirten Normalstrahles eine Parabel, welche die Kegelschnittaxen, die Tangente und Normale von t und zwar die letztere im Krümmungsmittelpunkte des Punktes t berührt.«

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe: Von einem Kegelschnitte, dessen Mittelpunkt wir mit o bezeichnen wollen, ist ein Punkt t mit seiner Tangente T und nebstdem ein Paar conjugirter Durchmesser, welches T in den Punkten a, b treffen möge, gegeben; es ist der dem Punkte t entsprechende Krümmungsmittelpunkt t_o, eventuell Krümmungsradius ρ des Kegelschnittes zu construiren. — Fig. 9 *a*. —

Wir fällen etwa von a auf (bo) die Senkrechte N_a. Nun ist die Steiner'sche Parabel $\mathfrak{P}$ bestimmt; denn die Geraden T, N^a und die Normale N des Kegelschnittes in t sind drei Tangenten derselben und die Senkrechte zu (to) gibt die Richtung der Axe an. Den Berührungspunkt t_o von N mit $\mathfrak{P}$ ermitteln wir nach dem Satze von Brianchon. Bezeichnen wir N mit 1, 2, T mit 3, N_a mit 4, und die unendlich ferne Gerade mit 5, 6, so ergibt sich aus dem Sechsseit 123456 der Punkt t_o in folgender Weise. Wir errichten in t die Senkrechte zu (to) und in a die Senkrechte zu T und ziehen durch den Schnittpunkt f beider Senkrechten die Parallele zu N_a, welche N in t_o trifft.

Bezeichnen wir noch den Punkt (NN_a) durch a_o und den Schnittpunkt der Normale N mit der von a auf (to) gefällten Senkrechten durch a', so folgt aus den congruenten Dreiecken tt_of, $a'a_oa$, dass $\overline{tt_o} = \overline{a'a_o}$.

Daraus haben wir folgende einfache Lösung der gestellten Aufgabe. Wir errichten von a auf (ob) und auf (ot) die Senkrechten, welche aus der Normale N eine Strecke herausschneiden, die gleich dem gesuchten Radius ρ ist.

Ist die Länge d des zu (to) conjugirten Durchmessers gegeben, dann trägt man $\overline{ta} = \pm\overline{tb} = d$ auf die Tangente T auf und erhält die Construction auf S. 228 der citirten Abhandlung; alsdann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke obt, aa_oa' sogleich auch die im vorigen Artikel verwendete Formel $\rho = \frac{d^2}{t}$

Zu der eben erwähnten Abhandlung erlaube ich mir hier folgende, unwesentliche Bemerkung zu machen. Die in derselben enthaltenen Krümmungsmittelpunkt-Constructionen werden nach dem Steiner'schen Satze mit Hilfe des Satzes von Brianchon construirt. In der vortheilhaften Wahl des Sechseits liegt die Einfachheit der Construction. Um die Wiederholung dieser Wahl zu vermeiden und das Constructionsresultat directer zu erhalten, kann man sich des folgenden Hilfssatzes bedienen.

»Wenn man in der Richtung der Axe einer Parabel projicirt, so projiciren sich die Abschnitte, welche auf sämmtlichen Tangenten dieser Parabel durch zwei feste Tangenten derselben gebildet werden, auf irgend eine dritte Tangente der Parabel in gleiche Strecken.«

Dieser Satz ergibt sich leicht aus dem Satze von Brianchon; übrigens kann er auch in folgender Art abgeleitet werden.

Nehmen wir vorerst als feste Tangenten die Scheiteltangente A und eine beliebige Tangente B an, bezeichnen mit g den Brennpunkt, mit v den Scheitel der Parabel, mit m den auf A liegenden Fusspunkt des von g auf B gefällten Lothes. und es sei D eine beliebige Parabeltangente, welche A in n, B in p treffen möge. Weiter sei A auch diejenige Tangente, auf welche projicirt wird. Ist p^+ der Fusspunkt der Senkrechten von p auf A, so ist $\overline{np^+}$ die Projection von $\overline{np}$. Die Punkte g, p, m, n liegen auf einem Kreise; die Punkte v und p^+ sind die Projectionen der Endpunkte des Durchmessers (gp) dieses Kreises. Projiciren wir noch den Mittelpunkt desselben auf A, so sehen wir sogleich, dass $\overline{np^+} = \overline{vm}$ ist. Damit ist der Satz für unsere specielle Annahme bewiesen, und die Richtigkeit des Satzes in der allgemeinen Fassung leuchtet daraus gleich ein.

In der obigen Aufgabe wählen wir T und N als die zwei festen, N auch schon als die dritte Tangente unseres Hilfssatzes und projiciren die auf den Tangenten N_a und N durch die beiden festen Tangenten gebildeten Abschnitte $\overline{aa_0}$, $\overline{tt_0}$ nach $\overline{a'a_0}$ respective $\overline{tt_0}$, wir finden sogleich, dass $\overline{tt_0} = \overline{a'a_0}$ ist.

Bezüglich der Anwendung der soeben entwickelten Construction zur Ermittelung des Punktes k_{II} im vorigen Artikel braucht nun nichts mehr bemerkt zu werden.

13. Für axiale Schraubungsregelflächen hat Herr J. Tesař eine Construction der Contur und Conturevolute der Orthogonalprojection in eine zur Schraubungsaxe parallele Ebene N auf kinematischem Wege geliefert. Es geschah dies in zwei Abhandlungen dieser Sitzungsberichte. (Kinematische Bestimmung der Contur einer windsch. Schraubenfläche«, Bd. LXXXVI, II. Abth., und »Die Conturevolute axialer Schraubenflächen«, Bd. XCIV, II. Abth.)

Er betrachtet die Projectionen der die Schraubungsfläche erzeugenden Geraden als einzelne Lagen einer in der Projectionsebene N sich bewegenden Geraden und bestimmt die Krümmungsmittelpunkte der von sämmtlichen Lagen dieser Geraden umhüllten Enveloppe. Indem er hiebei die Punktreihe auf der sich bewegenden Geraden als unveränderlich voraussetzt, wird er zu einer Bewegung geführt, die sich aus einer Oscilation und einer Translation zusammensetzen lässt.

Ich will zum Schlusse meiner Untersuchungen noch zeigen, wie man dieses Problem mit den Mitteln der Geometrie der Bewegung allein, ohne dass man Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Betracht zieht, einfach und für Schraubungsregelflächen überhaupt lösen kann.

Eine Schraubungsregelfläche A' wird durch Schraubung einer Geraden P' um eine Axe Z' erzeugt;[1] bei dieser Bewegung beschreibt jeder Punkt der Geraden eine Helix; die Punktreihe auf P' bleibt aber in allen Lagen unveränderlich.

Da nun durch Parallelprojection in eine Ebene eine Punktreihe in eine ähnliche Punktreihe projicirt wird, so können wir mit Bezug darauf unsere Aufgabe folgendermassen formuliren. »Ein ähnlich veränderliches System bewegt sich in der Ebene N so, dass jeder Punkt des Systems eine Sinusoide beschreibt; es sind einzelne Punkte und die ihnen zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der von der Systemgeraden P während der Bewegung umhüllten Enveloppe C zu construiren.«

Wir wollen den Punkt e von C auf der Geraden P sowie den ihm entsprechenden Krümmungsmittelpunkt k ermitteln. — Fig. 10. —

Die Bahntangenten aller Punkte von P umhüllen eine Parabel $\mathfrak{P}$, welche von der Geraden P im Punkte e der Contur berührt wird. Die Tangenten dieser Parabel sind Projectionen von Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids, dessen Axe senkrecht zur Schraubungsaxe Z' ist. Daraus folgt, dass die Axe der Parabel $\mathfrak{P}$ senkrech ist zur Projection Z der Schraubungsaxe. Demnach reicht es zur Bestimmung von $\mathfrak{P}$

[1] Der Übersichtlichkeit wegen wird in diesem Artikel bei den Symbolen der Projectionen in die Ebene N der Zifferindex unterdrückt; den Symbolen der projicirten Raumgebilde wird dafür ein Strich beigesetzt. Auch wird es nicht beirren, dass die Symbole der Projectionen auch zur Bezeichnung ihrer Abbildungen in Fig. 10 beibehalten worden sind.

hin, wenn wir ausser P noch zwei Tangenten dieser Parabel kennen.

Wir werden also noch die Tangenten T'_γ, T'_δ in zwei Punkten c', respective d' von P' an die zugehörigen Schraubenlinien von A' durch ihre Projectionen T_γ, T_δ auszudrücken haben. Dann ermitteln wir den Berührungspunkt e der Tangente P mit der Parabel vortheilhaft nach dem Hilfssatze des 12. Artikels.

Wir wählen hier T_δ und P als die festen Tangenten und P als die dritte in dem Satze erwähnte Tangente der Parabel $\mathfrak{P}$. Auf diesen angenommenen Tangenten bestimme T_γ den Abschnitt $\overline{cp}$, welcher nach $\overline{cp^+}$ auf P projicirt wird; die zu P unendlich benachbarte Tangente der Parabel bestimmt auf denselben zwei Tangenten einen Abschnitt, der nach $\overline{ed}$ projicirt wird. Es ist also $\overline{de} = \overline{p^+c}$, wodurch e in einfacher Weise construirt wird.

Wir haben bei unserer Darstellung zwei beliebige Tangenten $T_\gamma T_\delta$ der Parabel ermittelt; wir können jedoch statt einer von ihnen vortheilhaft die Scheiteltangente T_α construiren. Zu dem Behufe denken wir uns die zur Projectionsebene N parallele Meridianebene der Schraubungsfläche und bringen die Gerade P' mit ihr im Punkte a' zum Schnitte. Die Scheiteltangente T_α geht durch a und ist parallel zu Z; sie ist die Projection der Tangente T'_α der dem Punkte a' in der Schraubung gehörigen Helix. Für eine axiale Schraubungsregelfläche fällt T'_α mit der Axe Z', also T_α mit Z zusammen.

Projiciren wir somit etwa den Schnittpunkt q von T_γ mit T_α senkrecht zu Z auf die Gerade P nach q^+, so hat man abermals $\overline{ae} = \overline{q^+c}$ zu machen, um den Punkt e zu erhalten.[1]

Bevor wir zur Construction von k selbst schreiten, schicken wir folgende Erwägung voraus.

Ist zunächst P irgend eine Gerade in unserem ähnlich veränderlichen Systeme, e der Punkt auf ihr, in welchem sie von ihrer Hüllbahncurve berührt wird und o der Schnittpunkt der Normalen N in e zu der Geraden P mit der Bahnnormale irgend eines Punktes x auf P, so können wir o als momentanen

[1] Man vergleiche damit die Entwickelung dieser Construction durch Herrn C. Pelz in diesen Sitzungsberichten, Bd. 87, II. Abth.

Drehungspol für eine Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in der Ebene N betrachten, welche, was die Gerade P und den auf ihr liegenden Punkt x anbelangt, unsere Bewegung im ähnlich veränderlichen System vollständig ersetzt.

Kennt man den dem Punkte x entsprechenden Krümmungsmittelpunkt x^+ der Bahncurve von x, sowie den dem Punkte e entsprechenden Krümmungsmittelpunkt k der Hüllbahncurve von P, so lässt sich auch leicht der Wendekreis der ersetzenden Bewegung ermitteln. Für die Umkehrung dieser Bewegung geht nämlich der Wendekreis W durch o, k und durch einen Punkt x_o auf (xo), welcher aus der quadratischen Verwandtschaft zwischen den Punkten des bewegten, unveränderlichen Systems und den Krümmungsmittelpunkten ihrer Bahnen leicht ermittelt wird.

Je näher nun der Punkt x auf P zu dem Punkte e rückt, desto näher rückt der Punkt x_o dem Punkte k, bis er an der Grenze mit ihm zusammenfällt.

Daraus entnehmen wir folgende Construction des fraglichen Krümmungsmittelpunktes k unserer Enveloppe C.

1. Wir construiren den Schnittpunkt o der Normale N von C im Punkte e mit der Bahnnormale des zu e consecutiven Punktes von P

2. Wir construiren den Krümmungsmittelpunkt e^+ der sinusoidischen Bahn, welche der mit e incidente Punkt x von P beschreibt.

3. Wir ermitteln schliesslich den Punkt auf N, welcher dem Wendekreise für die umgekehrte der hervorgehobenen ersetzenden Bewegung gehört und bereits der gesuchte Krümmungsmittelpunkt k ist.

Die Bahnnormalen für alle Punkte auf P umhüllen eine Parabel $\mathfrak{P}_+$, denn sie verbinden die Punktreihe auf P mit einer zu ihr projectiven Punktreihe auf der unendlich fernen Geraden der Ebene. Die letztere Punktreihe wird aus irgend einem Punkte der Ebene im Endlichen durch einen Strahlenbüschel projicirt, welcher congruent mit demjenigen Strahlenbüschel ist, durch welchen die unendlich ferne, durch die Tangenten von $\mathfrak{P}$ erzeugte Punktreihe aus demselben Punkte projicirt wird; beide Strahlenbüschel differiren nur der Lage nach um eine Vierteldrehung.

Daraus ergibt sich, dass die Parabeln $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_+$ denselben Brennpunkt f im Endlichen besitzen, und dass ihre Axen mit einander einen Winkel von 90° einschliessen. In Folge dessen ist die in a zu Z errichtete Senkrechte N_a die Axe von $\mathfrak{P}_+$. Der Punkt e liegt auf der Directrix von $\mathfrak{P}_+$, weshalb die in f zu (ef) errichtete Senkrechte die Normale N in ihrem Berührungspunkte mit der Parabel $\mathfrak{P}_+$ trifft. Dieser Berührungspunkt ist der momentane Drehungspol o.

Daraus folgt sogleich, dass man den Punkt o erhält, wenn man die durch T_a und N_a auf der Normale N herausgeschnittene Strecke auf dieselbe von e nach $\overline{eo}$ überträgt.

Der Punkt e^+ ist der Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes, in welchen der Krümmungskreis im Punkte e der diesem Punkte in der Schraubung zugehörigen Helix auf die Ebene N projicirt wird. Oder, denkt man sich die Schnittellipse der Osculationsebene in e für die erwähnte Helix mit dem durch e gehenden Rotationscylinder von der Axe Z' in die Ebene N projicirt, so ist e^+ auch der Mittelpunkt des Krümmungskreises dieser Projection in e. Für diese Projection ist der Fusspunkt g der Senkrechten von e auf Z der Mittelpunkt. Zieht man in der Entfernung des Parameters p von e die Senkrechte zu Z, so schneidet dieselbe P im Punkte v und $\overline{ev}$ ist die Länge d des zu (ge) conjugirten Durchmessers der besagten Projection. Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes g von P wieder durch t, so ist alsdann $\overline{ee^+} = \frac{d^2}{t}$ Nach dieser Relation wurde in der Figur e^+ dargestellt.

Ist schliesslich e^o der zu o in Bezug auf e^+ symmetrische Punkt, so ist nach einer bekannten Regel [1] der in Frage stehende Punkt k als dem Wendekreise W gehörend der durch das Punktepaar oe^o von e harmonisch getrennte Punkt und wird als solcher einfach erhalten.

Aus der eben abgeleiteten Construction lässt sich der früher gewonnene Ausdruck für ρ gleichfalls sehr einfach entwickeln, Wir erhalten die Werthe

---

[1] Man sehe etwa Dr. Arthur Schoenflies Geometrie der Bewegung 1886, S. 26.

$$\overline{eo} = \frac{(p^2+r^2\cos^2\varphi)^{3/2}}{pr\sin\varphi}, \quad \overline{ee^+} = \frac{(p^2+r^2\cos^2\varphi)^{3/2}.\sin\varphi}{-p(r\cos^2\varphi\pm s)},$$

$$\overline{e^+o} = \frac{(p^2+r^2\cos^2\varphi)^{3/2}(r\pm s)}{pr\sin\varphi\,(r\cos^2\varphi\pm s)},$$

aus welchen etwa nach der Formel $\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\overline{eo}} + \frac{1}{\overline{ee^+}+\overline{oe^+}}$ der Ausdruck sich ergibt

$$\rho = \frac{(p^2+r^2\cos^2\varphi)^{3/2}}{pr^2\sin^3\varphi}[r(1+\sin^2\varphi)\pm s],$$

aus dem die Gleichungen der Conturevolute selbst wie früher hergeleitet werden.

Wir haben die Construction der Conturcurven und Conturevoluten der Schraubungsregelflächen für die Orthogonalprojection in eine zur Schraubungsaxe parallele Ebene durchgeführt. Es ist klar, dass unsere Entwickelungen Schritt für Schritt fortbestehen bleiben für irgend eine Parallelprojection in eine gegen die Schraubungsaxe wie immer geneigte Ebene; die Bahnen einzelner Punkte des in der Projectionsebene beweglichen ähnlich veränderlichen Systems sind zwar keine Sinusoiden mehr, aber die Krümmungskreise ihrer Punkte kann man wie vorher construiren. Die Scheiteltangente der Parabel $\mathfrak{P}$ hat allgemein nicht mehr die ausgezeichnete Lage wie zuvor, aber dies setzt unserer Construction keine Schwierigkeiten in den Weg.

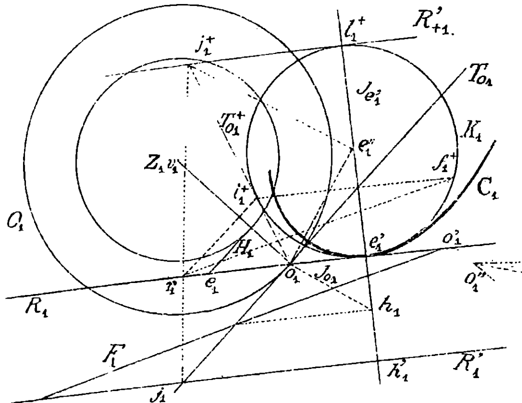

Fig. 3.

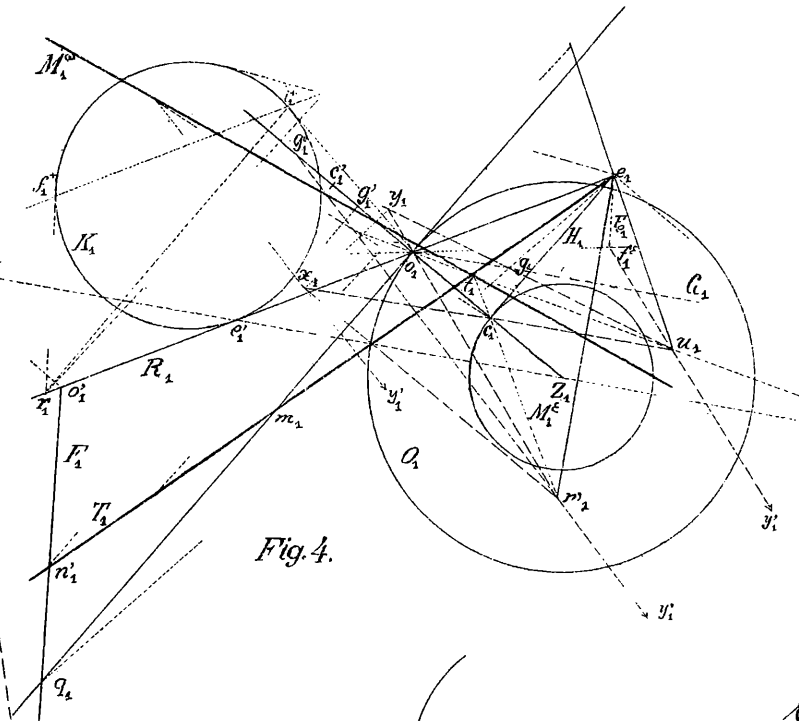

Fig. 4.

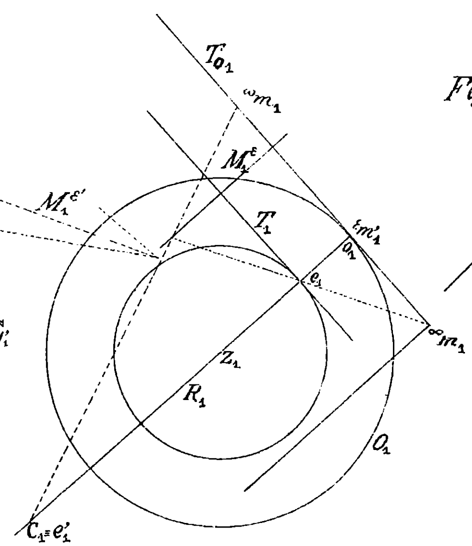

Fig. 5.

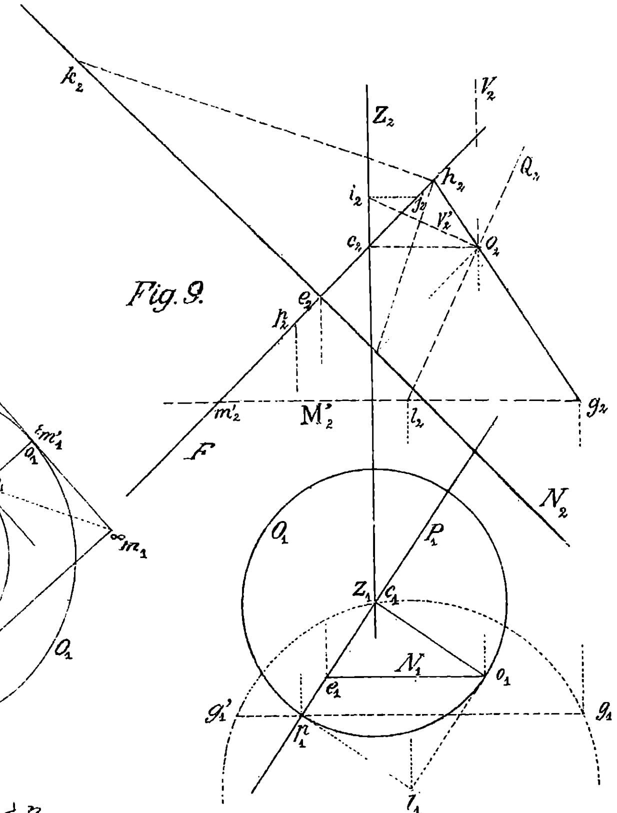

Fig. 9.

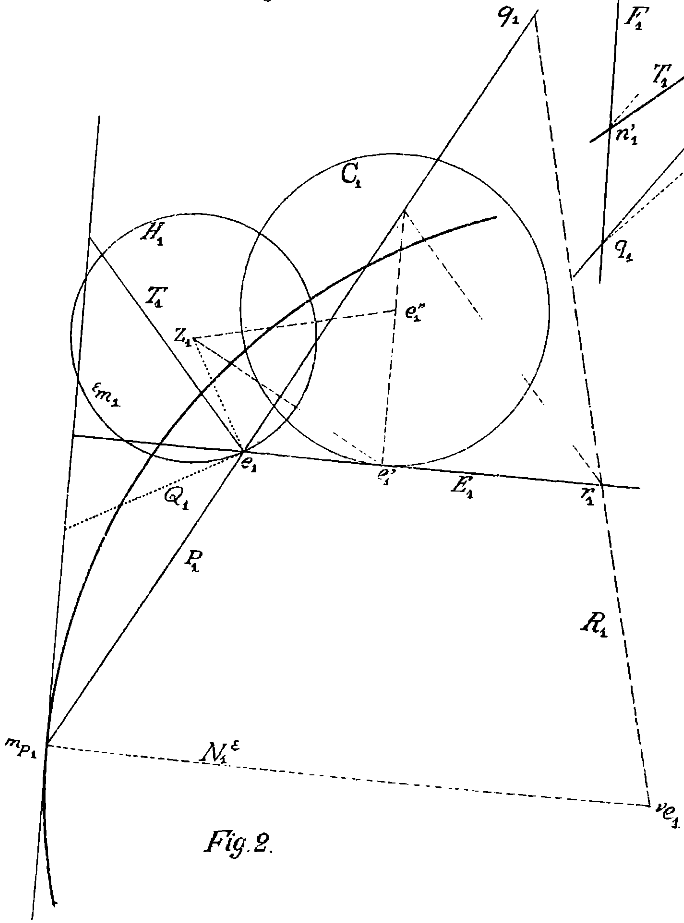

Fig. 2.

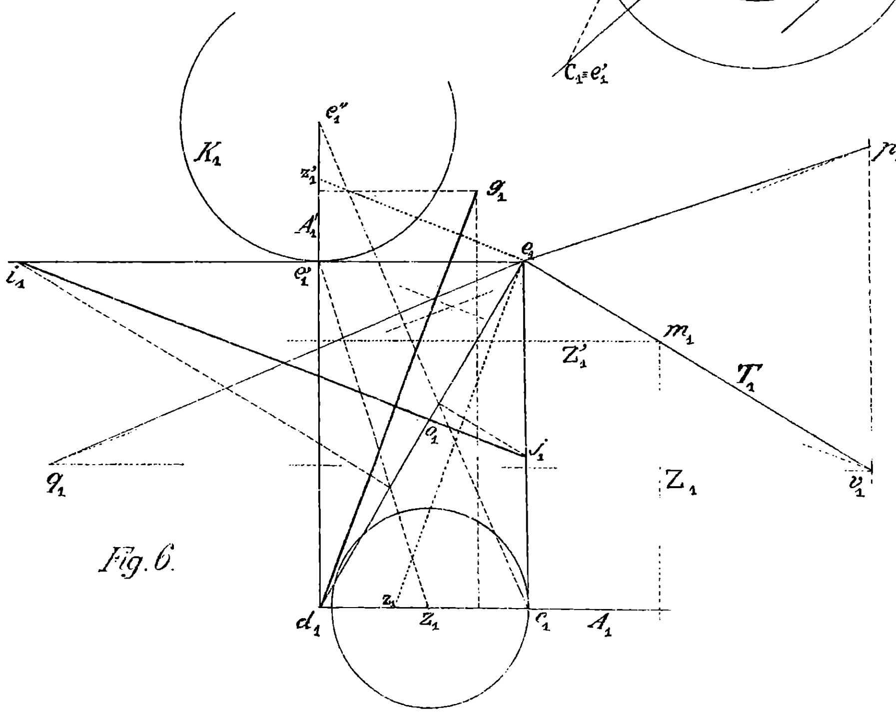

Fig. 6.

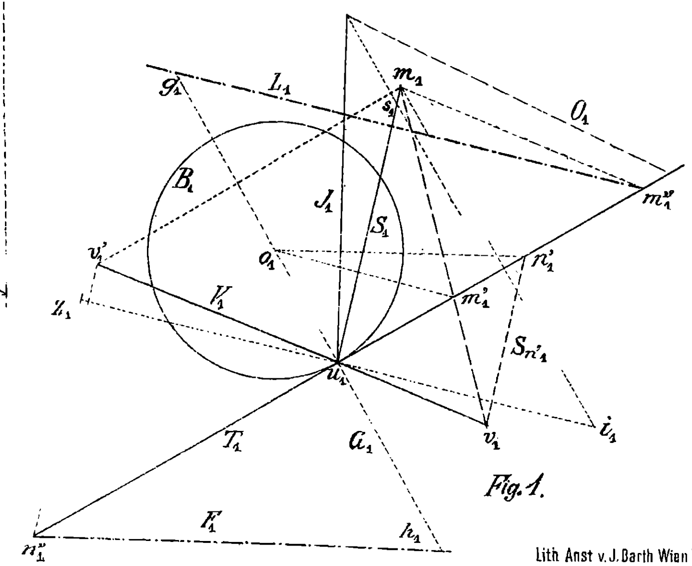

Fig. 1.

Lith. Anst. v. J. Barth Wien VI.

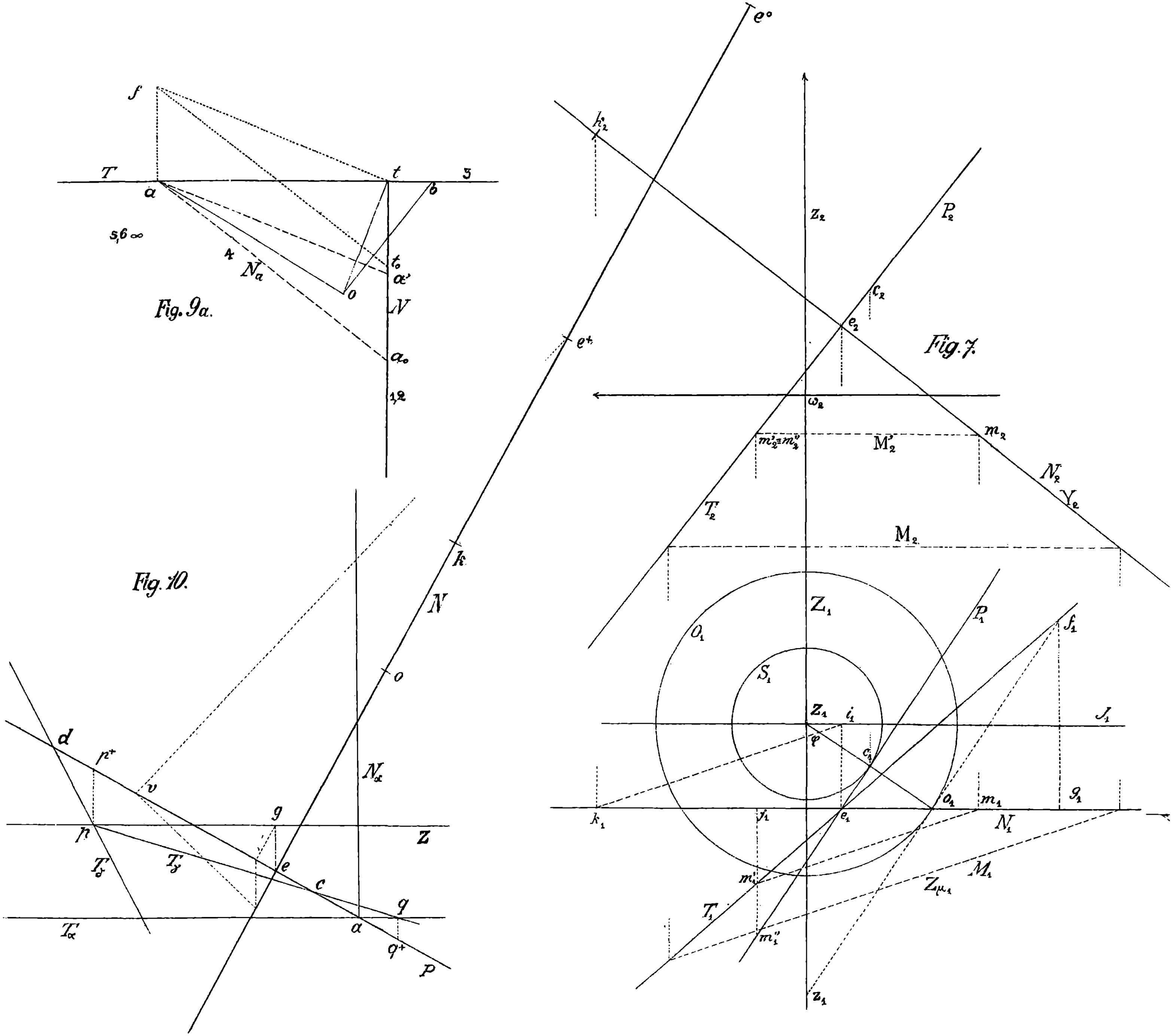

Fig. 9a.

Fig. 10.

Fig. 7.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Sobotka J.

Artikel/Article: Einige Constructionen bezüglich der Schraubungsflächen. 1204-1240