

Über eine Relation des Herrn Nasimof

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

In einer in den Schriften der mathematischen Gesellschaft in Moskau enthaltenen, in russischer Sprache verfassten Abhandlung[1] hat Herr Nasimof vor zehn Jahren für die Summe der Werthe, welche eine willkürliche Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle dem Intervalle 1 . m angehörigen ganzen Zahlen durchläuft, welche zu einer gegebenen Zahl n theilerfremd sind, folgenden Ausdruck angegeben

$$\sum_{x=1}^{x=m}\left(\frac{n}{x^2}\right)f(x)=\sum_d \mu(d)\left(\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m}{d}\right]} f(dx)\right),$$

wo die Summation bezüglich d über alle Theiler von n zu erstrecken ist, und aus demselben durch Specialisirung die Relationen

$$\varphi^{(0)}(m,n)=\sum_d\left[\frac{m}{d}\right]\mu(d)$$

$$\varphi^{(1)}(m,n)=\sum_d\frac{d\left[\frac{m}{d}\right]\left\{\left[\frac{m}{d}\right]+1\right\}}{2}\mu(d)$$

$$=\frac{m\varphi^{(0)}(m,n)}{2}+\sum_d\frac{R_d\left\{\left[\frac{m}{d}\right]+1\right\}}{2}\mu(d)$$

$$=\frac{s^2 n\varphi(n)}{2}+sn\varphi^{(0)}(\varkappa,n)+\varphi^{(1)}(\varkappa,n)$$

$$(m=sn+\varkappa;\ 0\leqq\varkappa\leqq s-1)$$

[1] »Von der Summe der Zahlen, welche relative Primzahlen gegen eine gegebene Zahl N sind und eine andere gegebene Zahl P nicht überschreiten.« Matematiczki Swornik, 11. Bd., p. 603—610.

abgeleitet, wo R_x den Rest der Division von m durch x vorstellt und mit $\varphi^{(\varkappa)}(m, n)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der zu n theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ ausgedrückt wird. Die erste von diesen Formeln ist übrigens wiederholt angegeben worden, sie findet sich beispielsweise schon in Legendre's »Théorie des nombres«, in einer Arbeit des Herrn Minine[1] und in verschiedenen Mittheilungen von den Herren Meissel, Cesarò, Rogel und mir. Eine interessante Erweiterung der Nasimof'schen Relation stellte vor Kurzem Herr K. Zsigmondy in seiner im letzten Bande des von L. Fuchs herausgegebenen Journals für die reine und angewandte Mathematik enthaltenen Note: »Zur Verallgemeinerung der Function $\varphi(m)$ in der Zahlentheorie«[2] auf, indem er eine der obigen völlig analoge Darstellung für die Summe der Werthe angab, welche eine willkürliche Function $f(x)$ erhält, wenn ihr Argument alle durch r gegebene, zu einander theilerfremde ganze Zahlen nicht theilbaren ganzzahligen Individuen eines vorgeschriebenen Intervalles annimmt. Es mag bei dieser Gelegenheit nur darauf hingewiesen werden, dass die Zsigmondy'sche Verallgemeinerung der Euler-Gauss'schen Function $\varphi(m)$ ein Glied aus einer Kette von wesentlichen Erweiterungen bekannter zahlentheoretischer Theoreme bildet, auf welche man durch folgende einfache Überlegung geführt wird.

In der Theorie der Theilung der ganzen Zahlen wird gezeigt, dass man zur multiplicativen Bildung aller ganzen Zahlen unendlich viele Elemente, die Primzahlen, nöthig hat und dass unter Benützung dieser Elemente jede ganze Zahl nur auf eine einzige Weise multiplicativ erzeugt werden kann. Da eine wesentliche Eigenschaft des Systems aller Primzahlen darin besteht, dass je zwei Elemente desselben zu einander theilerfremd sind, so kann man eine grosse Anzahl derjenigen in diesem Capitel der Zahlentheorie zur Erörterung gelangenden Fragen, welche in letzter Linie auf der Darstellung der ganzen Zahlen als Producte von Primzahlpotenzen basiren, in der Weise verallgemeinern, dass man dieselben nicht für alle ganzen

---

[1] »Nouveaux théorèmes de la théorie des nombres«.

[2] A. O. Bd. 111, S. 344—347.

Zahlen, sondern nur für diejenigen behandelt, welche als Producte von Potenzen mit ganzzahligen, nicht negativen Exponenten der verschiedenen Elemente eines Systems von r ganzen, unter einander theilerfremden Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ darstellbar sind. Indem ich mir vorbehalte, auf diese Erweiterungen demnächst ausführlich einzugehen, will ich in den folgenden Zeilen nur einige wenige specielle Fälle derselben hervorheben, die zu besonders interessanten Beispielen einer zunächst im ersten Paragraphen aufzustellenden allgemeinen Formel führen, in welcher die Relationen der Herren Nasimof und Zsigmondy als specielle Fälle enthalten sind.

§. 1. In der Summe

$$\sum_{d_{\rho,n}} \chi(d_{\rho,n})\,\chi_1\!\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)\left(\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_s=1}^{x_1,\ldots=\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]} f(d_{\rho,n}\varkappa x_1, d_{\rho,n}\varkappa x_2, \ldots, d_{\rho,n}\varkappa x_s)\right),$$

welche über alle Theiler $d_{\rho,n}$ der ganzen Zahl n zu erstrecken ist, die eine bestimmte (durch den Index ρ charakterisirte) arithmetische Eigenschaft besitzen, hat $f(\varkappa x_1^{(0)}, \varkappa x_2^{(0)}, \ldots, \varkappa x_s^{(0)})$ den Factor

$$\sum_{d'_{\rho,n}} \chi(d'_{\rho,n})\,\chi_1\!\left(\frac{n}{d'_{\rho,n}}\right),$$

wo die Summation bezüglich $d'_{\rho,n}$ über diejenigen unter den Theilern $d_{\rho,n}$ ausgedehnt wird, welche zugleich Theiler von $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_s^{(0)}$ sind, d. i. also über alle mit der durch den Index ρ charakterisirten Eigenschaft begabten Theiler $d_{\rho,[n,x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_s^{(0)}]}$ des grössten gemeinsamen Theilers $[n, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_s^{(0)}]$ von $n, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_s^{(0)}$. Man hat daher die Relation

$$\sum_{x_1,\ldots,x_s=1}^{x_1,\ldots,x_s=m} f(\varkappa x_1, \varkappa x_2, \ldots, \varkappa x_s)\cdot\left(\sum_{d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]}} \chi(d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]})\,\chi_1\!\left(\frac{n}{d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{d_{\rho,n}} \chi(d_{\rho,n})\,\chi_1\!\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)\left(\sum_{x_1,\ldots,x_s=1}^{x_1,\ldots,x_s=\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]} f(d_{\rho,n}\varkappa x_1, d_{\rho,n}\varkappa x_2, \ldots, d_{\rho,n}\varkappa x_s)\right), \quad 1)$$

welche, falls die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ für alle in Betracht kommenden ganzzahligen Werthepaare $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_s, y_s$ der Gleichung

$$f(x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_s y_s) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s) f(y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

genügt, in die folgende übergeht

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1\varkappa, x_2\varkappa, \ldots, x_s\varkappa) \cdot \\ \cdot \left(\sum_{d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]}} \chi(d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]})\, \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]}}\right)\right) = \\ = \sum_{d_{\rho,n}} \chi(d_{\rho,n}) f(\varkappa d_{\rho,n}, \varkappa d_{\rho,n}, \ldots, \varkappa d_{\rho,n})\, F_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right), \qquad 2)$$

wo

$$F_\varkappa(r) = \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = r} f(x_1\varkappa, x_2\varkappa, \ldots, x_s\varkappa)$$

ist, und, wenn $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ homogen von der Dimension $\varkappa_1$ ist, die Gestalt

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) \cdot \\ \left(\sum_{d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]}} \chi(d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]})\, \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,[n,x_1,x_2,\ldots,x_s]}}\right)\right) = \\ = \sum_{d_{\rho,n}} \chi(d_{\rho,n})\, d_{\rho,n}^{\varkappa_1} F\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)$$

annimmt.

Setzt man in der abgeleiteten allgemeinen Gleichung beispielsweise

$$\varkappa = 1 \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_s^{\varkappa_s}; \quad \lambda(x_1 x_2 \ldots x_s) x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \ldots x_s^{\varkappa_s}$$

so erhält man die speciellen Beziehungen

$$\sum_{\cdot, x_s = 1}^{\cdot, x_s = m} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \cdot \ldots x_s^{\varkappa_s}$$

$$\left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{d_{\rho, n}} \chi(d_{\rho, n}) d_{\rho, n}^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_s} \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, n}} \right) S_{\varkappa_1} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) S_{\varkappa_2} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \ldots$$

$$\ldots S_{\varkappa_s} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \qquad 4)$$

$$\sum_{\cdot, x_s = 1}^{\cdot, x_s = m} \lambda(x_1 x_2 \cdot \ldots x_s) x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \cdot \ldots x_s^{\varkappa_s}$$

$$\cdot \left(\sum_{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \chi(d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}) \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, [n, x_1, x_2, \ldots, x_s]}} \right) \right) =$$

$$= \sum_{d_{\rho, n}} \chi(d_{\rho, n}) \lambda^s (d_{\rho, n}) d_{\rho, n}^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_s} \chi_1 \left(\frac{n}{d_{\rho, n}} \right) \Lambda_{\varkappa_1} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \Lambda_{\varkappa_2} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right) \ldots$$

$$. \Lambda_{\varkappa_s} \left(\left[\frac{m}{d_{\rho, n}} \right] \right), \qquad 5)$$

wo

$$S_\varkappa(r) = \sum_{\mu = 1}^{\mu = r} \mu^\varkappa$$

$$\Lambda_\varkappa(r) = \sum_{\mu = 1}^{\mu = r} \lambda(\mu) \mu^\varkappa$$

ist.

Ist

$$F(r) = \{A (\log r)^t + B\} r^{s_1} + C_r \quad (t = 0, 1),$$

wo A und B von r unabhängige Grössen vorstellen und

$$\lim_{r = \infty} \frac{C_r}{r^{s_1}} = 0$$

ist, so verwandeln sich die zwei letzten Gleichungen in die folgenden

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{\dots, x_s = m} f(\varkappa x_1, \varkappa x_2, \dots, \varkappa x_s) \cdot$$

$$\left(\sum_{d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}} \chi(d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}}\right)\right) =$$

$$= \left(\{A(\log m)^t + B\} \sum_{d_{\rho,n}} \frac{\chi(d_{\rho,n}) f(d_{\rho,n}\varkappa, d_{\rho,n}\varkappa, \dots, d_{\rho,n}\varkappa) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)}{d_{\rho,n}^{s_1}}\right.$$

$$\left. - At \sum_{d_{\rho,n}} \frac{\chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)(d_{\rho,n}) \log d_{\rho,n} f(d_{\rho,n}\varkappa, d_{\rho,n}\varkappa, \dots, d_{\rho,n}\varkappa)}{d_{\rho,n}^{s_1}}\right) m^{s_1} + D_m \qquad 6)$$

$$\sum_{x_1, x_2, \dots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \dots, x_s = m} f(x_1, x_2, \dots, x_s) \cdot$$

$$\left(\sum_{d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}} \chi(d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}}\right)\right) =$$

$$= \left(\{A(\log m)^t + B\} \sum_{d_{\rho,n}} \frac{\chi(d_{\rho,n})}{d_{\rho,n}^{s_1 - \varkappa_1}} - At \sum_{d_{\rho,n}} \frac{\chi(d_{\rho,n}) \log d_{\rho,n}}{d_{\rho,n}^{s_1 - s_2}}\right) m^{s_1} + D'_m, \qquad 7)$$

wo

$$\lim_{m=\infty} \frac{D_m}{m^{s_1}} = 0, \quad \lim_{m=\infty} \frac{D'_m}{m} = 0$$

ist.

Nach 5) ist demnach speciell

$$\sum_{\dots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \dots, x_s = m} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} \dots x_s^{\varkappa_s}$$

$$\cdot \left(\sum_{d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}} \chi(d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,[n, x_1, x_2, \dots, x_s]}}\right)\right) =$$

$$= \frac{m^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \dots + \varkappa_s +}}{\varkappa_1 + 1)((\varkappa_2 + 1) \dots (\varkappa_s + 1)} \sum_{d_{\rho,n}} \frac{\chi(d_{\rho,n}) \chi_1\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)}{d_{\rho,n}^{s}} + D''_m \qquad 8)$$

wo

$$\lim_{m=\infty} \frac{D''_m}{m^{\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_s+s}} = 0$$

ist.

Es sollen nun einige besonders bemerkenswerthe specielle Fälle dieser allgemeinen Formeln angegeben werden.

§. 2. Es bezeichne $d_{\rho,n}$ einen Theiler der ganzen Zahl n, welcher eine ρ^{te} Potenz ist, und es werden

$$\chi(x) = \mu(\sqrt[\rho]{x}), \quad \chi_1(x) = 1, \varkappa = 1$$

gesetzt, wo die zahlentheoretische Function $\mu(x)$ gleich 0 ist, wenn x nicht von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, oder wenn, falls es diese Form besitzt, auch nur einer der ganzzahligen, nicht negativen Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ grösser als 1 ist, und in allen anderen Fällen den Werth $(-1)^{\omega_1(x)}$ hat, wenn $\omega_1(x)$ die Anzahl der verschiedenen unter einander theilerfremden Zahlen $n_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ vorstellt, welche zur angegebenen Darstellung von x nothwendig sind. Da aus dieser Definition die Gleichung

$$\overline{\mu}(N n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}) = \overline{\mu}(N) \, \overline{\mu}(n_1^{\alpha_1}) \, \overline{\mu}(n_2^{\alpha_2}) \ldots \overline{\mu}(n_r^{\alpha_r})$$

folgt, in welcher N eine durch keine der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbare ganze Zahl vorstellt, so hat die über alle Theiler $d_{\rho,n}$ der ganzen Zahl

$$n = N n_1^{\alpha'_1 \rho + \varepsilon_1} n_2^{\alpha'_2 \rho + \varepsilon_2} \ldots n_r^{\alpha'_r \rho + \varepsilon_r} \quad (0 \leqq \varepsilon_\lambda < \rho; \ \lambda = 1, 2, \ldots, r),$$

welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_{\rho,n}} \overline{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}}) = \overline{\mu}_\rho(n)$$

den Werth

$$\prod_{\varkappa=1}^{r}{}' \{1 + \mu(n_\varkappa)\},$$

wo die Marke am Productzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe des angegebenen Intervalles zu nehmen sind, für welche $\alpha'_\varkappa > 0$ ist, und ist demnach gleich Null, wenn auch nur einer der

Exponenten $\alpha'_\varkappa \rho + \varepsilon_\varkappa (\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ grösser als $\rho - 1$ ist, d. h. wenn n durch die ρ^{te} Potenz einer der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbar ist, während sie in allen anderen Fällen den Werth $+1$ hat.

Auf Grund des eben ermittelten Werthes von $\bar{\mu}_\rho(n)$ ergibt sich aus der im §. 1 aufgestellten allgemeinen Relation, dass der Ausdruck

$$F^{\rho, s}(m, n) = \sum_{d_{\rho, n}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}}) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho, n}}\right]} f(d_{\rho, n} x_1, d_{\rho, n} x_2, \ldots, d_{\rho, n} x_s) \right),$$

in welchem die Summation bezüglich $d_{\rho, n}$ über alle Theiler der ganzen Zahl n auszudehnen ist, welche ρ^{te} Potenzen sind, die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn ihr Argumentensystem alle Systeme von s (gleichen oder verschiedenen) beliebig dem Intervalle $1 \ldots m$ entnommenen ganzen Zahlen durchläuft, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keine der Zahlen n_λ^ρ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ als Factor enthält, so dass also speciell

$$\varphi_{\rho, s}(m, n) = \sum_{d_{\rho, n}} \left[\frac{m}{d_{\rho, n}}\right]^s \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}})$$

die Anzahl der eben genannten Argumentensysteme ist.

Als specieller Fall der letzteren Summe ergibt sich sofort, dass der Ausdruck

$$\mathfrak{Q}_\rho^{(s)}(n) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \mu(x)$$

---

[1] In einer im 13. Bande der Schriften der mathematischen Gesellschaft in Moskau (S. 535—543) enthaltenen, in russischer Sprache abgefassten Abhandlung stellt Herr Minine folgendes Theorem auf: Ist

$$g(n, m) = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{x}{m}\right],$$

die Anzahl derjenigen Systeme von s (gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ vorstellt, deren grösster gemeinsamer Theiler keine der ρ^{ten} Potenzen $n_1^\rho, n_2^\rho, \ldots, n_r^\rho$ als Factor enthält, aus welcher sofort die Relation

$$\mathfrak{Q}_\rho^{(s)}(n) = n^s \prod_{\lambda=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho s}}\right) + A_n\, n^{s-1+\frac{1}{\rho}}$$

folgt, in der A_n eine für alle Werthe von n endliche Grösse ist, dieselbe liefert das Theorem:

Ist

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty} \frac{n^{\frac{1}{\rho}}}{\eta} = 0,$$

so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus dem Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ willkürlich herausgegriffene Zahl nicht durch

---

so besteht die Beziehung

$$n^2 = g(n, 1) - \sum_{x=2}^{x=n} g(n, x)\, \mu(x).$$

Diese Formel lässt sich unmittelbar aus der Relation

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \mu(x) = 1,$$

welche ein specieller Fall der im Texte aufgestellten Gleichung ist, ableiten, wie man sofort erkennt, wenn man dieselbe in der Gestalt

$$n^2 = 2g(n, 1) - \sum_{x, y=1}^{x=n,\, y=x} \left[\frac{x}{y}\right] \mu(y)$$

schreibt und beachtet, dass $g(n, 1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ist.

die ρ^{te} Potenz einer der r unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbar ist, im Mittel

$$\prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left\{ 1 - \frac{1}{n_\lambda^\rho} \right\}.$$

Setzt man in der eben aufgestellten allgemeinen Gleichung

$$\rho = 1, \; n = n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r},$$

so entsteht die Zsigmondy'sche Beziehung, nimmt man sodann noch überdies für $n_1, n_2, \ldots, n_r$ die Primtheiler von n, so erhält man die Relation des Herrn Nasimof.

Von anderen speciellen Theoremen, welche in dieser Formel enthalten sind, mögen noch die folgenden leicht zu ermittelnden hier besonders hervorgehoben werden:

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen unter den ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keinen Divisor von der Form $(n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r})^\rho$ ($n_\varkappa$ und n_λ theilerfremd für $\varkappa \gtrless \lambda$) ausser 1 besitzt und welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, ist gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{d_{\rho,n}} \overline{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})\, d_{\rho,n}^\varkappa \left\{ S_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right) + \lambda(d_{\rho,n})\, \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right) \right\},$$

während die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen unter ihnen, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keinen Divisor der angegebenen Form besitzt und welche aus einer ungeraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, den Werth

$$\frac{1}{2} \sum_{d_{\rho,n}} \mu(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})\, d_{\rho,n}^\varkappa \left\{ S_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right) - \lambda(d_{\rho,n})\, \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]\right) \right\}$$

hat, wo die Summationen bezüglich $d_{\rho,n}$ über alle Theiler von n zu erstrecken sind, welche ρ^{te} Potenzen sind.

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen unter den ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n keinen Divisor von der Form $(n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r})^\rho$

($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtreqless \lambda$ theilerfremd) ausser 1 besitzt, verhält sich für sehr grosse m zu $m^{\varkappa+1}$ nahezu wie die über alle Theiler $d_{\rho,n}$ von r, welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_{\rho,n}} \frac{\overline{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})}{d_{\rho,n}}$$

zu $\varkappa+1$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler einer aus dem Intervalle $1\,..\,m$ beliebig herausgegriffenen ganzen Zahl und der ganzen Zahl n keinen Theiler von der Form $(n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r})^\rho$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtreqless \lambda$ theilerfremd ausser 1 besitzt, ist für sehr grosse m im Mittel gleich

$$\sum_{d_{\rho,n}} \frac{\mu(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})}{d_{\rho,n}},$$

wo die Summation bezüglich $d_{\rho,n}$ über alle Theiler von n zu erstrecken ist, welche ρ^{te} Potenzen sind.

§. 3. Es bezeichne ferner $d_{\rho,n}$ irgend einen Theiler der ganzen Zahl n und es werde

$$\chi(x) = \overline{\lambda}_\sigma(x),\; \chi_1(x) = 1,\; \varkappa = 1$$

gesetzt, wo mit $\overline{\lambda}_\sigma(x)$ eine zahlentheoretische Function dargestellt wird, welche den Werth 0 hat, wenn der Quotient aus x und der grössten in dieser ganzen Zahl enthaltenen σ^{ten} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtreqless \lambda$ theilerfremd) einen quadratischen Theiler ausser 1 besitzt gleich $+1$ ist, wenn dieser Quotient das Product einer geraden Anzahl von nur verschiedenen Primfactoren ist, und endlich den Werth -1 hat, wenn die eben genannte Anzahl ungerade ist

Da aus dieser Definition unmittelbar die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\overline{\lambda}_\sigma(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s) \prod\limits_{\lambda=1}^{r} \left(1 - \dfrac{1}{n_\lambda^{\sigma s}}\right)}$$

folgt, so ist die über alle Theiler d einer ganzen Zahl m erstreckte Summe

$$\sum_d \overline{\lambda}_\sigma(d)$$

gleich 1 oder 0, je nachdem m_1 die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist oder nicht, und daher stellt der Ausdruck

$$F_2^{(\sigma,\rho)}(m,n) = \sum_d \overline{\lambda}_\sigma(d) \left(\sum_{x_1,x_2,\ldots,x_s=1}^{x_1,x_2,\ldots,x_s=\left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s) \right),$$

in welchem die auf d bezügliche Summation sich über alle Theiler der ganzen Zahl n erstreckt, die Summe der Werthe vor, welche die willkürliche Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn ihr Argumentensystem alle Systeme von s ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ durchläuft, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, so dass also speciell

$$\sum_d \left[\frac{m}{d}\right]^s \overline{\lambda}_\sigma(d)$$

die Anzahl der eben genannten Argumentensysteme und

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right]^s \overline{\lambda}_\sigma(x) = Q_\sigma^{(s)}(n)$$

die Anzahl derjenigen s-gliederigen Systeme von ganzen (gleichen oder verschiedenen) Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ ist, deren grösster gemeinsamer Theiler eine Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist.

Von den speciellen Fällen, welche in diesem allgemeinen Theoreme enthalten sind, mögen die folgenden besonders angeführt werden:

Die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n

die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \lesseqgtr \lambda$ theilerfremd) ist und welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, ist gleich

$$\frac{1}{2} \sum_d \bar{\lambda}_\sigma(d) d^\varkappa \left\{ S_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right) + \lambda(d) \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)\right\},$$

während die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen unter ihnen, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist und welche aus einer ungeraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen gebildet sind, den Werth

$$\frac{1}{2} \sum_d \bar{\lambda}_\sigma(d) d^\varkappa \left\{ S_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right) - \lambda(d) \Lambda_\varkappa\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)\right\}$$

hat, wo die Summationen bezüglich d über alle Theiler der ganzen Zahl n zu erstrecken sind.

Die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtreqless \lambda$ theilerfremd) ist, verhält sich bei sehr grossem m zu $m^{\varkappa+1}$ ungefähr, wie die über alle Theiler d der ganzen Zahl n ausgedehnte Summe

$$\sum_d \frac{\bar{\lambda}_\sigma(d)}{d}$$

zu $\varkappa+1$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler einer aus dem Intervalle $1 \ldots m$ beliebig herausgegriffenen ganzen Zahl und der Zahl n die σ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, ist für sehr grosse m im Mittel gleich der über alle Theiler d von n ausgedehnten Summe

$$\sum_d \frac{\bar{\lambda}_\sigma(d)}{d}.$$

§. 4. Es werde ferner wieder für $d_{\rho,n}$ irgend ein Theiler der ganzen Zahl n genommen und

$$\chi(x) = \bar{\alpha}(x),\ \chi_1(x) = 1,\ \varkappa = 1$$

gesetzt, wo die zahlentheoretische Function $\bar{\alpha}(x)$ den Werth 0 hat, wenn x durch keine der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbar ist, oder wenn es auch nur eine derjenigen Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$, welche durch kein Quadrat ausser 1 theilbar sind, in einer höheren Potenz als der zweiten oder mindestens zwei in einer höheren als der ersten Potenz enthält, oder wenn dasselbe durch das Quadrat einer der übrigen Zahlen n_λ oder durch ein Product von solchen theilbar ist, oder endlich, wenn eine Primzahl in x in einer um mehr als eine Einheit höheren Potenz als einer der Grössen n_λ enthalten ist, während dieselbe gleich $(-1)^{\bar{\omega}\left(\frac{x}{n_\mu}\right)} f_1(n_\mu)$ ist, wenn x durch das Quadrat der nur verschiedene Primfactoren enthaltenden Zahl n_μ oder durch eine der Zahlen $n_\lambda(n_\mu)$ mit quadratischen Divisoren theilbar ist und endlich die Relation

$$\bar{\alpha}(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=s} (-1)^{\bar{\omega}\left(\frac{n}{n_\mu}\right)} f_1(n_\mu)$$

besteht, wenn x das Product von nur verschiedenen Primzahlen und den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_s$, die keinen quadratischen Theiler ausser 1 besitzen, ist.

Da für diese Function, wie man leicht zeigt, die über alle Theiler d einer ganzen Zahl n erstreckte Summe

$$\sum_d \bar{\alpha}(d)$$

den Werth $f_1(n)$ oder 0 hat, je nachdem n mit einer der Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ übereinstimmt oder nicht, so erkennt man auf Grund der Entwicklungen des Paragraphes 1), dass der Ausdruck

$$F_3(m, n) = \sum_d \bar{\alpha}(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s) \right),$$

in welchem die Summation nach d über alle Theiler der ganzen Zahl n zu erstrecken ist, die Summe der Producte vorstellt, welche entstehen, wenn man den Werth der Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ für ein dem Intervalle $1 \ldots m$ angehöriges Argumentensystem, dessen grösster gemeinsamer Theiler mit n eine der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, mit dem Werthe multiplicirt, welchen die Function $f_1(x)$ für diesen gemeinsamen Theiler erhält. Speciell wird die Summe der Werthe, welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn ihr Argumentensystem die eben genannten Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ durchläuft, durch die über alle Theiler d von n ausgedehnte Summe

$$\sum_d \bar{\alpha}_0(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s) \right) = F_3^{(0)}(m, n)$$

gegeben, wenn mit $\bar{\alpha}_0(x)$ diejenige Specialisirung der Function $\bar{\alpha}(x)$ bezeichnet wird, für welche die obigen allgemeinen Gleichungen übergehen in

$$\bar{\alpha}_0(x) = 0$$

$$\alpha_0(x) = (-1)^{\tilde{\omega}\left(\frac{x}{n_\mu}\right)}$$

$$\alpha_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\mu=s} (-1)^{\tilde{\omega}\left(\frac{x}{n_\mu}\right)}$$

Von den speciellen Theoremen, welche in dieser allgemeinen Formel enthalten sind, mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Die Summe der Producte aus den $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen im Intervalle $1 \ldots m$ liegenden ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n einer der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist und welche aus einer geraden Anzahl von beliebigen (gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen zusammengesetzt sind, und dem Werthe, welchen die Function $f_1(x)$ für diesen gemeinsamen Theiler erhält, ist gleich der über alle Theiler d der ganzen Zahl n ausgedehnten Summe

$$\frac{1}{2}\sum_{d}\bar{\alpha}(d)\,d^{\varkappa}\left\{S_{\varkappa}\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)+\lambda(d)\,\Lambda_{\varkappa}\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)\right\},$$

während die Summe der Producte aus den $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen unter den Zahlen des genannten Bereiches, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist und welche aus einer ungeraden Anzahl von beliebigen (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, und dem Werthe, welchen die Function $f_1(x)$ für diesen gemeinsamen Divisor annimmt, den Werth

$$\frac{1}{2}\sum_{d}\bar{\alpha}(d)\,d^{\varkappa}\left\{S_{\varkappa}\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)-\lambda(d)\,\Lambda_{\varkappa}\left(\left[\frac{m}{d}\right]\right)\right\}$$

hat.

Die Summe der Producte aus den $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen dem Intervalle $1 \ldots m$ angehörigen ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist, und dem Werthe, welchen die Function $f_1(x)$ für diesen Theiler annimmt, verhält sich für sehr grosse m zu $m^{\varkappa+1}$ nahezu wie die über alle Theiler d der ganzen Zahl n ausgedehnte Summe

$$\sum_{d}\frac{\alpha(d)}{d}$$

zu $\varkappa+1$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der grösste gemeinsame Theiler einer aus dem Intervalle $1 \ldots m$ beliebig herausgegriffenen ganzen Zahl und der Zahl n eine der r unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist, beträgt für sehr grosse m im Mittel

$$\sum_{d}\frac{\bar{\alpha}_0(d)}{d}$$

wo die Summation über alle Theiler d von n zu erstrecken ist.

§. 5. Jeder der drei in den vorigen Paragraphen benützten zahlentheoretischen Functionen $\overline{\mu}_\rho(x)$, $\overline{\lambda}_\rho(x)$, $\overline{\alpha}(x)$ lässt sich eine neue an die Seite stellen, welche durch die über alle Theiler d der ganzen Zahl x, beziehungsweise über diejenigen $d_{\rho,x}$ unter ihnen, welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_{\rho,x}} \beta\left(\frac{x}{d_{\rho,x}}\right) \mu(\sqrt[\rho]{d_{\rho,x}}) = \mu'_\rho(x)$$

$$\sum_{d} \mu_1\left(\frac{x}{d}\right) \overline{\lambda}_\rho(d) = \lambda'_\rho(x)$$

$$\sum_{d} \overline{\mu}_1\left(\frac{x}{d}\right) \overline{\alpha}(d) = \alpha'(x)$$

definirt wird, wo $\beta(x)$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem x von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist oder nicht.

Dieser Definitionsgleichung nach hat

$\mu'_\rho(x)$ den Werth 0, wenn x nicht von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, oder wenn, falls es diese Gestalt besitzt, auch nur einer der Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots r)$ grösser als $\rho - 1$ ist, während diese Function in allen anderen Fällen gleich 1 ist;

$\lambda'_\rho(x)$ den Werth 0, wenn x nicht von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, oder wenn, falls es diese Form besitzt, auch nur einer der Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ nach dem Modul ρ einer von 0 oder 1 verschiedenen Zahl congruent ist, während diese Function in allen anderen Fällen gleich $(-1)^\tau$ ist, wo τ die Anzahl derjenigen Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ vorstellt, welche die Form $\varkappa\rho + 1$ haben;

$\alpha'(x)$ den Werth 0, wenn x nicht von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist, oder wenn, falls es diese Form besitzt, einer der Exponenten $\alpha_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, r)$ grösser als 2, oder mindestens zwei von ihnen grösser als 1 sind, den Werth $(-1)^{\overline{\omega}_1(x)} f_1(n_\varkappa)$, wenn $\alpha_\varkappa = 2$ ist und die übrigen Exponenten unterhalb 2 liegen, endlich den Werth

$$(-1)^{\overline{\omega}_1(x)+1} \sum_{\mu=1}^{\mu=t} f_1(n_\mu)$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_t$ gleich 1, $\alpha_{t+1}, \alpha_{t+2}, \ldots, \alpha_r$ aber Null sind.

Von den zahlreichen Relationen, welche für die angegebenen zahlentheoretischen Functionen bestehen, mögen die folgenden hier Platz finden:

$$\bar{\lambda}_\rho(x) = \sum_{d_{\rho,x}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho,x}})\, \mu\left(\frac{x}{d_{\rho,x}}\right)$$

$$\lambda'_\rho(x) = \sum_{d_{\rho,x}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho,x}})\, \bar{\mu}\left(\frac{x}{d_{\rho,x}}\right)$$

$$\sum_d \beta\left(\frac{x}{d}\right) \lambda'_\rho(d) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum_d \mu(d)\, \bar{\mu}_\rho\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{x}) \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum_d \bar{\mu}(d)\, \mu'_\rho\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{x}) \\ 0 \end{cases}$$

je nachdem x die ρ^{te} Potenz einer Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ist oder nicht,

$$\sum_d \beta\left(\frac{x}{d}\right) \alpha'(d) = \begin{cases} f_1(x) \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem x eine der Zahlen n_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, r$) ist oder nicht,

$$\sum_d \lambda'_\rho(d)\, \mu'_\rho\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

$$\sum_d \bar{\lambda}_\rho(d)\, \bar{\mu}_\rho\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (x > 1) \end{cases}$$

Die letzten zwei Gleichungen zeigen, dass die Functionen $\bar{\lambda}_\rho(x)$ und $\lambda'_\rho(x)$, beziehungsweise $\bar{\mu}_\rho(x)$ und $\mu'_\rho(x)$ conjugirt sind.

Auf Grund der eben abgeleiteten Relationen folgt aus dem allgemeinen Theoreme des Paragraphes 1, dass der Ausdruck

$$\sum_{d_{\rho,n}} \beta\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right) \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}}) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]} f(d_{\rho,n} x_1, d_{\rho,n} x_2, \ldots, d_{\rho,n} x_s) \right),$$

in welchem die Summation nach $d_{\rho,n}$ über alle Theiler von n zu erstrecken ist, welche ρ^{te} Potenzen sind, die Summe der Werthe vorstellt, welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn ihr Argument alle s-gliederigen Systeme von ganzen (gleichen oder verschiedenen) Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ durchlauft, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, in welcher keiner der Exponenten $\alpha_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, r$) die Zahl $\rho - 1$ übersteigt, ferner die über alle Theiler von n ausgedehnten Summen

$$\sum_d \mu(d) \bar{\mu}_\rho\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s)\right) = F_4^{(\rho, s)}(m, n)$$

$$\sum_d \bar{\mu}(d) \mu'_\rho\left(\frac{n}{d}\right)\left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s)\right) = F_5^{(\rho, s)}(m, n)$$

das Aggregat vorstellen, welches entsteht, wenn jeder der Werthe, den die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn für ihr Argumentensystem irgend eines der s-gliederigen Systeme von beliebigen (gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen des Bereiches $1 \ldots m$ gesetzt wird, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die ρ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\varepsilon_1} n_2^{\varepsilon_2} \ldots n_r^{\varepsilon_r}$ ($\varepsilon_\lambda < 2$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$; $n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, mit

$$(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=r} \varepsilon_\lambda}$$

multiplicirt wird, weiters die über alle Theiler d von n ausgedehnte Summe

$$\sum_d \beta\left(\frac{n}{d}\right) \alpha'(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s)\right)$$

die Summe der Producte angibt, welche dadurch entstehen, dass man den Werth, welchen die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$

erhält, wenn für ihr Argumentensystem irgend eines der s-gliederigen Systeme von beliebigen (gleichen oder verschiedenen) ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots m$ gesetzt wird, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen n_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, r$) ist, mit $f_1(n_\lambda)$ multiplicirt, sodann die über alle Theiler d von n erstreckte Summe

$$\sum_d \beta\left(\frac{n}{d}\right)\lambda'_\rho(d)\left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s)\right) = F_6^{(\rho, s)}(m, n)$$

die Summe der Werthe ist, welche die willkürliche Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ annimmt, wenn für ihr Argumentensystem alle dem Intervalle $1 \ldots m$ entnommenen s-gliederigen Systeme beliebiger ganzer Zahlen gesetzt werden, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n die ρ^{te} Potenz einer ganzen Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1} n_2^{\alpha_2} \ldots n_r^{\alpha_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd) ist, endlich die über alle Theiler d von n, beziehungsweise über diejenigen $d_{\rho,n}$ unter ihnen, welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_d \bar{\mu}_1\left(\frac{n}{d}\right)\bar{\lambda}_\rho(d)\left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1, dx_2, \ldots, dx_s)\right) = F_7^{(\rho, s)}(m, n)$$

$$\sum_{d_{\rho,n}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}})\,\bar{\mu}\left(\frac{n}{d_{\rho,n}}\right)\left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho,n}}\right]} f(d_{\rho,n} x_1, d_{\rho,n} x_2, \ldots, d_{\rho,n} x_s)\right)$$

das Aggregat der mit dem Zeichen

$$(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=r}}$$

versehenen Werthe, welche die Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ erhält, wenn für ihr Argumentensystem alle s-gliederigen Systeme von beliebig dem Intervalle $1 \ldots m$ entnommenen ganzen Zahlen gesetzt werden, deren grösster gemeinsamer Theiler mit n eine ganze Zahl von der Form $n_1^{\alpha_1\rho+\varepsilon_1} n_2^{\alpha_2\rho+\varepsilon_2} \ldots n_r^{\alpha_r\rho+\varepsilon_r}$ ($n_\varkappa$ und n_λ für $\varkappa \gtrless \lambda$ theilerfremd; $0 \leqq \varepsilon_\lambda \leqq \rho$, $\lambda = 1, 2, \ldots, r$) ist.

Auf die zahlreichen speciellen Theoreme, welche sich aus diesen Formeln ergeben, soll hier nicht weiter eingegangen werden.

§. 6. Den bisherigen Erörterungen mögen in diesem Paragraphe noch folgende Bemerkungen angeschlossen werden. Es ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\rho]{n}]} \mathfrak{Q}_\rho^{(s)}\left(\left[\frac{n}{y_\rho}\right]\right) &= \sum_{x,y=1}^{x,y=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{(xy)^\rho}\right]^s \mu(x) \\
&= \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right]^s \overline{\mu}_1(x) \\
&= \sum_{x, y_1, y_2, \ldots, y_s=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}],\, y_1, y_2, \ldots, y_s=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^\rho y_1}\right) \varepsilon\left(\frac{n}{x^\rho y_2}\right) \ldots \varepsilon\left(\frac{n}{x^\rho y_s}\right) \overline{\mu}_1(x) \\
&= \sum_{y_1, y_2, \ldots, y_s=1}^{y_1, y_2, \ldots, y_s=n} \varepsilon\left(\frac{n}{y_1}\right) \varepsilon\left(\frac{n}{y_2}\right) \ldots \varepsilon\left(\frac{n}{y_s}\right)\left(\sum_{d_{\rho,[y_1, y_2, \ldots, y_s]}} \mu_1\left(\sqrt[\rho]{d_{\rho,[y_1, y_2, \ldots, y_s]}}\right)\right) \\
&= \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s=1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s=n} \psi_{0,\rho}([x_1, x_2, \ldots, x_s]) = \Psi_{0,\rho}^{(s)}(n),
\end{aligned}
$$

wenn mit $\overline{\psi}_{\varkappa,\rho}(x)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler von x bezeichnet wird, welche ρ^{te} Potenzen von ganzen Zahlen sind, die keine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ als Factor enthalten.

Aus dieser Gleichung folgt sofort die Relation

$$\overline{\Psi}_{0,\rho}^{(s)}(n) = n^s \zeta(\rho s) \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho s}}\right\} + B_n n^{s-1+\frac{1}{\rho}} \log n \quad (\rho > 1),$$

wo B_n eine für alle Werthe von n endliche Grösse ist; dieselbe liefert u. A. folgende Theoreme:

Ist

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{n^{\frac{1}{\rho}} \log n}{\eta} = 0,$$

so hat jede dem Intervalle $n-\eta+1 . \quad n+\eta$ angehörige ganze Zahl im Mittel

$$\zeta(\rho) \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho}}\right\}$$

Theiler, welche ρ^{te} Potenzen von ganzen Zahlen sind, die keine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, . \quad ., n_r$ als Factor enthalten.

Ist

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{n^{\frac{1}{2\rho}} \log n}{\eta} = 0,$$

so hat jede dem Bereiche $n-\eta+1 \quad n+\eta$ angehörige ganze Zahl im Mittel

$$\frac{(2\pi)^{2\rho} B_\rho}{2\Pi(2\rho)} \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{1 - \frac{1}{n^{2\rho}}\right\}$$

Theiler, welche $(2\rho)^{\text{te}}$ Potenzen von ganzen Zahlen sind, die keine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ als Factor enthalten.

Ist

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sqrt{n}\log n}{\eta} = 0,$$

so hat jede im Intervalle $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ befindliche ganze Zahl im Mittel

$$\frac{\pi^2}{6} \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{1 - \frac{1}{n_\lambda^2}\right\}$$

quadratische Theiler, deren Quadratwurzeln durch keine der unter einander theilerfremden ganzen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ theilbar sind.

Aus der Definition der Function $\bar{\mu}(x)$ folgt leicht, dass

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{l_\rho(n)}{n^s} = \rho\,\zeta(s) \prod_{\lambda=1}^{r} \left\{1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho s}}\right\}^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\beta(n)\log n}{n^s}$$

ist, wenn die über alle Theiler $d_{\rho,n}$ von n, welche ρ^{te} Potenzen sind, ausgedehnte Summe

$$\sum_{d_{\rho,n}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}}) \log d_{\rho,n} = l_\rho(n)$$

gesetzt wird. Da nach dieser Formel

$$l_\rho(n) = \sum_{\beta_{\varkappa_1}, \beta_{\varkappa_2}, \ldots, \beta_{\varkappa_\sigma}=0}^{\beta_{\varkappa_1}, \beta_{\varkappa_2}, \ldots, \beta_{\varkappa_\sigma}=1} \{\beta_{\varkappa_1}\log n_{\varkappa_1} + \beta_{\varkappa_2}\log n_{\varkappa_2} + \ldots + \beta_{\varkappa_\sigma}\log n_{\varkappa_\sigma}\}$$
$$.\,\bar{\mu}(n_{\varkappa_1}^{\beta_{\varkappa_1}})\,\bar{\mu}(n_{\varkappa_2}^{\beta_{\varkappa_2}}) \ldots \bar{\mu}(n_{\varkappa_\sigma}^{\beta_{\varkappa_\sigma}})$$

ist, falls nur für $\lambda = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\sigma$ $\left[\frac{n_\lambda}{\rho}\right] \geqq 1$ wird, so hat $l_\rho(n)$ den Werth $-\rho \log n_\lambda$ oder 0, je nachdem n die mit einem $\rho-1$ übersteigenden Exponenten versehene Potenz einer der Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ ist oder nicht.

Die angegebene Gleichung verwandelt sich daher sofort in die folgende

$$\zeta(s) = \frac{\log \prod_{\lambda}^{r} n_\lambda^{\frac{1}{n_\lambda^{\rho s} - n_\lambda^{(\rho-1)s}}}}{\log \prod_{x}^{\infty} x^{\frac{\beta(x)}{x^{\rho s}}} \prod_{\lambda}^{r} \left(1 - \frac{1}{n_\lambda^{\rho s}}\right)^2},$$

aus welcher sich bei geradem $s = 2\tau$ für die τ^{te} Bernoulli'sche Zahl der folgende bemerkenswerthe Ausdruck ergibt

$$B_\tau = \frac{2\Pi(2\tau)}{(2\pi)^{2\tau}} \frac{\log \prod_{\lambda}^{r} n_\lambda^{\frac{1}{n_\lambda^{2\rho\tau} - n_\lambda^{2(\rho-1)\tau}}}}{\log \prod_{x}^{\infty} x^{\frac{\beta(x)}{x^{2\rho\tau}}} \prod_{\lambda}^{r} \left(1 - \frac{1}{n_\lambda^{2\rho\tau}}\right)^2}$$

der, falls $\rho = 1$, $r = \infty$ gesetzt und für $n_1, n_2, \ldots$ alle Primzahlen genommen werden, in die bekannte von Herrn Bugajef herrührende Relation

$$B_\tau = \frac{2\Pi(2\tau)}{(2\pi)^{2\tau}} \frac{\log\left(2^{\frac{1}{2^{2\tau}}} 3^{\frac{1}{3^{2\tau}}} 4^{\frac{1}{4^{2\tau}}} 5^{\frac{1}{5^{2\tau}}} \ldots\right)}{\log\left(2^{\frac{1}{2^{2\tau}-1}} 3^{\frac{1}{3^{2\tau}-1}} 5^{\frac{1}{5^{2\tau}-1}} 7^{\frac{1}{7^{2\tau}-1}} \ldots\right)}$$

übergeht.

Man hat ferner

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\frac{n}{x^\rho}\right] \bar{\mu}(x) \log x &= \sum_{x,y=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}],\, y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^\rho y}\right) \bar{\mu}(x) \log x \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{x=1}^{x=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x}\right) \left(\sum_{d_{\rho,x}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho,x}}) \log d_{\rho,x}\right) \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{x=1}^{x=n} l_\rho(x).\end{aligned}$$

Beachtet man, dass in dem Intervalle $1 \ldots n$ entweder keine oder $\left[\frac{\log n}{\log n_\varkappa}\right] - \rho + 1$ die $(\rho-1)^{\text{te}}$ übersteigende Potenzen von $n_\varkappa$ vorkommen, je nachdem $\log n \lesseqqgtr \rho \log n_\varkappa$ ist, so erkennt man, dass sich die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summe auch in folgender Weise darstellen lässt

$$-\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r} \varepsilon\left(\frac{\log n}{\rho \log n_\varkappa}\right) \log n_\varkappa \left\{\left[\frac{\log n}{\log n_\varkappa}\right] - \rho + 1\right\}$$

und daher hat man die Beziehung

$$\prod_{x=1}^{[\sqrt[\rho]{n}]} x^{\bar{\mu}(x)\left[\frac{n}{x^\rho}\right]} = \prod_{\varkappa=1}^{r} n_\varkappa^{-\varepsilon\left(\frac{\log n}{\rho \log n_\varkappa}\right)\left\{\left[\frac{\log n}{\log n_\varkappa}\right] - \rho + 1\right\}}$$

welche, falls das Product derjenigen unter den Grössen $n_1, n_2, \ldots, n_r$, welche nicht grösser als a sind, mit $P(a)$ bezeichnet wird, die folgende Form annimmt

$$\prod_{x=1}^{[\sqrt[\rho]{n}]} x^{\bar{\mu}(x)\left[\frac{n}{x^\rho}\right]} \prod_{\lambda=\rho}^{\left[\frac{\log n}{\log n_1}\right]} P(\sqrt[\lambda]{n}) = 1,$$

wo mit n_1 die kleinste der Zahlen n_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, r)$ bezeichnet wird.

Ist $\delta_{\rho, n}$ der zu $d_{\rho, n}$ complementäre Theiler von n, so hat man

$$\sum_{d_{\rho, n}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}}) \{\log d_{\rho, n} + \log \delta_{\rho, n}\} = \bar{\mu}_\rho(n) \log n$$

und daher ergeben sich die Relationen

$$\sum_{x=1}^{x=n} \bar{\mathfrak{Q}}_\rho^{(1)}\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \log x = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \bar{\mu}_\rho(x) \log x - \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] l_\rho(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \bar{\mu}(x) \log\left(\left[\frac{n}{x^\rho}\right]!\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \bar{\mu}_\rho(x) \log x - \sum_{x=1}^{x=n} l_\rho(x),$$

welche unmittelbar zu folgenden Beziehungen führen

$$\prod_{y=1}^{n} y^{\bar{\mathfrak{Q}}_{\rho}^{(1)}\left(\left[\frac{n}{y}\right]\right)} = \prod_{x=1}^{n} x^{\bar{\mu}_{\rho}(x)\left[\frac{n}{x}\right]} \prod_{r=1}^{\varkappa} n_{\varkappa}^{\rho\left\{\left[\frac{n}{n_{\varkappa}^{\rho}}\right]+\left[\frac{n}{n_{\varkappa}^{\rho+1}}\right]+\left[\frac{n}{n_{\varkappa}^{\rho+2}}\right]+\cdots\right\}}$$

$$\log n! = \sum_{y=1}^{y=[\sqrt[\rho]{n}]} \left\{\mathrm{M}\left(\left[\frac{n}{y^{\rho}}\right]\right)\beta(y)\right\} + \log \prod_{\lambda=\rho}^{\left[\frac{\log n}{\log n_1}\right]} P\left(\sqrt[\lambda]{\frac{n}{y^{\rho}}}\right)\beta(y),$$

wo

$$\mathrm{M}(a) = \sum_{x=1}^{x=a} \bar{\mu}(x) \log x$$

ist.

§. 7. Beachtet man, dass

$$\left[\frac{n}{x}\right] - \left[\frac{n-1}{x}\right]$$

den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem x ein Theiler von n ist oder nicht, so erkennt man, dass der Ausdruck

$$\Phi_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}(m, n) = \sum_{d_{\rho_1}, n} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) \sum_{d_{\rho_2}, \frac{n}{d_{\rho_1}}} f_{\rho_2}(d_{\rho_2}) \sum_{d_{\rho_3}, \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2}}} f_{\rho_3}(d_{\rho_3}) \ldots$$

$$\sum_{d_{\rho_{\sigma-1}}, \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-2}}}} f_{\rho_{\sigma-1}}(d_{\rho_{\sigma-1}}) .$$

$$. \bar{F}^{(\rho, \sigma)}_{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}\left(\frac{m}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}, \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}\right),$$

in welchem die Summation nach $d_{\rho_\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, \sigma-1, \sigma$) über alle mit der durch den Index $\rho_\varkappa$ charakterisirten arithmetischen Eigenschaft behafteten Theiler der an das betreffende Summenzeichen angefügten zweiten ganzen Zahl zu erstrecken ist und zur Abkürzung

$$\sum_{d_{\rho_\sigma},\ \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}}} f_{\rho_\sigma}(d_{\rho_\sigma}) \chi\left(\frac{n}{d_{\rho_1}, d_{\rho_2}, \ldots, d_{\rho_\sigma}}\right) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \quad d_{\rho_\sigma}}\right]} f(d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_\sigma} x_1, d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_\sigma} x_2, \ldots, d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_\sigma} x_s) \right) =$$

$$= \bar{F}^{\rho, \sigma}_{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \quad d_{\rho_{\sigma-1}}} \left(\frac{m}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} . \quad . d_{\rho_{\sigma-1}}},\ \frac{n}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} . \quad d_{\rho_{\sigma-1}}} \right)$$

gesetzt wurde, gleich der Summe

$$\sum_{y_{\rho_1}, y_{\rho_2}, \ldots, y_{\rho_\sigma}} \left\{ \left[\frac{n}{y_{\rho_1} y_{\rho_2} \quad y_{\rho_\sigma}} \right] - \left[\frac{n-1}{y_{\rho_1} y_{\rho_2} \quad . . y_{\rho_\sigma}} \right] \right\} f_{\rho_1}(y_{\rho_1}) f_{\rho_2}(y_{\rho_2}) . \quad f_{\rho_\sigma}(y_{\rho_\sigma}) \chi\left(\frac{n}{y_{\rho_1} y_{\rho_2} \quad y_{\rho_\sigma}} \right) .$$

$$. \left(\sum_{\ ,_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{y_{\rho_1} y_{\rho_2} \ldots y_{\rho_\sigma}}\right]} f(y_{\rho_1} y_{\rho_2} . \quad y_{\rho_\sigma} x_1, y_{\rho_1} y_{\rho_2} . \quad y_{\rho_\sigma} x_2, . \quad ., y_{\rho_1} y_{\rho_2} \quad . y_{\rho_\sigma} x_s) \right)$$

ist, in welcher die Summation nach y_{ρ_λ} $(\lambda = 1, 2, . \quad ., \sigma)$ über alle dem Intervalle 1 $\quad . n$ angehörigen ganzen Zahlen auszudehnen ist, welche eine bestimmte durch den Index ρ_λ charakterisirte arithmetische Eigenschaft besitzen. Es ist demnach die Function $\Phi_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s}(m, n)$, welche, wie man leicht erkennt, auch gleich

$$\sum_{D_{\rho_1, \rho_2, \quad \ldots, \rho_\sigma}} \ \sum_{\ ., x_s = 1}^{\ ,_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}\right]} f(D_{\rho_1, \rho_2, \quad ., \rho_\sigma} x_1; D_{\rho_1, \rho_1, \quad .., \rho_\sigma} x_2, \ldots, D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma} x_s) \chi\left(\frac{n}{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}} \right) \sum_{d_{\rho_1},\ D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) .$$

$$\sum_{d_{\rho_2},\ \frac{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}{d_{\rho_1}}} f_{\rho_2}(d_{\rho_2}) . \quad \sum_{d_{\rho_{\sigma-2}},\ \frac{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ . . d_{\rho_{\sigma-3}}}} f_{\rho_{\sigma-2}}(d_{\rho_{\sigma-2}}) \sum_{d_{\rho_{\sigma-1}},\ \frac{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-2}}}} f_{\rho_{\sigma-1}}(d_{\rho_{\sigma-1}}) f_{\rho_\sigma}\left(\frac{D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}}{d_{\rho_1} d_{\rho_2} \ldots d_{\rho_{\sigma-1}}} \right)$$

ist, wo die Summation nach $D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}$ über alle Theiler der ganzen Zahl n zu erstrecken ist, welche ein Product von der Gestalt $x_{\rho_1} x_{\rho_2} \ldots x_{\rho_\sigma}$ sind, eine symmetrische Function von $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma$ ist.

Nimmt man speciell $\sigma = 2$ und setzt voraus, dass unter den Theilern $D_{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma}$ von n auch die Zahl 1 enthalten ist, so hat man, falls $f_{\rho_1}(x)$ und $f_{\rho_2}(y)$ die Gleichung

$$\sum_{d_{\rho_1}} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) f_{\rho_2}\left(\frac{D_{\rho_1, \rho_2}}{d_{\rho_1}}\right) = \begin{cases} 1 & (D_{\rho_1, \rho_2} = 1) \\ 0 & (D_{\rho_1, \rho_2} > 1) \end{cases}$$

erfüllen, die Relation

$$\chi(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) =$$

$$= \sum_{d_{\rho_1}, n} f_{\rho_1}(d_{\rho_1}) \bar{F}_{d_{\rho_1}}^{(\rho_2, s)}\left(\frac{m}{d_{\rho_1}}, \frac{n}{d_{\rho_1}}\right) = \sum_{d_{\rho_2}, n} f_{\rho_2}(d_{\rho_2}) \bar{F}_{d_{\rho_2}}^{(\rho_1, s)}\left(\frac{m}{d_{\rho_2}}, \frac{n}{d_{\rho_2}}\right).$$

Auf Grund der in den vorigen Paragraphen angegebenen Entwicklungen ergeben sich aus dieser Gleichung die Beziehungen

$$\sum_{\cdot, x_s = 1} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{d_{\rho, n}} \beta\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_{\rho, n}}}\right) F_{\frac{n}{d_{\rho, n}}}^{(\rho, s)}\left(\frac{m}{d_{\rho, n}}, \frac{n}{d_{\rho, n}}\right)$$

(n und $d_{\rho, n}$ ρ^{te} Potenzen)

und speciell

$$\sum_{x=1}^{x = [\sqrt[\rho]{n}]} \bar{\mathfrak{D}}_\rho^{(s)}\left(\left[\frac{n}{x^\rho}\right]\right) \beta\left(\frac{n}{x^\rho}\right) = n^s$$

$$\sum_{d_\rho} \beta\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_\rho}}\right) \varphi_{\rho, s}\left(\frac{m}{d_\rho}, \frac{n}{d_\rho}\right) = m^s,$$

welche Relation für $\rho = s = 1$ in eine von Herrn Zsigmondy a. a. O. bewiesene Gleichung übergeht,

$$\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{d_{\rho, n}} \mu\left(\sqrt[\rho]{\frac{n}{d_{\rho,n}}}\right) F'^{(\rho, s)}_{\frac{n}{d_{\rho, n}}}\left(\frac{m}{d_{\rho,n}}, \frac{n}{d_{\rho,n}}\right)$$

$$\left(F'^{(\rho,s)}_{\varkappa}(m, n) = \sum_{d_{\rho, n}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho,n}}) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d_{\rho, n}}\right]} f(\varkappa d_{\rho,n} x_1, \varkappa d_{\rho,n} x_2, \ldots, \varkappa d_{\rho,n} x_s)\right)\right)$$

$$= \sum_{d} F^{(\rho,s)}_{2, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \bar{\mu}_\rho(d)$$

$$= \sum_{d} F'^{(\rho,s)}_{2, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \bar{\lambda}_\rho(d)$$

$$\left(F'^{(\rho,s)}_{2,\varkappa}(m, n) = \sum_{d} \bar{\mu}_\rho(d) \left(\sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = \left[\frac{m}{d}\right]} f(dx_1\varkappa, dx_2\varkappa, \ldots, dx_s\varkappa)\right)\right)$$

$$\mu(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{d} F^{(\rho,s)}_{4, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \bar{\lambda}(d)$$

$$\mu_\rho(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_d F^{(\rho, s)}_{4, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

$$\bar{\mu}(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_d F^{(\rho, s)}_{5, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) \bar{\lambda}'_\rho(d)$$

$$= \sum_{d_{\rho, n}} \beta(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}}) F^{(\rho, s)}_{7, \frac{n}{d_{\rho, n}}}\left(\frac{m}{d_{\rho, n}}, \frac{n}{d_{\rho, n}}\right)$$

$$\mu'_\rho(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_d \beta(d) F^{(\rho, s)}_{5, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

$$\lambda'_\rho(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_d \mu'_\rho(d) F^{(\rho, s)}_{6, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

$$\beta(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{d_{\rho, n}} \bar{\mu}(\sqrt[\rho]{d_{\rho, n}}) F^{(\rho, s)}_{7, \frac{n}{d_{\rho, n}}}\left(\frac{m}{d_{\rho, n}}, \frac{n}{d_{\rho, n}}\right)$$

(m und n ρ^{te} Potenzen)

$$\bar{\mu}_1(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_d \bar{\mu}_\rho(d) F^{(\rho, s)}_{7, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

$$\bar{\lambda}_\rho(m) \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 1}^{x_1, x_2, \ldots, x_s = m} f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_d \bar{\lambda}_1(d) F^{(\rho, s)}_{7, \frac{n}{d}}\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

in denen d irgend einen Theiler von n, $d_{\rho,n}$ aber einen solchen bedeutet, der eine ρ^{te} Potenz ist und durch die Anfügung des Index $\frac{n}{d}$, beziehungsweise $\frac{n}{d_{\rho,n}}$ an ein Functionszeichen angezeigt wird, dass in den für die betreffende Function angegebenen Summen x_λ durch $\frac{n}{d} x_\lambda$, beziehungsweise $\frac{n}{d_{\rho,n}} x_\lambda$ unter Beibehaltung der ursprünglichen Grenzen zu ersetzen ist.