Über Flächen constanter Krümmung

Emil Waelsch,
Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juli 1893.)

In einer soeben erschienenen Note[1] ergaben sich die Flächen constanter Krümmung als die einzigen Flächen, deren geodätische Linien eine Gruppirung von einer gewissen Eigenschaft zulassen. Im Folgenden möchte ich die zugehörigen Entwicklungen vorführen, welche sich anschliessen an die der hohen Akademie in der letzten Sitzung vorgelegte Arbeit.[2] Hierbei wird ein Pfaff'sches Problem auftreten, von dessen Integrabilitätsbedingung noch eine geometrische Deutung gegeben werden soll.

1. Gruppirung der geodätischen Linien. Ein Flächenelement ist gegeben durch die Coordinaten x, y, z, p, q; man kann Gleichungen zwischen mehreren Flächenelementen mit den Coordinaten x, y, z, p, q; x', y', z', p', q'; ... betrachten, wie dies Herr Bäcklund gethan hat.[3] Speciell kann man zwei Flächenelemente M_1, M_2 so annehmen, dass die Ebenen der Elemente ihre Punkte enthalten. Ein solches Doppelelement bilden die Brennpunkte und Brennebenen eines Strahles einer Strahlencongruenz.

Dann kann man Mannigfaltigkeiten solcher Doppelelemente, deren es ∞^8 gibt, betrachten, und hier ist es zunächstliegend, das eine Element M_1 eine gegebene Fläche F be-

[1] Siehe Sur les surfaces à élément de Liouville et les surfaces à courbure constante. Comptes rendus, t. 116, p. 1435.

[2] Über Tangentencongruenzen einer Fläche. Sitzungsber. vom 6. Juli.

[3] Siehe Math. Annalen, Bd. 19.

schreiben zu lassen, während das andere M_2 durch mehrere Gleichungen an dieses Element gebunden ist.

Nehmen wir an, dass eine dieser Gleichungen die Ebenen des Doppelelements zu einander senkrecht macht. Besteht dann M_1 aus dem Punkte a der Fläche F und seiner Tangentialebene T_a, so besteht das andere Element M_2 aus einem Punkte a' der Tangentialebene T_a und einer zu T_a senkrechten Ebene $T_{a'}$, welche a enthält. Eine weitere Gleichung zwischen den Flächenelementen wird den Punkt a' auf einer Curve $\mathfrak{A}$ leiten. Man erhält so für jeden Punkt der Fläche eine Curve $\mathfrak{A}$; alle diese Curven bilden eine Congruenz ($\mathfrak{A}$). Man erhält ∞^3 Doppelelemente, und das zweite Element M_2 bestimmt dann ein Pfaff'sches Problem; man kann fragen: »Wie muss man die Curven der Congruenz ($\mathfrak{A}$) annehmen, damit das Pfaff'sche Problem integrabel wird, dass sich also die ∞^3 zweiten Elemente M_2 zu ∞^1 Flächen F' anordnen?«

Jede Fläche F'_0 der ∞^1 Fläche F', welche sich auf diese Weise ergeben, ist mit F' zusammen Brennfläche einer Strahlencongruenz, welche die gemeinsamen Tangenten aa' der Flächen F, F'_0 enthält, und diese Congruenz ist eine Normalencongruenz N_0, weil die Brennebenen T_a, $T_{a'}$ aufeinander senkrecht sind.

Die Strahlen der Congruenz N_0 ordnen sich zu Developpablen, welche ihre Rückkehrcurve auf der Fläche F haben und diese Curven sind geodätische Linien der Fläche F. Man erhält so ∞^1 geodätische Linien der Fläche entsprechend F'_0; für alle Flächen F' und die zugehörigen Normalcongruenzen N ∞^1 Schaaren von ∞^1 geodätischen Linien oder eine Gruppirung der geodätischen Linien der Fläche F.

Wenn demnach die Curven ($\mathfrak{A}$) so bestimmt sind, dass das zugehörige Pfaff'sche Problem integrabel wird, so ergeben sich zunächst die Integralflächen F' durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Sind diese bekannt, so ergeben sich durch Integration einer weiteren Differentialgleichung erster Ordnung die developpablen Flächen der Congruenz N und damit die geodätischen Linien der Fläche F.

In den oben angeführten Arbeiten ergab sich, dass Curven ($\mathfrak{A}$) für Flächen, deren Bogenelement die Liouville'sche

Form hat, allgemeine Strophoiden sind, für Flächen mit Lie'schem Bogenelement gewöhnliche Strophoiden und für auf Rotationsflächen abwickelbare Flächen Kreise, die durch die Punkte a gehen. In den beiden letzten Fällen lassen sich also die Curven $\mathfrak{A}$ durch Rotation und Streckung in einander überführen.

Man kann nun allgemeiner fragen »Wann sind die Curven der Congruenz ($\mathfrak{A}$), welche ein integrables Pfaff'sches Problem liefern, von besonderer Art, z. B. algebraisch?« Dies letztere ist immer der Fall, wenn die Differentialgleichung der geodätischen Linien ein intermediäres erstes Integral besitzt, welches algebraisch von der willkürlichen Constanten abhängt, wie dies z. B. bei den Flächen mit Liouville'schem Bogenelement der Fall ist.

Ferner kann man fragen: »Wann gehen die Curven der Congruenz ($\mathfrak{A}$) durch dieselbe Transformation oder die Transformationen einer Gruppe aus einander hervor? Speciellst: »Wann sind die Figuren, welche aus dem Punkte a und der Curve $\mathfrak{A}$ bestehen, zu einander congruent? Es wird sich zeigen, dass dann die Fläche F constante Krümmung haben, dass aber zu jeder dieser Flächen ∞^2 Congruenzen ($\mathfrak{A}$) gehören, so dass die geodätischen Linien einer solchen Fläche auf ∞^2 Arten so gruppirt werden können, dass die entsprechenden Curven $\mathfrak{A}$ aus einander durch Rotation um den Punkt a hervorgehen.

2. Das Pfaff'sche Problem bei Congruenz der Figuren (a, $\mathfrak{A}$). Wir nehmen also an, dass in den Tangentialebenen T_a der Fläche zu einander congruente Curven $\mathfrak{A}$ gegeben seien, und zwar sollen auch die Figuren, welche aus $\mathfrak{A}$ und dem Punkte a bestehen, zu einander congruent sein. Zeichnen wir in der Tangentialebene T_a einen rechten Winkel, dessen Scheitel a ist, und der zu dieser Figur congruent liegt; wir können dann die Schenkel dieses Winkels als Axen eines Cartesischen Coordinatensystems wählen. Die Gleichung der Curve $\mathfrak{A}$ bezüglich dieses Systems wäre dann $y = f(x)$. Gleichzeitig können wir die Schenkel dieses Winkels als Tangenten der Coordinatencurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ auf der Fläche

wählen. Dann ist die Gleichung eines Punktes der Tangentialebene[1]

$$a+x\frac{b}{\beta}+y\frac{c}{\gamma}=0,$$

wobei $\beta=\sqrt{E}$, $\gamma=\sqrt{G}$ gesetzt wurde.[2]

Demnach ist

$$a'\equiv a+x\frac{b}{\beta}+f(x)\frac{c}{\gamma}$$

ein Punkt der Curve $\mathfrak{A}$. Haben hierin u, v, x bestimmte Werthe, so erhält man einen Punkt des Raumes a'. Durch diesen Punkt a' und die Normale n_a des Punktes a geht die Ebene $T_{a'}$. Sie entspricht dem Punkte a' in dem Pfaff'schen Problem, von welchem oben die Rede war.

Um die Differentialgleichung dieses Pfaff'schen Problems zu bestimmen, müssen wir u, v, x solche Zuwächse ertheilen, dass der Nachbarpunkt

$$\overline{a}'\equiv a'+da'$$

in die Ebene $T_{a'}$ fällt. Es müssen also die Richtungen der Normale n_a, der Geraden aa' und $a'\overline{a}'$ in einer Ebene liegen, d. h. es muss das Matricenproduct

$$\left\|\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\| \left|\begin{matrix} a'-a \\ da' \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\| \left|\begin{matrix} \frac{b}{\beta}x+\frac{c}{\gamma}y \\ da' \end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{(bb)}{\beta}(cda')x-\frac{(cc)}{\gamma}(bda')y=\beta x(cda')-\gamma y(bda')=0 \qquad (1)$$

sein.

---

[1] Vergl. die oben angeführte Arbeit, Art. 5.

[2] Der Punkt a habe die Entwicklung

$$a+(bdu+cdv)+\frac{1}{2}(edu^2+2fdudv+gdv^2)+\ldots$$

Wird der aus m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3 gebildete Ausdruck

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3$$

mit (mn) bezeichnet, so ist das Bogenelement der Fläche

$$ds^2=(bb)du^2+2(bc)dudv+(cc)dv^2,$$

also

$$E=(bb),\quad F=(bc),\quad G=(cc).$$

Nun ist

$$da' = bdu + cdv + \left(\frac{db}{\beta} - \frac{d\beta}{\beta^2}b\right)x + \left(\frac{dc}{\gamma} - \frac{d\gamma}{\gamma^2}c\right)y +$$

$$+ \frac{b}{\beta}dx + \frac{c}{\gamma}dy,$$

und

(da $(bdb) = \frac{1}{2}d(bb) = \frac{1}{2}d\beta^2 = \beta . d\beta$ und $(cdc) = \gamma . d\gamma$ ist)

$$(bda') = \beta^2 du + \frac{(bdc)}{\gamma}y + \beta dx,$$

$$(cda') = \gamma^2 dv + \frac{(cdb)}{\beta}x + \gamma dy$$

Daher wird Gleichung (1):

$$(\gamma dv + \frac{(cdb)}{\beta\gamma}x + dy) - y(\beta du + \frac{(bdc)}{\beta\gamma}y + dx) = 0$$

oder, da wegen $(bc) = 0$ auch $(bdc) + (cdb) = 0$ ist,

$$x\gamma dv - y\beta du + \frac{(x^2+y^2)}{\beta\gamma}(cdb) + xdy - ydx = 0.$$

Diese Gleichung wird (Da $(cdb) = (ce)du + (cf)dv$ und ferner $\frac{\partial(bc)}{\partial u} = 0$, also $(ce) + (bf) = 0$ ist, so ist

$$(ce) = -(bf) = -\frac{1}{2}\frac{\partial(bb)}{\partial v} = -\beta\beta_v,\ (cf) = \frac{1}{2}\frac{\partial(cc)}{\partial u} = \gamma\gamma_u,$$

also $(cdb) = -\beta\beta_v du + \gamma\gamma_u dv$)

$$\left(\beta y + (x^2+y^2)\frac{\beta_v}{\gamma}\right)du - \left(\gamma x + (x^2+y^2)\frac{\gamma_u}{\beta}\right)dv - (xdy - ydx) = 0.$$

Führt man hier statt x, y Polarcoordinaten r, ein, so geht diese Gleichung über in

$$\left(\beta\sin\varphi + r\frac{\beta_v}{\gamma}\right)du - \left(\gamma\cos\varphi + r\frac{\gamma_u}{\beta}\right)dv - rd\varphi =$$

$$= Pdu + Qdv - rd\varphi = 0. \quad)\ 2)$$

Dies ist also die zur Congruenz $(\mathfrak{A})$ zugehörige Pfaff'sche Gleichung in den Coordinaten u, v, φ. Ihre Integrabilitätsbedingung ist

$$PQ_{\varphi}-QP_{\varphi}-r(P_v-Q_u)=$$

$$=\beta\gamma-r^2\left\{\left(\frac{\beta_v}{\gamma}\right)_v+\left(\frac{\gamma_u}{\beta}\right)_u\right\}-\frac{dr}{d\varphi}(\gamma_u \sin\varphi-\beta_v\cos\varphi)=0. \quad (3)$$

Nun ist nach einer Formel von Codazzi[1]

$$-\frac{1}{\beta\gamma}\left\{\left(\frac{\beta_v}{\gamma}\right)_v+\left(\frac{\gamma_u}{\beta}\right)_u\right\}=K,$$

das Krümmungsmass der Fläche im Punkte a, und ferner sind

$$\lambda=\frac{\gamma_u}{\beta\gamma}, \quad \mu=-\frac{\beta_v}{\beta\gamma}$$

die respectiven geodätischen Krümmungen der Coordinatenlinien $u=$ const., $v=$ const. im Punkte a, so dass die Integrabilitätsbedingung (3) wird

$$r'=\frac{1+Kr^2}{\lambda\sin\varphi+\mu\cos\varphi}. \quad (4)$$

Nur Flächen constanter Krümmung. Es können nun zwei Fälle eintreten. Entweder verschwindet in der letzten Gleichung r' für alle Werthe von φ oder nicht. Im ersten Falle muss $1+Kr^2=0$ sein, also $r^2=-\frac{1}{K}$. Nun war vorausgesetzt, dass die Gleichung der Curve $\mathfrak{A}$ in allen Tangentialebenen T_a der Fläche dieselbe $y=f(x)$ sei, dass also r nicht von u, v abhängt; es muss demnach vermöge der letzten Gleichung K von u, v unabhängig sein. Die Fläche hat daher constante Krümmung und die Curve $\mathfrak{A}$ ist ein Kreis R_a mit dem Mittelpunkt a und dem Radius $\sqrt{-\frac{1}{K}}$ Dies gibt die bekannte Lie'sche unendlichdeutige Transformation der Flächen con-

---

[1] Siehe Stahl und Kommerell, Die Grundformeln der Flächentheorie, S. 32.

stanter Krümmung. Denn die Integralflächen F' des Pfaff'schen Problems sind hier wieder Flächen constanter Krümmung und die Lie'sche Transformation besteht eben darin, dass man von dem Flächenelement M_1 der Flächen F zu dem Element M_2 der Fläche F' übergeht.

Wäre im zweiten Falle r' ein Werth, welcher von Null verschieden ist, so ist

$$\frac{1+Kr^2}{r'}-(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)=0; \tag{5}$$

diese Gleichung soll bestehen für alle Werthe von u, v; es muss demnach

$$K_u\frac{r^2}{r'}-(\lambda_u\cos\varphi+\mu_u\sin\varphi)=0,$$

$$K_v\frac{r^2}{r'}-(\lambda_v\cos\varphi+\mu_v\sin\varphi)=0$$

sein. Dies gibt, dass die Functionaldeterminanten von K, λ, μ verschwinden, dass also λ und μ Functionen von K sind.

In Gleichung (4) sind demnach λ und μ Functionen von K. Werden in diese Gleichung die Werthe von φ, r, r' eines Punktes der Curve $\mathfrak{A}$ eingesetzt, so muss diese Gleichung auch bestehen für den congruenten Punkt in den anderen Tangentialebenen. Man hat demnach für alle Punkte der Fläche dieselbe Gleichung für K; daher ist K constant, also auch λ und μ.

Die Curvenschaaren $u=$ const., $v=$ const. haben demnach die constanten geodätischen Krümmungen

$$\lambda=c_1,\quad \mu=c_2;$$

die Curven dieser Schaaren schneiden sich zudem orthogonal. Diese Schaaren müssen folglich nach einem bekannten Satze isometrische Schaaren sein. Daher kann man in dem Bogenelemente der Fläche $E=G$ oder $\beta=\gamma$ setzen. Es wird demnach

$$\lambda=\frac{\beta_u}{\beta^2}=c_1 \text{ und } \mu=-\frac{\beta_v}{\beta^2}=c_2$$

Dies gibt

$$\frac{\beta_u}{\beta_v} = \frac{c_1}{c_2}$$

oder

$$\beta = f(c_1 u + c_2 v).$$

Da aber $\frac{\beta_u}{\beta^2} = c_1$ ist, folgt

$$\frac{f'}{f^2} = 1 \quad \text{oder} \quad f = \frac{1}{-(c_1 u + c_2 v) + c}.$$

Es ergibt sich demnach

$$E = G = \frac{1}{(c_1 u + c_2 v + c)^2}$$

Wir können hier $c = 0$ setzen und haben dann das Bogenelement

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(c_1 u + c_2 v)^2} \tag{6}$$

und daher

$$K = -(c_1^2 + c_2^2).$$

4. Die Curven $\mathfrak{A}$. Die Differentialgleichung (4) geht nun über in

$$r' = \frac{1 - r^2(c_1^2 + c_2^2)}{c_1 \sin\varphi + c_2 \cos\varphi},$$

oder wenn

$$\sqrt{-K} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sigma, \quad \frac{c_1}{\sigma} = \cos\vartheta, \quad \frac{c_2}{\sigma} = \sin\vartheta$$

gesetzt wird, in

$$\frac{\sigma dr}{1 - \sigma^2 r^2} = \frac{d\varphi}{\sin(\vartheta + \varphi)} = \frac{d(\vartheta + \varphi)}{\sin(\vartheta + \varphi)}.$$

Führen wir neue Veränderliche ein

$$\sigma r = \rho, \quad \vartheta + \varphi = \psi,$$

so wird diese Gleichung

$$\frac{d\rho}{1 - \rho^2} = \frac{d\psi}{\sin\psi}.$$

Diese Gleichung gibt integrirt

$$\frac{1-\rho}{1+\rho} = c \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}$$

und, wenn $\frac{c+1}{c-1}$ als neue Constante C eingeführt wird

$$\rho = \frac{1+C\cos\psi}{C+\cos\psi}$$

oder

$$\sigma r = \frac{1+C\cos\psi}{C+\cos\psi}.$$

Führt man wieder Cartesische Coordinaten ein, so wird diese Gleichung

$$C^2(\sigma(x^2+y^2)-1)^2 = (x^2+y^2)(1-\sigma x)^2. \tag{7}$$

Für $C^2 =$ wird diese Gleichung

$$\{\sigma^2(x^2+y^2)-1\}y^2 = 0;$$

hierin ist $\sigma^2(x^2+y^2)-1$ die Gleichung des Kreises R_a (siehe Art. 3), da $\sqrt{-\frac{1}{K}} = \frac{1}{}$ ist. Daher kann (6) auch geschrieben werden in der Form

$$R_a y^2 - \lambda R'^2 = 0, \tag{8}$$

worin $R' = \sigma(x^2+y^2)-x = 0$ die Gleichung des Kreises R' ist, welcher durch a geht und den Kreis R_a im Punkte a' berührt, und λ ein Parameter ist.

Wir erhalten somit in Gleichung (7) oder (8) als Gleichungen der Curven $\mathfrak{A}$ ein Büschel von Curven vierter Ordnung. Da aber eine Fläche constanter Krümmung in ∞^1 Weisen das Bogenelement (6) erhalten kann, so kann dieses Büschel noch um a gedreht werden. Dann tritt in Gleichung (8) an Stelle von y^2 ein t^2, wobei $t = 0$ die Gleichung einer beliebigen Tangente des Punktes a ist, so dass die Gleichung einer Curve $\mathfrak{A}$ wird

$$R_a t^2 + \lambda R'^2 = 0. \tag{9}$$

Es gibt demnach für jede Fläche constanter Krümmung ∞^2 Curven $\mathfrak{A}$, für welche das zugehörige hier eine Lösung der folgenden Aufgabe vorliegt: »Auf der Normale der einen Schale der Centrafläche einer Fläche nehme man einen Punkt an als Punkt eines Flächenelements und die Ebene dieses Elements lasse man durch die entsprechende Normale der anderen Schale der Centrafläche gehen. Man erhält so für sämmtliche Normalen der ersten Schale ∞^3 Flächenelemente und es fragt sich nun, wann ist das zugehörige Pfaff'sche Problem integrabel?« Nach dem Obigen ergibt sich, dass dies jedenfalls für die beiden Schalen einer Fläche Φ stattfindet, deren Hauptkrümmungsradien für alle Punkte eine constante Differenz haben.

6. Congruenz ebener Curven. Es mögen nun noch einige Resultate über Congruenzen ebener Curven und eine geometrische Deutung der Integrabilitätsbedingung eines hierbei auftretenden Pfaff'schen Problems, sowie des Pfaff'schen Problems, mit dem wir uns bisher beschäftigt haben, hier ihren Platz finden.

Die Tangenten einer 1-Schaar von Curven (einer Schaar von ∞^1 Curven) auf einer Fläche F bilden eine Strahlencongruenz. Für die Tangente t_a, welche im Punkte a berührt, ist a der eine Brennpunkt, der andere sei a'; die eine Brennebene ist die Tangentialebene T_a des Punktes a, die andere heisse $T_{a'}$. Ist eine 1-1-Schaar (d. h. ∞^1 Schaaren von ∞^1 Curven) S_{11} gegeben, so entspricht jeder S_1 derselben eine Strahlencongruenz. Die Punkte a' dieser Congruenzen bilden in der Ebene T_a eine Curve C_a. Diese Curven C_a für alle Punkte der Fläche bilden eine Curvencongruenz (C_a), welche »als zu S_{11} zugehörig« bezeichnet werden soll.

Es gibt also soviel Congruenzen (C_a), als es S_{11} auf der Fläche F gibt. Liegt umgekehrt eine Congruenz (C) ebener Curven vor, so umhüllen die Ebenen dieser Curven eine Fläche F und es lässt sich zeigen, dass die Congruenz (C) zu soviel Schaaren S_{11} gehört, als sich ∞^2 Curven zu 1-1-Schaaren anordnen lassen.

Jeder S_{11} entspricht zunächst eine 2-Schaar (C) von Raumcurven oder ein System von totalen Differentialgleichungen im Raume. Denn durch jeden Punkt a' des Raumes geht eine

(eine in einem gehörig begrenzten Gebiete) Curve C_a der zu S_{11} zugehörigen Congruenz (C_a).

Die Gerade $a'a$ gibt demnach für den Punkt a' ein Linienelement; diese Linienelemente bestimmen das gesuchte System, dessen Integralcurven die Curven $(\mathfrak{C})$ sind. Die Tangenten dieser Integralcurven sind auch Tangenten der Fläche F; daher wird jede Integralfläche F' des Systems als von solchen Curven $\mathfrak{C}$ erzeugt, mit F zusammen Brennfläche einer Strahlencongruenz sein. Die Strahlen dieser Congruenz sind Tangenten an eine 1-Schaar von Curven der Fläche F; der zweite Brennpunkt des Strahles, welcher in a berührt, liegt auf C_a. Nimmt man demnach ein Integral des Systems, also ∞^1 Integralflächen F', so bewegt sich dieser Brennpunkt auf C_a und man hat demnach (C_a) als zugehörig zu einer S_{11} construirt. (C_a) gehört also zu soviel S_{11}, als es Integrale des gefundenen Systems gibt.

Die zu einer 1-Schaar conjugirten Curven bilden eine 1-Schaar, welche ihre »conjugirte 1-Schaar« heissen möge. Die conjugirten 1-Schaaren der 1-Schaaren einer S_{11} bilden »die conjugirte Schaar Σ_{11} der gegebenen S_{11}«. Die ∞^2 Curven dieser Σ_{11} sind Integralcurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und so gehört zu jeder S_{11} eine conjugirte Σ_2 oder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man kann nun leicht zeigen, dass die Congruenz (C_a) für diejenigen S_{11} dieselbe ist, welche dieselbe Σ_2 haben. Hierzu beachte man, dass einer der obigen Curven $(\mathfrak{C})$ eine Developpable umschrieben ist, welche die Fläche F längs einer Curve $\mathfrak{c}$ berührt. Allen ∞^2 Curven $(\mathfrak{C})$ entsprechen ∞^2 Curven $(\mathfrak{c})$, welche die gesuchte Schaar Σ_2 bilden. Denn nimmt man aus dieser 2-Schaar eine 1-Schaar Σ_1 und von dieser die conjugirte Schaar S_1, so liegt der Brennpunkt a' der Tangentencongruenz der Curvenschaar S_1 auf der Curve C_a.

Wenn also eine S_{11} gegeben ist, und alle anderen 1-1-Schaaren zu finden sind, welchen dieselbe (C_a) zugehört, suche man die zu S_{11} gehörige Schaar Σ_2; jeder 1-1-Schaar dieser Σ_2 ist eine 1-1-Schaar conjugirt, welche dieselbe Congruenz (C_a) liefert.

Nehmen wir z. B. eine Fläche mit der constanten Krümmung $-\frac{1}{\rho^2}$; sie lässt sich als Brennfläche von ∞^1 Normalencongruenzen auffassen, für welche die Brennpunkte einer Normale den constanten Abstand ρ haben. Daher kann man auch sagen, dass sich die geodätischen Linien dieser Flächen zu einer 1-1-Schaar anordnen lassen, deren zugehörige Congruenz (C_a) aus Kreisen mit dem Radius ρ und dem Mittelpunkt a besteht. Hier bilden die Flächen F' die zweiten Mäntel der Centraflächen dieser Normalensysteme, Integralflächen des obigen Systems totaler Differentialgleichungen; die Integralcurven dieses Systems sind geodätische Linien auf diesen Flächen. Die Flächen F' entsprechen der Fläche F in der Lie'schen unendlichdeutigen Transformation der Flächen constanter Krümmung. Man findet nach Obigem alle Tangentencongruenzen der Flächen constanter Krümmung, für welche die Brennpunkte eines Strahles den constanten Abstand haben.

Es sei nun in den Tangentialebenen der Fläche F die Curvencongruenz (C_a) gegeben. Ferner sei ein Gesetz gegeben, vermöge dessen jedem Punkte a' von C_a eine Ebene $T_{a'}$ zugeordnet ist, welche den Punkt a enthält. Dann ist also jedem Punkte a' des Raumes (als auf einer C_a liegend) eine durch ihn gehende Ebene zugeordnet; es ist demnach ein Pfaff'sches Problem gegeben. Wir wollen nun einen geometrischen Ausdruck für dessen Integrabilitätsbedingung suchen. Hiezu müssen wir Einiges vorausschicken.

Es sei auf der Fläche F die Curvenschaar S_t mit ihrer Tangentencongruenz (t) gegeben. Weist man dann dem Brennpunkt a die Brennebene $T_{a'}$ des anderen Brennpunktes a' als entsprechend zu, so geschieht dieses Entsprechen in der Nachbarschaft des Punktes a in einem linearen Complex (dem Begleitcomplex des Strahles t_a);[1] in diesem Complex entspricht dem Punkt a' die Ebene T_a. Es gilt ferner:

Ist τ_a die conjugirte Tangente der Tangente t_a für die Fläche F und $\tau_{a'}$ die conjugirte Tangente der Brennfläche F', so

[1] Siehe hierfür und das Folgende: »Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. Diese Sitzungsber., 1891, S. 164.

entsprechen sich diese Geraden τ_a und $\tau_{a'}$ als conjugirte Polaren dieses Begleitcomplexes. Schreitet man mit a' auf $\tau_{a'}$ weiter, so dreht sich $T_{a'}$ um t_a, mit a auf t_a, so bewegt sich a' auf $\tau_{a'}$.

Wenn nun das obige Pfaff'sche Problem integrabel ist, dann sei F' eine Integralfläche. Dann muss nach dem soeben Gesagten, wenn a auf t_a in den Nachbarpunkt $\bar{a}_1$ geht, der entsprechende Punkt a' auf $\tau_{a'}$ nach $\bar{a}'_1$ gehen, d. h. es muss die Curve C_a die Gerade $\tau_{a'}$ schneiden. Diese Bedingung ist daher nothwendig zur Integrabilität, sie ist aber auch hinreichend.

Nach Voss lässt sich nämlich die Integrabilitätsbedingung für ein Pfaff'sches Problem folgendermassen ausdrücken: Jedem Nachbarpunkt $\bar{a}'$ von a' auf der Fläche F' entspricht eine Ebene $T_{\bar{a}'}$, welche $T_{a'}$ in einer Geraden schneidet, die der Verbindungslinie $a'\bar{a}'$ involutorisch entsprechen muss. Da nun nach Voraussetzung der Punkt $\bar{a}'_1$ auf $\tau_{a'}$ liegt, so muss die Ebene $T_{\bar{a}'_1}$, die ja die Gerade $\bar{a}_1\bar{a}'_1$ enthält, die Ebene $T_{a'}$ in der Geraden aa' schneiden. Soll die Beziehung involutorisch sein, so muss dann noch dem Punkte $\bar{a}'_2$, welcher auf aa' zu a' benachbart liegt, wieder die Gerade $\tau_{a'}$ entsprechen. Denn dem Punkte $\bar{a}'_2$ entspricht der Punkt a_2, welcher auf τ_a liegt und die Ebene $T_{\bar{a}'_1}$ entspricht nach Obigem dem Punkte $\bar{a}_2$ im Begleitcomplex; sie muss daher die conjugirte Polare $\tau_{a'}$ von τ_a enthalten.

Wir haben demnach folgende nothwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität des Pfaff'schen Problems:

Jedem Punkt a von F weise man die Ebene $T_{a'}$ zu in der Nähe von a entspricht dann der Punkt $\bar{a}$ der Ebene $T_{\bar{a}'}$ in einem linearen Complex. Der conjugirten Tangente τ_a der Tangente t_a ist bezüglich des linearen Complexes eine Gerade $\tau_{a'}$ conjugirt. Wenn man mit a auf t_a fortschreitet, so muss die zugehörige Curve C_a diese Gerade $\tau_{a'}$ schneiden.

Ist die Strahlencongruenz (t) eine Normalencongruenz, so kann man diese Bedingung in anderer Weise ausdrücken. In diesem Falle enthält die Ebene $T_{a'}$ die Normale n_a des Punktes a für die Fläche F, und der Begleitcomplex des Punktes a enthält daher die Normale n_a und die zu ihr benachbarten Normalen der Fläche F. Er enthält daher auch[1] die Centrallinien der Normale in ihren Hauptkrümmungsmittelpunkten c_1, c_2. Die Geraden τ_a, $\tau_{a'}$ sind dann die Krümmungsaxen der Krümmungslinien der Flächen Φ, deren Normalencongruenz (t) ist. Da sie bezüglich des Begleitcomplexes conjugirt sind, so ist der Nullpunkt ω der Ebene, welche n_a und t_a verbindet, derjenige Punkt, in welchem n_a von geschnitten wird.

Durch den Begleitcomplex entsprechen demnach projectiv:

Den Hauptkrümmungsmittelpunkten c_1, c_2 die Tangentialebenen C_2, C_1 der Centrafläche von Φ und

den Punkten a, ω, respective die Ebenen, welche n_a mit a' und τ_a verbinden. Diese Projectivität ist dadurch, dass c_1, c_2, a den Ebenen C_2, C_1, $(n_a t_a)$ entsprechen, bestimmt und ω ist dann der entsprechende Punkt zur Ebene $(n_a \tau_a)$. Da nun die Geraden t_a und τ_a einander in der Dupin'schen Tangenteninvolution entsprechen, so folgt, dass die Beziehung zwischen ω und t_a eine (1, 2)-deutige ist. Man findet für diese Beziehung leicht: Fällt ω mit c_1, respective c_2 zusammen, so liegt die bei den entsprechenden Tangenten t_a in C_1, respective C_2; fällt ω nach a, so sind die Tangenten t_a identisch mit den Inflexionstangenten der Fläche Φ.

Dieselben Paare sind aber entsprechend in der Beziehung, welche besteht zwischen t_a und dem Kreuzungspunkt der Normale n_a mit der Normale $n_{\bar{a}}$ des Nachbarpunktes $\bar{a}$, welcher auf τ_a liegt. Zunächst gilt demnach der Satz:

Sind c_1, $\bar{c}_1$ die Nachbarpunkte, in welchen die Hauptbrennlinie des Punktes c_1 die Centrafläche schneidet, n_1, $\bar{n}_1$ die Normalen der Centrafläche für diese Punkte und $\varkappa$ der Kreuzungspunkt der Geraden n_1 und $\bar{n}_1$ (Schnittpunkt von n_1 mit der kürzesten Transversale zu $\bar{n}_1$), dann ist die Gerade, welche $\varkappa$ mit c_2 verbindet, Krümmungsaxe des Punktes a der Krümmungslinie der Fläche Φ.

Es sei nun eine Curvencongruenz (C_a) gegeben und die Brennebenen T_a, $T_{a'}$ seien aufeinander senkrecht. Dann ist die

---

[1] Siehe »Zur Infinitesimalgeometrie etc.«, S. 168.

Gerade $\tau_{a'}$, welche zu t_a auf F' conjugirt ist, Krümmungsaxe. Nach dem letzten Satze liegt der Kreuzungspunkt der Normale des Punktes a und ihrer Nachbarnormale, die τ_a schneidet, auf dieser Krümmungsaxe. Wir erhalten demnach den Satz:

Damit die Curvencongruenz (C_a) ein integrables Pfaff'sches Problem liefere, dessen Integralflächen mit F zusammen Centraflächen sind, ist Folgendes nothwendig und hinreichend. Ist $\varkappa$ der Kreuzungspunkt der Normalen der Nachbarpunkte a, $\bar{a}$ von F, wobei $\bar{a}$ auf der conjugirten Tangente τ^a von t_a liegt, so muss die Curve $C_{\bar{a}}$ die Gerade schneiden, welche $\varkappa$ mit dem Schnittpunkte a' von t_a mit C_a verbindet.