Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale

(III. Theil)

von

Max Margules.

(Mit 2 Tafeln.)

In den zwei vorhergehenden Theilen dieser Abhandlung wurden die freien Bewegungen der Luft in einer rotirenden Niveauschale von constanter Temperatur untersucht; es liessen sich nicht nur die Bewegungen in reibungsloser Luft, soweit zu ihrer Behandlung die linearen Glieder der aërodynamischen Gleichungen ausreichen, vollständig classificiren, die allgemeinen Entwicklungen durchführen und an Beispielen erläutern, sondern man konnte auch die Reibung in Rechnung ziehen, wenn man sich mit einer Flächenreibung begnügen wollte.

Die bei diesem Anlass gewonnene Erfahrung lud dazu ein, den Einfluss der Reibung auf Wellen zu untersuchen, welche durch Temperaturschwingungen oder durch periodische Kräfte entstehen. Das Problem der erzwungenen Wellen hat eine Beziehung zu der Erscheinung der täglichen Barometerschwankung und es schien mir nützlich, die Rechnungen, welche in einer Abhandlung: »Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft«[1] nur für reibungslose Luftbewegungen durchgeführt waren, ausführlicher zu behandeln. Die Wiederholung mancher dort angeführten Überlegungen und Rechnungen lässt sich dabei nicht vermeiden.

---

[1] Sitzungsber., Bd. XCIX, 1890, im Folgenden als »Abh. 1890« bezeichnet.

Der auf den Sonnentag bezogene mittlere Gang des Luftdrucks in einem Orte A wird, wenn man die wahre Zeit als Abscisse, die Abweichung des Druckes vom Mittelwerthe als Ordinate aufträgt, durch eine unregelmässige Curve dargestellt. Zerlegt man diese in mehrere Sinuscurven, welche den Perioden von 24, 12, 8. Stunden zugehören, so haben die erste und die zweite beträchtliche Amplituden (in continentalen tropischen Orten von der Grössenordnung $^1/_{760}$ des normalen Druckes), während die dritte und die folgenden ziemlich unbedeutende, vorläufig ausser Acht zu lassende Glieder sind. Für den Ort A kann man den mittleren täglichen Gang des Luftdruckes an irgend einem Tage des Jahres beinahe ausreichend darstellen durch

$$C_1 \sin(\nu\vartheta + \delta_1) + C_2 \sin(2\nu\vartheta + \delta_2).$$

C_1, C_2, δ_1, δ_2 sind Functionen der Jahreszeit, $2\pi/\nu$ der Tag, ϑ die wahre Ortszeit in A.

In einem nahen Orte B, welcher sich nur in der geographischen Länge von A unterscheidet, gilt dieselbe Formel für den täglichen Gang des Luftdruckes, wenn ϑ jetzt die Ortszeit in B bezeichnet.

Wäre die Erdoberfläche durchaus gleichartig, oder auch wenn ihre Beschaffenheit nur mit der geographischen Breite veränderlich wäre, so müsste das, was von den Orten A und B gesagt wurde, für alle Orte eines Parallelkreises gelten. Bezeichnet man nun mit t die wahre Zeit im Meridian Null, mit λ die östliche Länge, so wäre auf einer solchen idealen Erde der tägliche Gang des Luftdruckes dargestellt durch

$$E_1 \sin(\lambda + \nu t + \delta_1) + E_2 \sin(2\lambda + 2\nu t + \delta_2),$$

zwei einfache, westwärts wandernde Wellen. E_1, E_2, δ_1, δ_2 wären Functionen der Breite, der Höhe und der Jahreszeit.

Als die wahrscheinliche Ursache der täglichen Barometerschwankung ist die tägliche Temperaturschwankung anzusehen. Für das erste Glied, die 24-stündige Schwingung, ist der Zusammenhang empirisch nachgewiesen. Für das zweite Glied, die halbtägige Schwingung, besteht nach dieser Richtung ein noch nicht überwundenes Hinderniss.

Aufgabe der Rechnung wäre es, zu untersuchen, welche Druckwellen auf einer Erde von der eben beschriebenen regelmässigen Beschaffenheit durch westwärts wandernde Temperaturwellen oder durch andere periodische Anregungen erzeugt werden. Aber auch dieses Problem bietet zu grosse Schwierigkeiten, wenn man es durch eine einzige, alle wesentlichen Umstände umfassende Rechnung lösen will. Es empfiehlt sich, die Aufgabe zu theilen und an mehreren einfachen Systemen den Einfluss einzelner Umstände zu untersuchen.

Der einfachste Fall, die Druckwelle, welche in einer Röhre durch eine fortschreitende Temperaturwelle erzeugt wird, soll als Einleitung dienen. Der kürzeren Rechnung wegen wird auch hier angenommen, die Reibung sei der Geschwindigkeit der Luftheilchen proportional; die Röhre ist als ruhend vorausgesetzt, ihre Axe sei die x-Axe. T absolute Temperatur p Druck im Ruhezustande der Luft, RT das Verhältniss von Druck und Dichte, demnach $\sqrt{RT}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer freien, streng isothermen Welle. $T(1+\tau)$ die veränderliche Temperatur, $p(1+\varepsilon)$ der Druck der bewegten Luft.

Ist τ ein sehr kleiner Bruch, so wird im Allgemeinen auch ε ein solcher sein und auch die Geschwindigkeit u wird gering bleiben.

Die Bewegungsgleichungen und die Continuitätsgleichung sind,[1] wenn keine äusseren Kräfte auf die Luft wirken,

$$-RT\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

l ist die Reibungsconstante.

Setzt man

$$\tau = A \sin(mx+nt),$$

so wird bei positiven Werthen von m und n eine nach der Richtung $-x$ fortschreitende Temperaturwelle angenommen.

$m = 2\pi/L$, $n = 2\pi/\Theta$, L die Wellenlänge, Θ die Schwingungsdauer, $L/\Theta = n/m = V$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle.

---

[1] Man vergl. die Abh. 1890.

Mit diesem Werthe von τ erhält man

$$\varepsilon = KA \sin(mx+nt+\eta), \quad u = MA \sin(mx+nt+\zeta),$$

wobei die Constanten K, M, η, ζ aus den Bewegungsgleichungen zu bestimmen sind. (Am schnellsten findet man die Lösung, wenn man vorläufig $\tau = Ae^{i(mx+nt)}$, $\varepsilon = Be^{i(mx+nt)}$, $u = Ce^{i(mx+nt)}$ setzt; B und C sind complexe Grössen.) Dazu kämen noch alle freien Bewegungen, welche in einer Röhre von constanter Temperatur möglich sind. Von diesen, welche in der Einleitung des zweiten Theiles angegeben wurden, ist hier abzusehen, da wir es nur mit der erzwungenen Welle zu thun haben.

Setzt man zur Abkürzung

$$a^2 = n^2 - RTm^2, \quad \sqrt{a^4+n^2l^2} = b^2, \quad \sqrt{n^2+l^2} = n'$$

so ist

$$K = \frac{nn'}{b^2}, \quad \cos\eta = \frac{n}{n'}\,\frac{a^2+l^2}{b^2}, \quad \sin\eta = \frac{l}{n'}\,\frac{RTm^2}{b^2},$$

$$M = \frac{RTmn}{b^2}, \quad \cos\zeta = -\frac{a^2}{b^2}, \quad \sin\zeta = -\frac{nl}{b^2}.$$

Alle Wurzeln sind mit positivem Vorzeichen genommen. Wir betrachten zunächst den Fall, dass

$$n^2 - RTm^2 > 0, \tag{1}$$

oder $V > \sqrt{RT}$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Temperaturwelle, also auch der erzwungenen Druckwelle, grösser ist, als diejenige einer freien isothermen Welle in reibungsloser Luft (welche 279·9 m/sec. beträgt bei $T = 273°$).

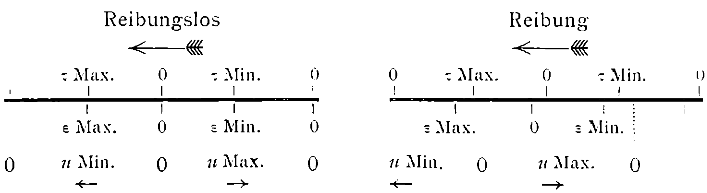
Für $l = 0$ ist $\eta = 0$ und $\zeta = \pi$. Mit wachsendem l nimmt ζ beständig zu, bis es für $l = \infty$ den Werth $3\pi/2$ erreicht. η wächst anfangs mit l, erreicht ein Maximum, wenn $l = a$ und nimmt dann wieder ab; sein Werth bleibt stets zwischen Null und $\pi/2$.

Bei reibungsloser Bewegung fällt das Maximum des Druckes mit dem Maximum der Temperatur zusammen und im

Orte des Maximums herrscht die grösste Geschwindigkeit in der Richtung der Fortpflanzung.

Bei Reibung wandert das Druckmaximum vor dem Temperaturmaximum, aber stets innerhalb des nächsten Viertels der Wellenlänge; in demselben Intervall liegt der Ort stärksten Windes in der Fortpflanzungsrichtung, welcher bei sehr grosser Reibung nahe an den Ort mittlerer Temperatur heranrückt. Im folgenden Schema sind die Verhältnisse für $l = 0$ und für grosse Reibung veranschaulicht. Die grossen Pfeile zeigen die Fortpflanzungsrichtung der Welle, die kleinen Pfeile die Windrichtung.

$$V > \sqrt{RT}$$



Wenn

$$n^2 - RTm^2 < 0, \tag{2}$$

oder $V < \sqrt{RT}$, ist das a^2 in den Formeln für K, η, M, ζ negativ; man ersetze es durch $-a'^2$.

Für $l = 0$ ist $\eta = \pi$, $\zeta = 0$; lässt man l von Null bis ∞ wachsen, so nimmt η beständig ab von π bis 0, von 0 bis $-\pi/2$.

Bei reibungsloser Bewegung fällt hier das Minimum des Druckes mit dem Maximum der Temperatur zusammen; bei Reibung wandert das Druckminimum hinter dem Temperaturmaximum und kommt bei sehr grossem l nahe an das Temperaturminimum heran.

Die Orte stärksten Windes, welche bei reibungsloser Bewegung mit denen der Druckextreme zusammenfallen, rücken bei grosser Reibung gegen die Orte mittleren Druckes zurück.

$$V < \sqrt{RT}$$

Reibungslos

←——⋘

0	τ Max.	0	τ Min.	0
0	ε Min.	0	ε Max.	0
0	u Max.	0	u Min.	0
	→		←	

Reibung

←——⋘

0		τ Max.		0		τ Min.		0
	ε Max.			0	ε Min.		0	
		0		u Max.		0		u Min.
				→				←

Je grösser die Reibung, desto geringer wird der Einfluss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf das Verhältniss der Druckwelle zur Temperaturwelle; in dem Grenzfall $l = \infty$ wird $K = 1$, $\eta = 0$, $M = 0$, gleichviel ob V grösser oder kleiner als $\sqrt{RT}$ ist; wenn die Luft in der Röhre unbeweglich ist, bleibt die Dichte constant und der Druck ändert sich in demselben Maasse, wie die absolute Temperatur.

Bezeichnet μ die Dichte im Ruhezustande, $\mu(1+\sigma)$ die Dichte der bewegten Luft, so ist $\sigma = \varepsilon - \tau$; aus der Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

folgt

$$\sigma = -\frac{m}{n} M.A \sin(mx+nt+\zeta) = -\frac{u}{V}.$$

Demnach ist in der erzwungenen ebenso wie in der freien Welle der Ort grösster Geschwindigkeit in der Fortpflanzungsrichtung zugleich der Ort grösster Dichte.

Der Fall, dass die Luft durch eine längs der Röhre periodisch fortschreitende Kraft in Bewegung gesetzt wird, lässt sich auf die vorhin behandelte Aufgabe zurückführen. Ist $\partial W/\partial x$ die auf die Masseneinheit in der Richtung x wirkende Kraft und bleibt die Temperatur constant, so sind die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial (W - RT.\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u}{dx} = 0.$$

Führt man ein

$$W - RT\varepsilon = -RT.y,$$

so gehen die Gleichungen über in

$$-RT\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + lu, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{W}{RT} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Das sind dieselben Differentialgleichungen, wie im vorigen Falle, nur dass y statt ε und $-W/(RT)$ statt τ steht.

Wenn nun das Potential der periodischen Kraft durch

$$W = C.\sin(mx+nt)$$

gegeben ist, so kommt $C/(RT)$ an Stelle des früheren A. Man erhält

$$u = M.\frac{C}{RT}.\sin(mx+nt+\zeta).$$

M und ζ haben dieselben Werthe wie vorhin. ε findet man am leichtesten aus der Continuitätsgleichung

$$\varepsilon = -\frac{M}{V}\,\frac{C}{RT}\sin(mx+nt+\zeta).$$

In den schematischen Darstellungen für die reibungslose Bewegung ist nur τ Max. durch W Min., τ Min. durch W Max. zu ersetzen, um die Druck- und Bewegungsverhältnisse für diesen Fall zu überblicken.

In den zwei anderen für Reibung bleiben die Orte grösster Geschwindigkeit ungeändert; Max. fällt mit u Min., ε Min. mit u Max. zusammen.

Es werden zunächst die durch Temperaturwellen erzwungenen Druckwellen in einer rotirenden Schale berechnet. Das Verfahren, welches auf freie Wellen angewendet wurde, reicht hier nicht für alle Fälle aus, aber doch für grosse Gruppen, zu denen auch die in der Abh. 1890 angeführten Beispiele gehören. Diese werden neuerdings sowohl für reibungslose Bewegung, wie für grosse Reibung berechnet, durch Zeichnungen dargestellt, ihre Beziehungen zu den zugehörenden freien Wellen untersucht.

In einem Anhang sind die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in einer rotirenden Niveaufläche angegeben, woraus sich die Bewegungsgleichungen der Luft in einer Niveauschale ableiten lassen.

Ein zweiter Anhang enthält Gegenstände, welche nicht dem im Titel der Abhandlung angezeigten Gebiete angehören, deren Behandlung aber für die Theorie der täglichen Luftdruckschwankung nützlich erscheint.

A. Bewegung der Luft in einer verticalen Säule. Ist die Säule unendlich hoch und findet in ihr eine Temperaturschwingung von langer Periode statt, so bleibt der Druck am Boden ungeändert, und der Druck in einer bestimmten Höhe ist gleich demjenigen, welcher dort stattfände, wenn die zur gegebenen Zeit bestehende Temperaturvertheilung constant bliebe. Bei einer ganztägigen oder halbtägigen Schwingung sind die Abweichungen von dem statischen Druck völlig zu vernachlässigen. Die barometrische Höhenformel ist mit grosser Annäherung anwendbar. Das gilt ebenso für eine Säule von begrenzter Höhe, welche oben in die freie Atmosphäre mündet. Die erzwungenen Schwingungen in einer solchen Luftsäule sind leicht zu berechnen. Sie lassen sich auch mit denen vergleichen, welche durch die tägliche Erwärmung in Bergkesseln und in engen Thälern entstehen; danach sind die Unterschiede zu beurtheilen, welche die tägliche Druckschwankung daselbst gegenüber derjenigen auf dem flachen Lande aufweist.

B. Fortschreitende Welle in einer Atmosphäre mit ebener oder cylindrischer Unterlage. In der Schale hatten wir eine Bewegung nach Länge und Breite behandelt, hier betrachten wir eine Bewegung, welche nach Länge und Höhe stattfindet. Wenn die Periode ein Tag oder ein halber Tag, die Wellenlänge von der Grössenordnung des Erdradius ist, genügt es, statt der Gleichung für die verticale Bewegung die barometrische Höhenformel zu setzen. Das wird an einem schon vorher berechneten Fall verificirt und ein anderes Beispiel — die Amplitude der Temperaturwelle hat in einer Höhenschicht einen constanten Werth, ausserhalb der Schicht findet keine Temperaturänderung statt — wird hinzugefügt. Dieses ist in Hinblick auf eine Hypothese von Hann über die Ursache der halbtägigen Druckwelle gerechnet.

In allen Fällen lässt sich der relative Überdruck in einer Höhe z in zwei Theile zerlegen: $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta_z$, wo ε_0 den Werth von ε am Boden bezeichnet. Nur dieses ist noch von Interesse; kann man mittelst der barometrischen Höhenformel aus der gegebenen Temperaturvertheilung ableiten, oder man kann auch umgekehrt die Temperaturschwingung berechnen, wenn δ_z bekannt ist. Solche Rechnungen hat Hann für zahlreiche Fälle ausgeführt.

Die kritische Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist für die Atmosphäre ebenso gross wie für eine Schicht von constanter Dichte. Das Maximum von ε_0 tritt gleichzeitig mit dem Temperaturmaximum ein, wenn die Welle schneller wandert als eine freie.

Hält man dieses mit dem Resultat zusammen, welches man für die ganztägige Welle in der dünnen rotirenden Luftschale gefunden hat, so schliesst man: wenn eine Temperaturwelle von der Periode eines Tages über die Erde fortschritte, deren Phase in allen Breiten gleich, deren Amplitude nur Function der Breite und der Höhe wäre, dann müsste in der erzwungenen Druckwelle das Maximum von ε_0 mit dem Maximum der Temperatur zusammenfallen.

C. Die beobachteten Erscheinungen der ganztägigen Druckwelle werden in den Hauptzügen nach den Abhandlungen von Hann und von Angot zusammengefasst. Das Maximum von ε_0 fällt nahezu auf dieselbe Zeit, wie das Minimum des ganztägigen Temperaturgliedes.

Man hat zu beachten, dass wegen der Unregelmässigkeit der Erdoberfläche und der Bewölkung die Annahme, welche vorher in Betreff der Temperaturwelle gemacht wurde, den Verhältnissen auf der Erde nicht entspricht. Die tägliche Erwärmung schreitet mit nahezu constanter Amplitude an jedem Tage nur über getrennte, relativ kleine Gebiete fort und hat in jedem solchen Bezirk fast den Charakter einer stehenden Schwingung.

D. Stehende Temperaturschwingungen, welche nur in einem kleinen Gebiet der Atmosphäre stattfinden, bewirken in demselben Druckschwingungen, deren ε_0-Maximum zugleich mit dem Temperaturminimum eintritt, während die Druckschwankung ausserhalb des Gebietes gering ist. Ähnlich wird es sich bei fortschreitenden Temperaturwellen verhalten, wenn sie nur über kleine Längenintervalle wandern.

Die Annahme, dass die ganztägige Druckschwingung auf der Erde durch Erwärmungen dieser Art entsteht, ist wohl allgemein verbreitet. Doch hat man nicht beachtet, dass es dabei wesentlich auf die örtliche Unregelmässigkeit der Wärmewelle ankommt. Auch wurde vorher kein Versuch gemacht, die erzwungene Druckschwingung zu berechnen.

Die Rechnung gibt, wenn die Temperaturamplitude am Boden 3° beträgt und mit der Höhe nach dem Gesetze der Exponentiellen so rasch abnimmt, dass sie schon bei 900 *m* nur 1° ist, die Druckamplitude am Boden gleich 0·7/760 des mittleren Druckes.

Damit ist die Untersuchung der ganztägigen Welle abgeschlossen. Liesse sich die erregende Ursache der regelmässigen halbtägigen Welle angeben, so würden die hier ausgeführten Rechnungen zu einer ziemlich vollständigen Lösung des Problems der täglichen Barometerschwankungen ausreichen.

10. Erzwungene Wellen in der rotirenden Schale.

Behält man alle Voraussetzungen bei, welche den Entwicklungen des 8. Abschnittes zugrunde gelegt sind, mit Ausnahme derjenigen, dass die Temperatur der Schale constant ist, so bleiben die Bewegungsgleichungen im engeren Sinne ungeändert und nur die Continuitätsgleichung enthält ein neues Glied. Wenn T die mittlere absolute Temperatur der Schale bezeichnet, $T(1+\tau)$ die Temperatur in einem Orte zur Zeit t, und wenn τ ein kleiner Bruch ist, so hat man es mit folgenden Gleichungen zu thun.

$$-\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{\partial b}{\partial t} + lb - 2\nu\cos\omega\,.\,c,$$

$$-\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,\partial\lambda} = \frac{\partial c}{\partial t} + lc + 2\nu\cos\omega\,.\,b,$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{1}{S\sin\omega}\left(\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right) = 0.$$

Es sollen diejenigen Bewegungen der Luft in der rotirenden Schale berechnet werden, welche durch westwärts wandernde Temperaturwellen entstehen. Für $l = o$ (reibungslose Luft) sind schon a. a. O. specielle Lösungen gegeben worden. Jetzt wollen wir annehmen, dass die Luft in der dünnen Schale eine der relativen Geschwindigkeit proportionale Reibung erfährt. Dabei wird es für die Rechnung bequem sein, die periodische Function als Exponentielle mit imaginärem Exponenten einzuführen. Es sei gegeben

$$\tau = F(\omega) e^{i(h\lambda + nt)}.$$

Druck und Geschwindigkeiten in der erzwungenen Welle versuchen wir in folgenden Formen zu finden

$$b = i\varphi(\omega) e^{i(h\lambda+nt)}, \quad c = \psi(\omega) e^{i(h\lambda+nt)}, \quad \varepsilon = E(\omega) e^{i(h\lambda+nt)}$$

bei gleicher Bezeichnung wie im 8. Abschnitt; auch die abkürzenden Zeichen

$$n-li = r, \quad \frac{2\nu}{r} = q, \quad \frac{nrS^2}{RT} = z$$

werden beibehalten. Man leitet ähnlich wie dort zwei Gleichungen ab

$$(h^2 - z\sin^2\omega) E = \frac{rS}{RT} \sin\omega \left(\frac{d(\varphi \sin\omega)}{d\omega} - hq\cos\omega . \varphi \right) - z\sin^2\omega . F \quad (A)$$

$$\sin^{-hq}\omega \frac{d}{d\omega} (\sin^{hq}\omega . E) = \frac{rS}{RT} (1 - q^2 + q^2\sin^2\omega) . \varphi, \quad (B)$$

deren erste allein die Temperaturfunction F enthält.

Wir wollen uns auf den Fall beschränken, dass diese Function, folglich auch die erzwungene Druckwelle zu beiden Seiten des Äquators symmetrisch ist (pare Lösungen). Die Rechnung bietet für diese, wie auch für impare Lösungen nach den Entwicklungen für freie Wellen keine Schwierigkeit, sobald $F(\omega)$ bei ungeraden h durch eine endliche Reihe ungerader Potenzen von $\sin\omega$, bei geraden h durch eine solche Reihe gerader Potenzen sich darstellen lässt, und wenn das erste Glied der Reihe $\sin^h\omega$ oder eine höhere Potenz ist.

Pare Lösungen ungerader Classen (insbesondere der ersten Classe). Wenn

$$F(\omega) = \frac{1}{nS} (C_1 \sin\omega + C_3 \sin^3\omega + \ldots)$$

gegeben ist, so hat man die Coëfficienten in den Reihen

$$\varphi = \cos\omega(a_0 + a_2 \sin^2\omega + a_4 \sin^4\omega + \ldots),$$

$$E = \frac{rS}{RT}(A_1 \sin\omega + A_3 \sin^3\omega + \ldots)$$

zu bestimmen, indem man φ und ε in die Gleichungen (A) und (B) einsetzt. Aus den zwei Systemen von Beziehungen, welche man so erhält, kann man $A_1, A_3 \ldots$ eliminiren; es bleibt eine Folge von Gleichungen zwischen den unbekannten Coëfficienten a_0, $a_2 \ldots$ und den gegebenen Constanten $C_1, C_3 \ldots$

$$\left.\begin{aligned}
h^2 \frac{(1-q^2)a_0}{1+hq} &= (1-hq)a_0 \\
h^2 \frac{(1-q^2)a_2 + q^2 a_0}{3+hq} - z\frac{(1-q^2)a_0}{1+hq} &= (3-hq)a_2 - (2-hq)a_0 - C_1 \\
h^2 \frac{(1-q^2)a_4 + q^2 a_2}{5+hq} - z\frac{(1-q^2)a_2 + q^2 a_0}{3+hq} &= (5-hq)a_4 - (4-hq)a_2 - C_3
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Erzwungene Wellen erster Classe. Wenn $h = 1$ und wenn C_3, C_5, sowie alle folgenden Coëfficienten der F-Reihe verschwinden, die Temperaturwelle demnach durch

$$\tau = \frac{C_1}{nS}\sin\omega \, . \, e^{i(\lambda + nt)} \qquad (C_1)$$

dargestellt ist, so sind die dritte und die folgenden Gleichungen des Systems (1) identisch mit den entsprechenden Beziehungen zwischen den Coëfficienten a, welche bei freien Schwingungen gelten; man hat allgemein (vergl. Abschnitt 6)

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \cfrac{(j+3+q)q^2 z}{N_{j+1} - \cfrac{Z_{j+3}}{N_{j+3} - \ldots}} \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{a_0} = \cfrac{(5+q)q^2 z}{N_3 - \cfrac{Z_5}{N_5 - \ldots}},$$

wobei die N und Z aus den Gleichungen (P_1) Abschnitt 6 des II. Theiles zu entnehmen sind. Der einzige Unterschied gegenüber den freien Wellen besteht darin, dass jetzt a_0 nicht willkürlich bleibt, sondern durch C_1 bestimmt wird. Folglich enthalten auch alle übrigen Coëfficienten C_1 als Factor. Im System (1) ist die erste Gleichung identisch erfüllt; setzt man in die zweite den oben angeführten Werth von a_2/a_0 ein, so ergibt sich

$$a_0 = -\frac{(1+q)(3+q)C_1}{N_1 - \cfrac{Z_3}{N_3 - \dots}}$$

(Wenn n, z ein reelles Werthpaar ist, welches zu einer freien Welle im reibungslosen System gehört, wird der Nenner auf der rechten Seite Null, Gleichung (P) Abschnitt 6, und a_0 unendlich. Bei Reibung kann der Nenner nicht verschwinden; ein reelles n und ein complexes z erfüllen die Gleichung (P) nicht, denn es kann bei Reibung keine freie Welle ohne Dämpfung geben.)

Ferner hat man

$$a_2 = \frac{a_2}{a_0} a_0, \qquad a_4 = \frac{a_4}{a_2}\frac{a_2}{a_0} a_0, \dots$$

demnach φ, ferner die Coëfficienten der E-Reihe

$$A_1 = \frac{(1-q^2)a_0}{1+q}, \quad A_3 = \frac{(1-q^2)a_2+q^2a_0}{3+q}, \quad A_5 = \frac{(1-q^2)a_4+q^2a_2}{5+q}, \dots$$

und wenn man noch schreibt

$$\psi = \alpha_0+\alpha_2 \sin^2\omega + \qquad = -\frac{RT}{rS}\frac{E}{\sin\omega} - q\cos\omega \, . \, \varphi,$$

so wird

$$\alpha_0 = -a_0, \quad \alpha_2 = \frac{3q(a_0-a_2)-a_2}{3+q}, \quad \alpha_4 = \frac{5q(a_2-a_4)-a_4}{5+q}, \dots$$

[Gleichungen (p_1) des 7 Abschnittes].

Die von der Temperaturwelle (C_1) erzeugte Druckwelle und die zugehörige Windvertheilung sind somit berechnet.

Der Fall, dass nicht C_1 allein, sondern auch C_3 und mehrere andere Coëfficienten der F-Reihe von Null verschieden sind, bietet keine Schwierigkeit. Es wäre überflüssig, die bezüglichen Formeln hier abzuleiten, da sie durch ein ganz ähnliches Verfahren zu finden sind. Wir beschränken uns auch in den folgenden Beispielen auf die Temperaturwelle (C_1).

Für $h = 3$, eine Welle dritter Classe, wäre das System (1) nur brauchbar, wenn $C_1 = 0$, ebenso für $h = 5$ nur dann, wenn $C_1 = C_3 = 0$. In anderen Fällen müsste man die Reihen nach Potenzen von $\cos\omega$ anordnen; es wäre zu setzen

$$F(\omega) = \frac{1}{nS}\sin\omega\,(K_0 + K_2\cos^2\omega + K_4\cos^4\omega + \ldots),$$

$$\varphi = b_1\cos\omega + b_3\cos^3\omega + \ldots, \qquad E = \frac{rS}{RT}\sin\omega\,(B_0 + B_2\cos^2\omega + \ldots)$$

Diese führen zu Entwicklungen, auf welche das Laplace'sche Verfahren der Coëfficientenbestimmung sich nicht anwenden lässt, weil in den Gleichungen des dem (1) analogen Systems vier unbekannte Coëfficienten vorkommen.

Der Gang der Entwicklung (aber nicht eine Methode, welche die vollständige Ausführung der Rechnung zulässt) ist von Lord Kelvin [Phil. Mag. (4) 50, S. 388] angegeben worden. Es liesse sich vielleicht eine Hilfsfunction finden, welche gestattet, nur drei Coëfficienten in jeder Gleichung zu haben.

Für die ruhende Schale hat auch in diesem Falle die Berechnung keine Schwierigkeit.

Beispiel 1. Erzwungene Welle erster Classe bei reibungsloser Bewegung in der rotirenden Schale. Rotationsdauer 24 Stunden, Umlaufsdauer der Welle 24 Stunden.

$$\tau = \frac{1}{273}\sin\omega\,.\sin(\nu t + \lambda).$$

Wir setzen

$$T = 273°, \qquad R = 287\,\mathrm{m}^2.\mathrm{sec}^{-2}\,\mathrm{Centigrad}^{-1},$$

$$n = \nu = \frac{2\pi}{24.60.60}\,\mathrm{sec}^{-1}, \quad 2\pi S = 4.10^7\,\mathrm{m}.$$

Durch die Annahmen $n = \nu$, $l = 0$, hat man

$$q = 2, \quad z = \frac{\nu^2 S^2}{RT} = \frac{\varkappa}{4} = 2\cdot 735,$$

ferner, da die Amplitude der Temperaturwelle am Äquator ($T\tau$) 1° angenommen ist,

$$\frac{C_1}{\nu S} = \frac{1}{273}, \qquad C_1 = 1\cdot 6959.$$

Schreibt man noch

$$N_1 = 3.(2.3-2)+5.3z,$$
$$N_3 = 5.(4.5-2)+7.3z, \qquad Z_3 = 2.4.3.7.4z,$$
$$N_5 = 7.(6.7-2)+9.3z, \qquad Z_5 = 4.6.5.9.4z,$$

so hat man alles beisammen, was man zur Berechnung der Geschwindigkeiten und des Druckes braucht. Man erhält die Lösung in der Form

$$\varepsilon = E(\omega).\sin(\lambda+\nu t), \quad b = \varphi(\omega)\cos(\lambda+\nu t), \quad c = \psi(\omega)\sin(\lambda+\nu t)$$

und für E, ψ folgende Werthe

$$10^3 E(\omega) = 4\cdot 20\sin\omega - 1\cdot 55\sin^3\omega - 1\cdot 28\sin^5\omega - 0\cdot 39\sin^7\omega - 0\cdot 06\sin^9\omega - .$$

$$\varphi(\omega) = \cos\omega\{-0\cdot 71 - 0\cdot 51\sin^2\omega - 0\cdot 17\sin^4\omega - 0\cdot 03\sin^6\omega\ldots\}$$

$$\psi(\omega) = 0\cdot 71 - 0\cdot 14\sin^2\omega - 0\cdot 46\sin^4\omega - 0\cdot 21\sin^6\omega - 0\cdot 05\sin^8\omega.$$

Damit berechnet man die Tabelle, nach welcher Fig. 1 construirt ist. Die Geschwindigkeiten sind in m/sec. angegeben.

	$273.\tau$	$10^3\varepsilon$	b	
0°	0	0	$-0\cdot 71\cos(\lambda+\nu t)$	$0\cdot 71\sin(\lambda+\nu t)$
15	$0\cdot 26\sin(\lambda+\nu t)$	$1\cdot 06\sin(\lambda+\nu t)$	$-0\cdot 72$	$0\cdot 70$
30	$0\cdot 50$	$1\cdot 86$	$-0\cdot 74$	$0\cdot 64$
45	$0\cdot 71$	$2\cdot 15$	$-0\cdot 72$	$0\cdot 50$
60	$0\cdot 87$	$1\cdot 84$	$-0\cdot 60$	$0\cdot 24$
75	$0\cdot 97$	$1\cdot 22$	$-0\cdot 35$	$-0\cdot 03$
90	$1\cdot 00$	$0\cdot 91$	0	$-0\cdot 15$

Die Temperaturamplitude ist 1° am Äquator und 0°71 in 45° Breite; die entsprechenden Druckamplituden sind (beim mittleren Druck 1000) 0·91 und 2·15, also in 45° Breite viel grösser als am Äquator; das hängt mit dem Umstand zusammen, dass der Umfang jenes Breitekreises nahe gleich ist dem Weg, welchen eine freie Welle in einer Röhre binnen 24 Stunden zurücklegt.

Im II. Theil dieser Abhandlung wurden die Umlaufszeiten westwärts fortschreitender freier Wellen gefunden 13·87, 9·22, 6·63. .Stunden für Wellen erster Art; ferner 130·7, 309·5, 572·2. .Stunden für Wellen zweiter Art auf einem Sphäroid von der Grösse und Rotationsdauer der Erde. In diesem Beispiel haben wir es mit einer erzwungenen Welle von der Umlaufsdauer 24 Stunden zu thun. Man möchte vermuthen, dass ihr als nächste freie Welle diejenige mit 13·87 Stunden (Typus I erster Art) zugehört; dann müsste, weil die erzwungene langsamer fortschreitet als die freie Welle, am Äquator das Minimum des Druckes mit dem Maximum der Temperatur zusammenfallen. Es ergibt sich jedoch, dass Temperatur- und Druckwelle in allen Breiten die gleiche Phase haben. Unsere erzwungene Welle liegt schon im Gebiete der freien Welle Typus I zweiter Art, 130·7 Stunden Umlaufsdauer, der sie auch in der Form ähnlich ist. (Man vergleiche Fig. 1 mit den Fig. 9 und 11 des zweiten Theils.) Betrachtet man erzwungene Wellen, deren Umlaufszeit von 13·9 ab stufenweise wächst, so kann man den Übergang von denjenigen, welche sich dem Typus I erster Art anschliessen, zu denen, welche unter Typus I zweiter Art fallen, leicht verfolgen. Es genügt zu dem Zwecke, nur noch einen Fall zu berechnen, die erzwungene Welle von 15 Stunden Umlaufsdauer.

$$\tau = \frac{1}{273} \sin(\lambda + nt), \quad \frac{2\pi}{n} = 15 \text{ Stunden}, \quad \frac{2\pi}{\nu} = 24 \text{ Stunden}.$$

Wir stellen den Ausdruck für das zugehörige $10^3 E$ zusammen mit den entsprechenden Ausdrücken für die beiden freien Wellen und für unsere in Fig. 1 dargestellte erzwungene Welle. (Tabelle auf der folgenden Seite.)

In der freien Welle [1] findet eine Umkehrung des Vorzeichens von E bei $\omega = 43°$ statt; dem entsprechend ist in der langsamer fortschreitenden erzwungenen Welle [2] E am Äquator negativ, in hohen Breiten positiv; in der freien Welle [4] hat E für alle Werthe von ω gleiches Vorzeichen, ebenso in der erzwungenen Welle [3]. In [2] ist am Äquator negativ, auf

[1] Freie Welle U.-D. 13·87 Stunden	[2] Erzwungene Welle U.-D. 15 Stund.	[3] Erzwungene Welle U.-D. 24 Stund.	[4] Freie Welle U.-D. 130·7 Stunden
	Temp.-Ampl. 1° am Äquator		
Const. $\{$ $9\cdot57 \sin\omega$	$7\cdot66 \sin\omega$	$4\ 20 \sin\omega$	Const. $\{$ $10\cdot73 \sin\omega$
$-13\cdot42 \sin^3\omega$	$-6\cdot89 \sin^3\omega$	$-1\cdot55 \sin^3\omega$	$-0\cdot33 \sin^3\omega$
$-15\cdot10 \sin^5\omega$	$-7\cdot07 \sin^5\omega$	$-1\cdot28 \sin^5\omega$	$-5\cdot06 \sin^5\omega$
$-\ 5\cdot11 \sin^7\omega$	$-2\cdot32 \sin^7\omega$	$-0\cdot39 \sin^7\omega$	$-2\cdot05 \sin^7\omega$
$-\ 0\cdot89 \sin^9\omega$	$-0\cdot40 \sin^9\omega$	$-0\cdot06 \sin^9\omega$	$-0\cdot38 \sin^9\omega$
$-\ 0\cdot09 \sin^{11}\omega\}$	$-0\ 04 \sin^{11}\omega$	$-0\cdot01 \sin^{11}\omega$	$-0\cdot04 \sin^{11}\omega\}$

jener Hemisphäre, wo τ positiv; in [3] sind τ und ε überall gleich bezeichnet; die im Beispiel 1 behandelte Welle ist also im Zusammenhang mit der freien Welle zweiter Art Typus I zu betrachten; ihr Verhalten entspricht demjenigen einer erzwungenen Welle in der Röhre, wenn $V > \sqrt{RT}$.

Beispiel 2. Erzwungene Welle erster Classe bei Reibung. Umlaufsdauer 24 Stunden.

Mit denselben Werthen von R, T, S, ν, n, wie im Beispiel 1 und mit

$$l = \nu$$

wird

$$r = \nu(1-i), \quad q = 1+i, \quad z = 2\cdot735(1-i).$$

Statt $l = \nu$ kann man auch schreiben $l^{-1} = 12/\pi$ Stunden $= 3\cdot82$ Stunden. Die Reibung ist so gross angenommen, dass die Geschwindigkeit einer ebenen, zwischen zwei unbegrenzten Platten ohne Druckdifferenz geradlinig fortschreitenden Luftschicht mit diesem l in $3\cdot82$ Stunden auf $1/e$ ihres Anfangswerthes sinkt.

Setzt man wieder

$$\tau = \frac{1}{273} \sin\omega \ \sin(\lambda+\nu t)$$

und berechnet, ähnlich wie für freie Wellen

$$b = \varphi_1 \cos(\lambda+\nu t) - \varphi_2 \sin(\lambda+\nu t), \qquad c = \psi_1 \sin(\ ) + \psi_2 \cos(\ ),$$

$$\varepsilon = E_1 \sin(\ ) + E_2 \cos(\ )$$

für Polabstände von je 15°, so erhält man die folgende Tabelle, nach welcher die Figur 2 gezeichnet ist.

ω	$273\,\tau$	$10^3\,\varepsilon$	b	
0°	0	$0 \quad \sin(\lambda+\nu t+\ 7^\circ 9)$	$-0\cdot 49 \cos(\lambda+\nu t-36^\circ 6)$	$0\cdot 49 \sin(\lambda+\nu t-36^\circ 6)$
15	$0\cdot 26 \sin(\lambda+\nu t)$	$1\cdot 04 \qquad +\ 9\cdot 0$	$-0\cdot 49 \qquad -36\cdot 2$	$0\cdot 49 \qquad -35\cdot 0$
30	$0\cdot 50$	$1\cdot 92 \qquad +12\cdot 2$	$-0\cdot 47 \qquad -34\cdot 6$	$0\ 49 \qquad -33\cdot 4$
45	$0\cdot 71$	$2\cdot 48 \qquad +17\cdot 6$	$-0\cdot 44 \qquad -30\cdot 7$	$0\cdot 48 \qquad -33\cdot 0$
60	$0\cdot 87$	$2\cdot 72 \qquad +24\cdot 3$	$-0\cdot 35 \qquad -28\cdot 0$	$0\cdot 45 \qquad -36\cdot 9$
75	$0\ 97$	$2\cdot 72 \qquad +30\cdot 5$	$-0\ 20 \qquad -25\cdot 9$	$0\cdot 42 \qquad -45\cdot 0$
90	$1\cdot 00 \sin(\lambda+\nu t)$	$2\ 69 \sin(\lambda+\nu t+33\cdot 3)$	$0 \quad \cos(\lambda+\nu t-25\cdot 0)$	$0\cdot 40 \sin(\lambda+\nu t-48\cdot 0)$

Die Temperaturwelle hat hier dieselbe Form wie in Fig. 1. Es sind jedoch nur die Orte des Maximums und Minimums eingezeichnet; die Curven 273°5 und 272°5 sind weggelassen, um die Zeichnung nicht zu undeutlich zu machen. Die punktirte Curve verbindet die Orte wo $b = 0$, die gestrichelte jene Orte, wo $c = 0$.

Das Maximum des Druckes wandert in jeder Breite vor dem Maximum der Temperatur, in grösstem Abstand am Äquator, wo das ε-Maximum 2·2 Stunden vor dem τ-Maximum eintritt. Rechnet man immer mit derselben τ-Welle, aber mit Werthen von l, die man von Null bis ∞ wachsen lässt, so nimmt jener Abstand anfangs rasch zu, bis zu einem grössten Werth, der kaum drei Stunden erreicht, nimmt dann wieder bis Null ab, ganz entsprechend dem Verhalten der erzwungenen Welle in der Röhre, wenn $V > \sqrt{RT}$. Bezeichnet Δ den Bogen, um welchen das Maximum des Druckes am Äquator westlich von demjenigen der Temperatur liegt, so ist bei

l	. 0	$\frac{1}{2}\nu$	ν	3ν	∞
Δ	. . 0	37°6	33°3	14°9	0

Die Form der Druckwelle in Fig. 2 ist dadurch, dass die grösste Amplitude jetzt bei $\omega = \text{arc}\, 70°$ eintritt und dass ihr Werth von demjenigen am Äquator wenig verschieden ist, eine ganz andere als in Fig. 1. Da für $l = \infty$ in jeder Breite die ε-Amplitude gleich wird der τ-Amplitude, so ist es klar, dass die Druckamplituden in manchen Breiten bei Reibung grösser ausfallen, als im reibungslosen System.

Pare Lösungen gerader Classen (insbesondere der zweiten Classe). Wenn h gerade und die Function F im Ausdruck des variablen Temperaturgliedes

$$\tau = F(\omega)\, e^{i(h\lambda+nt)}$$

gegeben ist durch

$$F(\omega) = \frac{1}{nS}(C_0 + C_2 \sin^2\omega + C_4 \sin^4\omega + \quad),$$

so sind für φ, E folgende Formen anzunehmen

$$\varphi = \cos\omega\,(a_1 \sin\omega + a_3 \sin^3\omega + \quad .),$$

$$E = \frac{rS}{RT}(A_0 + A_2 \sin^2\omega + \quad ..).$$

Nur im Falle $h = 0$ kann man C_0 von Null verschieden setzen; für jedes andere h muss $C_0 = 0$ sein, da sonst die Temperatur an den Polen keinen bestimmten Werth hätte.

Setzt man die Reihen für F, φ, E in die Gleichungen (A) und (B) ein, so folgen zwei Systeme von Relationen zwischen den Coëfficienten. Zunächst hat man $h^2 A_0 = 0$ und $hqA_0 = 0$, woraus $A_0 = 0$ für alle h ausser $h = 0$. Durch Elimination von A_2, A_4 ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
h^2 \frac{(1-q^2)a_1}{2+hq} &= (2-hq)a_1 \\
h^2 \frac{(1-q^2)a_3+q^2a_1}{4+hq} - z\frac{(1-q^2)a_1}{2+hq} &= (4-hq)a_3-(3-hq)a_1-C_2 \\
h^2 \frac{(1-q^2)a_5+q^2a_3}{6+hq} - z\frac{(1-q^2)a_3+q^2a_1}{4+hq} &= (6-hq)a_5-(5-hq)a_3-C_4
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Erzwungene Welle zweiter Classe $h = 2$. Wir beschränken uns wieder der Kürze halber auf den Fall, dass C_2 der erste Coëfficient der F-Reihe allein von Null verschieden ist. Die erste Gleichung des Systems (2) ist eine Identität, aus der dritten und allen folgenden hat man

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{(6+2q)q^2 z}{N_4 - \cfrac{Z_6}{N_6 - .}} \qquad [N, Z \text{ aus } P_2]$$

ganz wie bei freien Schwingungen zweiter Classe und a_1 bestimmt sich aus der zweiten Gleichung, wenn man den eben angegebenen Quotienten einsetzt

$$a_1 = -\frac{(2+2q)(4+2q)C_2}{N_2 - \cfrac{Z_4}{N_4 - \ldots}}$$

(Mit denjenigen reellen Werthpaaren n, z, welche zu paren freien Wellen zweiter Classe im reibungslosen System gehören, wird der Nenner auf der rechten Seite Null, a_1 unendlich gross.)

Ferner hat man

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{(j+3+2q)\,q^2 z}{N_{j+1} - \cfrac{Z_{j+3}}{N_{j+3} - .}}, \qquad j = 3, 5, 7$$

womit man die Coëfficienten der φ-Reihe berechnet, dann diejenigen der E-Reihe

$$A_0 = 0, \qquad A_2 = \frac{(1-q^2)a_1}{2+2q}, \qquad A_4 = \frac{(1-q^2)a_3 + q^2 a_1}{4+2q}$$

endlich die der ψ-Reihe, wenn man setzt

$$\psi = \alpha_1 \sin\omega + \alpha_3 \sin^3\omega + \qquad = -\frac{RT}{rS}\,\frac{2E}{\sin\omega} - q\cos\omega\ \varphi,$$

$$\alpha_1 = -a_1, \qquad \alpha_3 = \frac{2q(a_1 - a_3) - a_3}{2+q}, \qquad \alpha_5 = \frac{3q(a_3 - a_5) - a_5}{3+q}, .$$

Auch hier ist für die höheren Classen eine ähnliche Einschränkung zu machen, wie bei den ungeraden. Für $h = 4$ könnte man die Entwicklung nur anwenden, wenn die F-Reihe mit C_4 beginnt; andernfalls wäre die Rechnung so zu führen, dass die Reihen für F, φ, E nach Potenzen von $\cos\omega$ fortschreiten.

Beispiel 3. Erzwungene Welle zweiter Classe bei reibungsloser Bewegung in der rotirenden Schale. Umlaufsdauer der Welle 24 Stunden (Schwingungsdauer 12 Stunden).

Ist die Temperaturwelle durch

$$\tau = \frac{1}{273}\sin^2\omega\sin(2\lambda+2\nu t)$$

gegeben, sind für R, T, ν, S die gleichen Werthe wie in den vorhergehenden Beispielen angenommen, ferner

$$l = 0. \qquad n = 2\nu,$$

folglich

$$q = 1, \qquad z = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = \varkappa = 10\cdot 94,$$

so hat man

$$\begin{aligned} N_2 &= 4.(3.4-2) & & \\ N_4 &= 6.(5.6-2) & Z_4 &= 2.6.4.8\,\varkappa \\ N_6 &= 8.(7.8-2) & Z_6 &= 4.8.6.10.\varkappa \end{aligned}$$

$$\frac{C_2}{2\nu S} = \frac{1}{273}, \qquad C_2 = 3\cdot 3917\ \mathrm{m.sec^{-1}}$$

und man erhält zur Bestimmung des Druckes und der Geschwindigkeiten folgende Ausdrücke

$$10^3 E = -138\cdot 7\sin^4\omega - 84\cdot 2\sin^6\omega - 21\cdot 0\sin^8\omega - 2\cdot 9\sin^{10}\omega - 0\cdot 3\sin^{12}\omega,$$

$$\varphi = \cos\omega(-70\cdot 4\sin\omega - 57\cdot 0\sin^3\omega - 17\cdot 8\sin^5\omega - 3\cdot 0\sin^7\omega - 0\cdot 3\sin^9\omega),$$

$$\psi = 70\cdot 4\sin\omega + 10\cdot 0\sin^3\omega - 25\cdot 1\sin^5\omega - 11\cdot 2\sin^7\omega - 2\cdot 2\sin^9\omega - 0\cdot 3\sin^{11}\omega,$$

woraus man ε, b, c für Polabstände von je 15° berechnet, wonach dann die Fig. 3 gezeichnet ist.

ω	273τ	$10^3\varepsilon$	b	
0°	0	0	0	0
15	$0\cdot 07\sin(2\lambda+2\nu t)$	$-0\cdot 6\sin(2\lambda+2\nu t)$	$-18\cdot 6\cos(2\lambda+2\nu t)$	$18\cdot 4\sin(2\lambda+2\nu t)$
30	0·25	— 10·1	—37·2	35·6
45	0·50	— 46·6	—51·9	47·8
60	0·75	—120·9	—53·9	50·5
75	0·93	—207·2	—35·4	45·4
90	1·00	—247 1	0	41·7

Die Temperaturamplitude am Äquator ist auch hier 1° gesetzt, um die Vergleichung mit den anderen Beispielen zu erleichtern. Wir erhalten aber mit unserem τ Geschwindigkeiten von über 50 m.sec^{-1} und Druckamplituden, welche ein Viertel des mittleren Druckes erreichen. Die Voraussetzung unserer Rechnung, dass b, c, ε klein sind, trifft nicht mehr zu. Wir sollten also dem τ ein Hundertel des oben angeführten Werthes beilegen, dann würden auch ε, b, c in demselben Verhältniss kleiner.

Schon bei der ersten Berechnung dieser Welle ist dargelegt worden, dass die ε im Vergleich mit den τ deshalb so gross ausfallen, weil die Schwingungsdauer nahe gleich ist derjenigen einer freien Welle. Die Periode der westwärts wandernden freien Welle erster Art, Typus I ist 11·94 Stunden (II. Theil, 7 Abschnitt), also sehr nahe der Schwingungsdauer der erzwungenen Welle von 12 Stunden. Da die letztere langsamer fortschreitet, so fällt das Maximum des Druckes mit dem Minimum der Temperatur zusammen. Ein Unterschied von wenigen Graden in der mittleren Temperatur würde bewirken, dass Druck- und Temperaturwelle gleiche Phase hätten, denn mit denselben Werthen von R, ν, S und mit $T = 266°$ ist die Schwingungsdauer der freien Welle grösser als 12 Stunden. Nahe bei $T = 268°$ wird sie gleich 12 Stunden und für diesen Fall würde im reibungslosen System das ε der erzwungenen Welle unendlich gross, wie klein man auch τ annehmen mag.

Wie sich diese Umstände durch Berücksichtigung der Reibung ändern, ersieht man aus dem folgenden Beispiel 4.

Durch eine neue Publication bin ich gezwungen, nochmals der Einwendungen zu erwähnen, welche gegen die Laplace'sche Constantenbestimmung im Flutproblem erhoben worden sind. Ich füge die Bemerkung an Beispiel 3 an, weil dieses die gleichen Rechnungen erfordert, wie das genannte Problem. Dieselbe Rechnung wurde schon in der Abhandlung 1890 geführt und ist mit ihr in eine Sammlung übergegangen, welche Prof. Cleveland Abbe unter dem Titel: »The mechanics of the earth's atmosphere«, Smithsonian Misc. Coll. Washington 1891 (versendet 1893), herausgegeben hat. Er verweist bei dieser Gelegenheit auf eine dort gleichfalls aufgenommene Abhandlung von Ferrel, welche die Berechtigung der Laplace'schen Methode bestreitet.

Man kann zunächst hervorheben, dass Ferrel selbst die Convergenz Reihenentwicklung an die Beschränkung knüpft, $\beta > 6$. (Sein β ist unser $\varkappa$.) Diese Bedingung allein kennzeichnet die Rechnung als bedeutungslos, denn die Aufgabe, die erzwungene Welle zu berechnen, muss für jeden positiven Werth von β eine Lösung zulassen; nur eine bestimmte Lösung, welche nicht gestattet, einen Coëfficienten willkürlich zu wählen.

Ein Umstand, der es sehr erschwert, den Fehler in Ferrel's Annahme ($K_1 = o$) in Kürze nachzuweisen, ist die Beschaffenheit der Differentialgleichung von welcher er ausgeht; sie gilt nämlich allein für den speciellen Fall: doppelte Schwingungsdauer gleich der Rotationsdauer des Sphäroids, in unserer Bezeichnung (für $l = o$) $q = 1$. Die hier gegebenen Entwicklungen gestatten jedoch die Welle zu berechnen, was immer die Werthe von n und sein mögen. Nun ist der einfachste und durch directe Rechnung am leichtesten zu controlirende Fall derjenige der ruhenden Kugelschale $\nu = 0$, also auch $q = 0$. Für diesen erhält man, wenn $h = 2$, $Z_4 = Z_6 = \quad = 0$, $N_2 = 2.3.4-z$, demnach

$$a_1 = -\frac{2.4.C_2}{N_2} = \frac{2\,C_2}{z-6}, \qquad A_2 = \frac{1}{2}\,a_1 = \frac{C_2}{z-6},$$

daraus genau dasselbe, was für die ruhende Schale in der Abh. 1890, §. 7 direct abgeleitet wurde. — Airy's und Ferrel's Einwand richtet sich gegen die Art, wie der scheinbar unbestimmte erste Coëfficient von Laplace berechnet wird. In der hier gewählten Entwicklung ist es der Coëfficient a_1, welcher für $h = 2$ in den Gleichungen (2) scheinbar unbestimmt bleibt und dann durch die Kettenbruchrechnung gefunden wird. Für die ruhende Schale wird der Bruch endlich und es ergibt sich aus dieser Rechnung dasselbe Resultat, welches man auf einem anderen einfachen Weg ableitet.

Man konnte die Kettenbruchmethode missverstehen, so lange man sie auf eine specielle Aufgabe, mit besonderen Werthen der Constanten angewendet hat. Sobald man aber die ganze Gruppe von Problemen, welche sich nach Laplace's Methode behandeln lassen, überblickt und wahrnimmt, wie sich die Ergebnisse stetig aneinanderfügen, wenn man von einer ruhenden Schale zu einer erst langsam, dann immer schneller rotirenden Schale übergeht, wie die in der Rotationsrichtung und gegen dieselbe wandernden Wellen in dem zu erwartenden Sinne von den Wellen der ruhenden Schale abweichen (die Belege dafür sind im II. Theil dieser Abhandlung enthalten), kann man an der Richtigkeit des Verfahrens nicht zweifeln.

Ausserdem wäre zur Widerlegung der Ferrel'schen Rechnung nichts besseres anzuführen, als die lange zuvor von Lord Kelvin (Phil. Mag. 1875, [4], 50), gegebene Erläuterung der Laplace'schen Methode.

Bei dieser Gelegenheit muss ich auch auf eine Bemerkung im Vorwort der genannten Sammlung von Abbe entgegnen, dass zwischen den analytischen Entwicklungen von Lord Rayleigh (Phil. Mag. Febr. 1890) und den meinigen kein Widerspruch besteht; der Unterschied liegt allein darin, dass der englische Physiker sich auf die Berechnung der Wellen in der ruhenden Schale beschränkt, während ich die Rechnung auf die rotirende Schale ausgedehnt habe.

Beispiel 4. Erzwungene Welle zweiter Classe bei Reibung. Schwingungsdauer 12 Stunden.

Grösse, Rotationsdauer und Temperatur der Schale wie zuvor und die Reibungsconstante

$$l = \nu$$

wie im Beispiel 2 angenommen, hat man

$$r = \nu(2-i), \quad q = 0\cdot8+i\,0\cdot4, \quad z = 10\cdot94\left(1-\frac{i}{2}\right)$$

zu setzen. Die durch die Temperaturwelle

$$\tau = \frac{1}{273}\sin^2\omega\,.\sin(2\lambda+2\nu t)$$

erzeugte Druckwelle und das Windsystem sind nach den oben angegebenen Entwicklungen zu berechnen. Wir führen nur die Werthe von ε, b, c für Polabstände von je 15° an, die in der Fig. 4 verwendet sind.

	273τ	$10^3\,\varepsilon$	b	
0°	0	0 $\sin(2\lambda+2\nu t$ $+\;9°6)$	0 $\cos(2\lambda+2\nu t$ $+99°6)$	0 $\sin(2\lambda+2\nu t$ $80°4)$
15	$0\cdot07\sin(2^{\cdot}+2\nu t)$	$0\cdot25$. $+11\cdot9$	0 32. $+99\cdot3$	0 32 $-\;81\cdot0$
30	$0\cdot25$	$0\cdot98$. $+18\cdot2$	$0\cdot63$ $+98\cdot7$	$0\cdot62$. $-\;83\cdot1$
45	$0\cdot50$	$2\cdot15$. $+28\cdot3$	$0\cdot85$. $+98\cdot4$	$0\cdot83$ $-\;86\cdot9$
60	$0\cdot75$	$3\cdot66$. $+38\cdot3$	$0\cdot86$. $+98\cdot3$	$0\cdot93$. 92 9
75	$0\cdot93$	$5\cdot06$ $+45\cdot7$	$0\cdot56$. $+98\cdot3$	$0\cdot89$. $-100\cdot7$
90	$1\cdot00\sin(2\lambda+2\nu t)$	$5\cdot66\sin(2\lambda+2\nu t$ $+48\cdot7)$	0 $\cos(2\lambda+2\nu t$ $+98\cdot5)$	$0\cdot87\sin(2\lambda+2\nu t$ $-104\cdot3)$

Die Druckamplituden sind hier gegenüber denen des reibungslosen Systems schon sehr verringert; am Äquator nur doppelt so gross wie bei der analogen Welle erster Classe mit dem gleichen Werth der Reibungsconstante. Ähnlich verhält es sich mit den Geschwindigkeiten.

Auch in Fig. 4 sind (wie in Fig. 2) von der Temperaturwelle nur die Maxima und Minima eingezeichnet. Das Maximum der Druckwelle wandert am Äquator vor demjenigen der Temperatur um 24°3 (1 Stunde 37 Minuten); richtiger um 65°7 hinter dem τ-Minimum. Bei $l = 0$ fallen nämlich ε-Maximum und τ-Minimum zusammen, mit zunehmendem l kommt ε-Max. hinter τ-Min. immer weiter zurück bis es bei $l = \infty$ mit τ-Max. zusammenfällt, so wie es in der Röhre für $V < \sqrt{RT}$ geschieht. Bezeichnet D die Amplitude von $10^3\varepsilon$ am Äquator und Δ daselbst den Winkelabstand des ε-Max. von τ-Max. (das erste westlich vom zweiten), so hat man für

l	0	$\frac{1}{2}\nu$		∞
D	247	9·3	5·7	3·7
Δ	90°	34°2	24°3	0

Das Windsystem der Fig. 4 ist der Buys-Ballot'schen Regel entgegen, während dasjenige der Fig. 2 der Regel folgt. Erinnert man sich des Unterschiedes, welcher zwischen den westwärts wandernden Wellen erster und zweiter Art besteht, so erkennt man, dass auch in dieser Beziehung die erzwungene Welle erster Classe sich an eine freie Welle zweiter Art anschliesst, diejenige der zweiten Classe an eine freie Welle erster Art.

Ist die erzwungene Welle bekannt und weiss man von der erregenden nur, dass sie in allen Breiten gleiche Phase hat, so wird man aus dem Bild der ersteren sogleich erkennen, ob sich ein grosser Reibungseinfluss geltend macht. In diesem Falle eilt nämlich die Schwingung am Äquator denjenigen in höheren Breiten voraus. Der Umstand, dass in dem regelmässigen Theil der halbtägigen Welle auf der Erde die Phase in allen Breiten nahezu gleich ist, zeigt, dass bei diesen Bewegungen die Reibung eine untergeordnete Bedeutung hat. v. Helmholtz hat bewiesen, dass der Einfluss der inneren Reibung bei Flüssigkeitsbewegungen in grossen Räumen klein wird. In der Nähe des Bodens wird die Reibung immerhin eine Verschiebung des Windsystems gegen das Drucksystem bewirken.

Über die Beziehungen zwischen dem täglichen Gang des Windes und des Luftdrucks. In den angeführten Beispielen und in den Figuren ist der Zusammenhang zwischen Wind und Druckwellen ersichtlich gemacht. Unter der Annahme von Wellen, deren Amplitude nur von der Breite abhängt und deren Umlaufsdauer einen Tag beträgt, sind die Zustände, welche im Laufe des Tages an einem Punkt eintreten, gleich denjenigen, welche zu einer Zeit auf dem ganzen Umfang des Breitekreises bestehen.

Die Beziehungen zwischen Luftdruck und Wind in der täglichen Welle lassen noch eine allgemeinere Übersicht zu; wir wollen uns dabei auf ein reibungsloses System beschränken.

Setzt man $l = 0$ und für die ganztägige Welle

$$\varepsilon = E(\omega)\sin(\lambda+\nu t), \quad b = \varphi(\omega)\cos(\lambda+\nu t), \quad c = \psi(\omega)\sin(\lambda+\nu t)$$

und ist E gegeben, so werden φ, ψ durch die Bewegungsgleichungen allein folgenderweise bestimmt:

$$\varphi = \frac{RT}{\nu S}\,\frac{\dfrac{dE}{d\omega}+2\cos\omega\dfrac{E}{\sin\omega}}{1-4\cos^2\omega}, \qquad \psi = -\frac{RT}{\nu S}\,\frac{\dfrac{E}{\sin\omega}+2\cos\omega\dfrac{dE}{d\omega}}{1-4\cos^2\omega}.$$

$E(\omega)$ muss gewisse Bedingungen erfüllen, damit φ und ψ überall endlich bleiben; an den Polen soll $E = 0$ sein, in den Polabständen 60° und 120° sollen die Zähler in den Ausdrücken von φ und ψ zugleich mit dem Nenner verschwinden; das wäre nicht möglich, wenn auf der nördlichen Halbkugel E und $dE/d\omega$ überall gleich bezeichnet wären, beispielsweise wenn E positiv wäre, und vom Pol zum Äquator beständig zunähme.

In einer paren Welle ist am Äquator $\varphi = 0$ und $dE/d\omega = 0$, folglich wenn E positiv, ψ negativ. Angenommen φ sei positiv und ψ negativ zwischen einem Polabstande ω_1 auf der nördlichen Hemisphäre und dem Äquator, dann ist in diesem Breiteintervall, wenn daselbst am Boden der höchste Druck der ganztägigen Welle um 6^h früh eintritt

6^h früh Druckmaximum	Mittag Mittl. Druck	6^h Ab. Druckminimum	Mitternacht Mittl. Druck
Ostwind	Südwind	Westwind	Nordwind

Auf der südlichen Hälfte sind in einer paren Welle die meridionalen Winde umgekehrt, die zonalen ungeändert.

(Das Beispiel 1 hat negatives φ und in höheren Breiten positives ψ, demnach in der Nähe des Äquators auf der nördlichen Halbkugel die Windfolge Ost, Nord, West, Süd; in höheren Breiten West, Nord, Ost, Süd. Das Beispiel 2 (Reibung) hat überall die letztgenannte Aufeinanderfolge, wobei jedoch das Maximum des Westwindes beträchtlich später eintritt als das Druckmaximum.)

Dieselbe Beziehung zwischen φ, ψ und E gilt noch sehr angenähert, wenn man es, nicht wie hier mit einer dünnen Luftschale, sondern mit einer freien Atmosphäre zu thun hat; denn die verticale Geschwindigkeit ist gegenüber der horizontalen sehr klein, das Verhältniss der bezüglichen Amplituden ist von derselben Grössenordnung wie dasjenige zwischen der sogenannten Höhe der homogenen Atmosphäre und dem Erdradius. Wenn in einem höheren Niveau der tägliche Gang des Druckes entgegengesetzt ist demjenigen am Boden, so kann auch der tägliche Gang des Windes umgekehrt sein.

Für die halbtägige Welle hat man wieder $l = 0$ und

$$\varepsilon = E(\omega) \sin(2\lambda + 2\nu t), \qquad b = \varphi(\omega) \cos(2\lambda + 2\nu t),$$
$$c = \psi(\omega) \sin(2\lambda + 2\nu t)$$

gesetzt:

$$\varphi = \frac{RT}{2\nu S} \frac{\frac{dE}{d\omega} + \cos\omega \frac{2E}{\sin\omega}}{\sin^2\omega} \qquad \psi = -\frac{RT}{2\nu S} \frac{\frac{2E}{\sin\omega} + \cos\omega \frac{dE}{d\omega}}{\sin^2\omega}$$

Wenn E vom Pol zum Äquator wächst und wenn das Maximum von ε um 10^h früh und 10^h Abends eintritt, so ist überall auf der nördlichen Hemisphäre

10^h früh Druckmax.	1^h Nm. Mittl. Druck	4^h Ab. Druckmin.	7^h Ab. Mittl. Druck	10^h Ab. Druckmax.
Ostwind	Südwind	Westwind	Nordwind	Ostwind

u. s. f.

In einer paren Welle verschwinden die meridionalen Winde am Äquator und haben in mittleren Breiten ein Maximum der Amplitude. Die grössten Windgeschwindigkeiten werden, wenn die Druckamplitude am Äquator 1/760 bei 45° Breite 0·3/760 des mittleren Druckes beträgt, 0·2 bis 0·3 m.sec^{-1} sein.

Alles dies gilt für die halbtägige Welle zunächst nur unter der Annahme, dass sie durch eine Temperaturwelle erregt wird. Wäre sie durch eine periodische Kraft entstanden, deren Potential W ist, so müsste man $E - W/RT$ in den Gleichungen für φ und ψ an die Stelle von E setzen. Wenn aber die Periode der erzwungenen Welle sehr nahe gleich ist derjenigen einer freien Welle, so ist E gross im Vergleich mit W/RT und die Beziehung des Windsystems zur Druckvertheilung bleibt dieselbe wie zuvor.

Anhang I. Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes in einer rotirenden Niveaufläche.

Die Bewegungsgleichungen eines Punktes von der Masse 1 haben im sphärischen Coordinatensystem folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - r\sin^2\omega\left(\frac{d\lambda'}{dt}\right)^2 \\
\frac{\partial V}{r\,\partial\omega} &= r\frac{d^2\omega}{dt^2} - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} - r\cos\omega\sin\omega\left(\frac{d\lambda'}{dt}\right)^2 \\
\frac{\partial V}{r\sin\omega\,\partial\lambda} &= r\sin\omega\frac{d^2\lambda'}{dt^2} + 2\sin\omega\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda'}{dt} + 2r\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{d\lambda'}{dt}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

t die Zeit, r Radiusvector des Punktes, ω sein Polabstand, λ' die (ostwärts gezählte) Länge; V das Potential der auf den Punkt wirkenden Kräfte.

Will man die Bewegung auf ein mit der constanten Rotationsgeschwindigkeit ν ostwärts drehendes Coordinatensystem beziehen, so ist $\lambda' = \lambda + \nu t$ zu setzen

$$\frac{d\lambda'}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} + \nu \tag{2}$$

wobei jetzt λ die Länge bezeichnet, östlich gezählt von einer bestimmten mitrotirenden Meridianebene.

Ein Punkt, welcher in Beziehung auf das rotirende System in Ruhe ist, hat eine radiale Beschleunigung $\nu^2 r\sin^2\omega$ und eine meridionale Beschleunigung $\nu^2 r\cos\omega\sin\omega$. Die aus dem Potential $v = -{}^1/_2\,\nu^2 r^2\sin^2\omega$ abgeleiteten Kräfte könnten den Punkt in relativer Ruhe im neuen System erhalten, wenn keine andere Kraft auf ihn wirkt. Die möglichen freien Oberflächen einer Flüssigkeit, welche in relativer Ruhe zum rotirenden System verharrt, sind durch die Gleichung $V-v =$ Const. gegeben, wenn V das in der Flüssigkeit herrschende Potential bezeichnet.

Ist nun V eine Function von r, ω, λ, welche die Zeit nicht enthält, und setzt man

$$V = Y - \frac{1}{2}\nu^2 r^2 \sin^2\omega, \tag{3}$$

so ist $Y =$ Const. die Gleichung der Niveauflächen. Wenn man die Relationen (2) und (3) in die Gleichungen (1) einführt, folgt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - r\sin^2\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 2\nu r\sin^2\omega\,\frac{d\lambda}{dt}\\
\frac{\partial Y}{r\,\partial\omega} &= r\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} - r\cos\omega\sin\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 2\nu r\cos\omega\sin\omega\,\frac{d\lambda}{dt}\\
\frac{\partial Y}{r\sin\omega\,\partial\lambda} &= r\sin\omega\frac{d^2\lambda}{dt} + 2\sin\omega\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dt}+\nu\right) + 2r\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{d\lambda}{dt}+\nu\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die letzte Gleichung gibt, wenn Y von der Länge unabhängig ist, den Satz von der Erhaltung der Flächen in Beziehung auf die Rotationsaxe, da in diesem Falle

$$\frac{d}{dt}\left[r^2\sin^2\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}+\nu\right)\right] = 0.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen mit dr/dt, die zweite mit $r d\omega/dt$, die dritte mit $r\sin\omega\, d\lambda/dt$, addirt, und bildet das Zeitintegral, so erhält man

$$Y + \text{Const.} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + r^2\sin^2\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right].$$

Die Gleichung führt zu dem Satze, dass, wenn der Punkt auf einer rotirenden Niveaufläche $Y =$ const. bleibt, die lebendige Kraft der relativen Bewegung sich nicht ändert. Diesen Satz hat Sprung abgeleitet.[1]

---

[1] Meteorologische Zeitschrift, 1890, S. 161.

Wir wollen jetzt annehmen, es sei V_1 das Potential eines mit den rotirenden Coordinaten verbundenen Massensystems, welches bewirkt, dass die Niveauflächen Kugeln sind. Zu diesem Zwecke muss man

$$V_1 = f(r) - \frac{1}{2}\nu^2 r^2 \sin^2\omega$$

setzen.[1] Überdies sollen andere Kräfte, deren Potential W ist, auf den Punkt wirken.

Man hat dann in die Gleichungen (1), beziehungsweise in die Gleichungen (4) einzusetzen

$$\left.\begin{aligned} V &= f(r) - \frac{1}{2}\nu^2 r^2 \sin^2\omega + W \\ Y &= f(r) + W \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Soll der Punkt auf einer Niveaufläche $r = S$ bleiben, so ist jetzt $dr/dt = 0$. Man hat es nur mehr mit den zwei letzten Bewegungsgleichungen zu thun, während die erste die Kraft angibt, welche der Punkt auf die Unterlage ausübt.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{S\partial\omega} &= S\left[\frac{d^2\omega}{dt^2} - \cos\omega\sin\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 2\nu\cos\omega\sin\omega\frac{d\lambda}{dt}\right] \\ \frac{\partial W}{S\sin\omega\partial\lambda} &= S\left[\sin\omega\frac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + 2\nu\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\right] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Diese zunächst für eine kugelförmige Niveaufläche abgeleiteten Gleichungen gelten noch für eine sphäroidale Niveaufläche, welche von der Kugelgestalt sehr wenig abweicht, wenn man den Polabstand ω so, wie es in der Geodäsie gebräuchlich ist, definirt.

Die Bewegungsgleichungen der Luft in einer sphäroidalen Niveauschale lassen sich aus der Gleichung (6) leicht ableiten, wenn man beachtet, dass die Druckkräfte

$$-\frac{RT}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}, \qquad -\frac{RT}{S\sin\omega}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}$$

---

[1] Vergl. v. Helmholtz, »Über atmosphärische Bewegungen«. Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1888.

in meridionaler und zonaler Richtung hinzukommen. Setzt man

$$b = S\frac{d\omega}{dt} \qquad c = S\sin\omega\frac{d\lambda}{dt},$$

vernachlässigt die Glieder, welche in Beziehung auf b, c und deren Differentialquotienten nicht linear sind, so erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial(W-RT\varepsilon)}{S\partial\omega} = \frac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega . c$$

$$\frac{\partial(W-RT\varepsilon)}{S\sin\omega\,\partial\lambda} = \frac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\cos\omega . b,$$

von denen wir theils in dieser Form, theils für $W = 0$, und auch unter Hinzufügung der Reibungsglieder $-l.b$, $-l.c$, Gebrauch gemacht haben.

Da die in §. 6 der Abh. 1890 gegebene Ableitung nicht ganz zureichend ist, schien es nicht überflüssig, sie in vollständiger Entwicklung zu wiederholen.

Anhang II. Erzwungene Schwingungen in einer verticalen Luftsäule und in einer Atmosphäre mit ebener oder cylindrischer Unterlage.

A. Verticale Luftsäule.

Für die verticale Bewegung der Luft, auf welche die constante Schwerkraft g wirkt und deren Temperatur im Ruhezustand T constant angenommen ist, gelten die folgenden Differentialgleichungen, wenn die Bewegung dadurch erzeugt wird, dass T in das variable $T(1+\tau)$ übergeht, und wenn τ ein kleiner Bruch ist

$$\frac{\partial w}{\partial t} = RT\left(\alpha\tau - \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} - \alpha w = 0. \quad (1)$$

(Gleichungen (3) der Abh. 1890, für $u = 0$ und $\alpha = g/RT$ gesetzt; α^{-1} Höhe der homogenen Atmosphäre bei der Temperatur T).

Nach Elimination von w erhält man eine Gleichung zwischen dem relativen Überdruck ε und dem gegebenen τ.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{RT} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \tau}{\partial t} - \alpha^2 \tau - \frac{1}{RT} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}. \tag{2}$$

ε und w lassen sich nur vollständig bestimmen, wenn der Bewegungszustand zu einer Zeit t_0 (Anfangszustand) und die Grenzbedingungen für zwei Werthe von z bekannt sind.

Hat aber τ die Form einer zeitlich periodischen Function

$$\tau = F(z) \sin nt,$$

so interessiren uns in den Ausdrücken von ε und w nur jene Glieder, welche durch periodische Erwärmung entstehen und demnach die gleiche Periode wie τ haben. Sie werden die Form

$$\varepsilon = E(z) \sin nt, \qquad w = W(z) \cos nt$$

annehmen. Andere Glieder dienen nur zur Darstellung von Bewegungen, welche auch bei constanter Temperatur stattfinden können. Lässt man sie ausser Acht, so braucht man auch den Anfangszustand nicht zu kennen.

Statt der partiellen Differentialgleichung (2) hat man nun die totale für E

$$\frac{d^2 E}{dz^2} - \alpha \frac{dE}{dz} + \frac{n^2}{RT} E = \alpha \frac{dF}{dz} - \alpha^2 F + \frac{n^2}{RT} F, \tag{3}$$

daraus sich E berechnen lässt bis auf zwei unbestimmte Constante K_1, K_2, welche zur Erfüllung der Grenzbedingungen dienen. Schreibt man

$$E(z) = E_F(z) + K_1 e^{\beta_1 z} + K_2 e^{\beta_2 z}, \tag{4}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{n^2}{RT}}, \qquad \beta_2 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{n^2}{RT}},$$

dann ist

$$W = -\frac{RT}{n}\left(\alpha F - \frac{dE}{dz}\right).$$

$E_F(z)$ ist das ohne unbestimmte Constante genommene particuläre Integral von (3), welches zugleich mit F verschwindet. Die zwei anderen Glieder auf der rechten Seite von (4) gehören zu einer freien (von Lord Rayleigh discutirten) Schwingung der verticalen Luftsäule.

Setzt man

$$F = Ae^{-\gamma z},$$

so folgt

$$E = Be^{-\gamma z} + K_1 e^{\beta_1 z} + K_2 e^{\beta_2 z},$$

$$W = -\frac{RT}{n}\{(\alpha A + \gamma B)e^{-\gamma z} - e\beta_1 K_1{}^{\beta_1 z} - \beta_2 K_2 e^{\beta_2 z}\},$$

$$B = \frac{-\alpha(\gamma+\alpha) + \frac{n^2}{RT}}{\gamma(\gamma+\alpha) + \frac{n^2}{RT}} A, \qquad \alpha A + \gamma B = \frac{n^2}{RT} \cdot \frac{\gamma+\alpha}{\gamma(\gamma+\alpha) + \frac{n^2}{RT}} A.$$

Zur Bestimmung der Constanten K_1, K_2 braucht man zwei Grenzbedingungen; als erste setzen wir, dass die verticale Geschwindigkeit am Boden Null ist. Für eine freie Säule gäbe es keine ganz einwurfsfreie zweite Bedingung. Wir wollen desshalb eine Säule annehmen, welche in sehr grosser Höhe Z horizontal begrenzt ist, demnach für

$$z = 0, \quad W = 0 \quad \text{und für} \quad z = Z, \quad W = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$K_1 = \frac{\alpha A + \gamma B}{\beta_1} \cdot \frac{e^{\beta_2 Z} - e^{-\gamma Z}}{e^{\beta_2 Z} - e^{\beta_1 Z}}, \qquad K_2 = -\frac{\alpha A + \gamma B}{\beta_2} \frac{e^{\beta_1 Z} - e^{-\gamma Z}}{e^{\beta_2 Z} - e^{\beta_1 Z}}.$$

Die Formeln werden weitaus einfacher und leichter zu überblicken sein, wenn man die Grössenverhältnisse der darin vorkommenden Werthe berücksichtigt. Nimmt man die Schwerkraft gleich derjenigen auf der Erde an, ferner trockene Luft von der Temperatur 273°, und ist die Periode der Erwärmung ein Tag,

$$g = 9\cdot 806\,\mathrm{m}\ \ \mathrm{sec}^{-2}, \quad RT = \frac{10333\,.\,9\cdot 806}{1\cdot 293} = 78365\,\mathrm{m}^2.\mathrm{sec}$$

$$\frac{g}{RT} = \alpha = 0\cdot 0001251\,\mathrm{m}^{-1}, \qquad n = \nu = \frac{2\pi}{24.60.60}\,\mathrm{sec}^{-1},$$

so ist

$$\frac{\nu^2}{RT} = 10^{-14}.6\ 75.\mathrm{m}^{-2} \qquad \alpha^2 = 10^{-8}.1\cdot 57.\mathrm{m}^{-2},$$

demnach ν^2/RT sehr klein gegen α^2, oder auch gegen $\gamma\alpha$, wenn γ von gleicher Grössenordnung wie α angenommen ist. Man hat also mit sehr grosser Annäherung

$$B = -\frac{\alpha}{\gamma}A, \qquad \frac{\alpha A+\gamma B}{\beta_1} = \frac{\alpha}{\gamma}A, \qquad \beta_1 = \frac{\nu^2}{RT\alpha}, \qquad \beta_2 = \alpha,$$

ferner, da β_2 sehr gross gegen β_1,

$$K_1 = \frac{\alpha}{\gamma}A, \qquad K_2 = 0$$

und die Lösung der Gleichungen (1) nimmt — mit der Beschränkung auf Werthe von z die klein sind gegen Z — folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{c} \tau = Ae^{-\gamma z}\sin\nu t: \\ \varepsilon = \frac{\alpha}{\gamma}A(1-e^{-\gamma z})\sin\nu t, \quad w = \frac{\nu}{\gamma}A(1-e^{-\gamma z})\cos\nu t \end{array}\right\} \tag{5}$$

Den Gleichungen (5) zufolge ist die Änderung des Druckes am Boden Null und in der Höhe z gleich derjenigen, welche in einer freien Säule durch die Erwärmung τ entstünde, wenn der statische Zustand wieder hergestellt wäre, oder gleich dem Überdruck, welchen die über das Niveau z gehobene Luftmasse bewirkt. Bei einer langsamen Schwingung bleibt die barometrische Höhenformel so nahe giltig, dass die Abweichungen tief unter den Werthen liegen, welche der Beobachtung zugänglich sind.

Wir dürfen demnach versuchen, eine Lösung abzuleiten aus der Annahme, dass die barometrische Höhenformel genau gilt, wie im Ruhezustande; die verticale Geschwindigkeit wird man aus der Continuitätsgleichung finden. Wir setzen statt der Gleichungen (1) die folgenden:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \alpha\tau = 0,^* \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha w = 0. \tag{1*}$$

---

* Diese Gleichung ist in unserer Bezeichnung die barometrische Formel. Sie geht aus der gebräuchlichen Form hervor (p Druck, T Temperatur im Ruhezustande, Functionen der Höhe), wenn man in

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT}$$

T durch $T(1+\tau)$ und p durch $p(1+\varepsilon)$ ersetzt, Quadrate von τ und ε vernachlässigt.

Nimmt man wieder

$$\tau = Ae^{-\gamma z} \sin \nu t,$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \left(-\frac{\alpha}{\gamma} A e^{-\gamma z} + C_1\right) \sin \nu t, \\ w &= \left(-\frac{\nu}{\gamma} A e^{-\gamma z} + \frac{\;}{\alpha} C_1 + C_2 e^{\alpha z}\right) \cos \nu t. \end{aligned}\right\} \quad (4^*)$$

Setzt man nun fest, dass die Luftmasse in der Säule ungeändert bleibt, demgemäss der Druck am Boden constant, und dass die verticale Geschwindigkeit daselbst Null ist, für

$$z = 0, \qquad \varepsilon = 0 \quad \text{und} \quad w = 0,$$

so wird

$$C_1 = \frac{\alpha}{\gamma} A, \qquad C_2 = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{\gamma} A (1 - e^{-\gamma z}) \sin \nu t, \qquad w = \frac{\nu}{\gamma} A (1 - e^{-\gamma z}) \cos \nu t. \qquad (5^*)$$

Man erhält dieselbe Lösung wie in (5).

Der Gang der Rechnung bleibt hier derselbe wie zuvor, nur dass kurzweg statt β_1 Null, statt β_2 α gesetzt wird; ferner ist keine Bedingung für eine unbestimmte grosse Höhe Z einzuführen. Wir sind dadurch von der Einschränkung befreit, welche wir vorhin in Betreff des Giltigkeitsbereiches der Lösung machen mussten. [Die Lösung (5) gilt für die ganze Säule, wenn man statt der Bedingung $w = 0$ für $z = Z$ die andere setzt, dass für sehr grosse z die Geschwindigkeit nicht unendlich gross wird. Im unteren Theil der Säule bleibt die Bewegung in beiden Fällen gleich].

Die Entfernung eines Lufttheilchens von der Mittellage ist

$$y = \int_0^t w dt = \frac{1}{\gamma} A (1 - e^{-\gamma z}) \sin \nu t.$$

In der folgenden Tabelle, welche mit den Werthen

$$T = 273^\circ, \qquad A = \frac{5}{273}, \qquad \gamma = 4\alpha$$

gerechnet ist, hat man für verschiedene Höhen eine Übersicht der grössten Werthe von ε, $p\varepsilon$, w, y. Der Druck am Boden ist 760 gesetzt.

Höhe	Mittlerer Druck	Temp.-Amplitude	Relative Druck-Amplitude	Absolute Druck-Amplitude	Grösste Geschwindigkeit	Grösste Erhebung
	$[p]$	$[273°\tau]_{\text{Max.}}$	$[\varepsilon]_{\text{Max.}}$	$[p\varepsilon]_{\text{Max.}}$		
0 m	760		0	0	0 m.sec^{-1}	0 m
1000	686·3	3·033	0·00180	1·24	0·00105	14·4
2000	591·9	1·839	289	1·71	168	23·1
4000	461·0	0·677	396	1·83	230	31·6
8000	279·6	0·092	450	1·26	261	35·9
16000	102·9	0·002	458	0·47	266	36·6
∞	0	0	458	0	266	36·6

Ganz anders verhält sich die Druckschwingung in einer verticalen Säule von der Höhe H, welche oben offen in die freie Atmosphäre mündet. Ist in grösserer Entfernung von der Säule die Luft in Ruhe, so hat man zur Bestimmung der Bewegung innerhalb der Röhre als Grenzbedingungen

$$z = 0, \quad w = 0; \qquad z = H, \quad \varepsilon = 0.$$

Man rechnet daraus die Constanten C_1, C_2 der Gleichungen (4*) und erhält zwischen 0 und H

$$\left.\begin{aligned} \tau &= Ae^{-\gamma z} \sin \nu t: \\ \varepsilon &= -\frac{\alpha}{\gamma} A(e^{-\gamma z} - e^{-\gamma H}) \sin \nu t \\ w &= \frac{\nu}{\gamma} A(e^{\alpha z}[1 - e^{-\gamma H}] - e^{-\gamma z} + e^{-\gamma H}) \cos \nu t \end{aligned}\right\} \quad (6^*)$$

Die relative Druckamplitude am Boden

$$\frac{\alpha}{\gamma} A.(1 - e^{-\gamma H})$$

ist unter sonst gleichen Umständen desto grösser, je höher die offene Säule. Das Druckminimum tritt gleichzeitig mit dem Temperaturmaximum ein.

Man darf die Luft in einem tief eingeschnittenen Thale mit der Luft in unserer verticalen Röhre vergleichen und kann leicht die Änderungen berechnen, welche die ganztägige und halbtägige Druckschwankung in Hochgebirgsthälern erleidet. Angenommen, am Orte dieser Säule sei in der Höhe H der freien Atmosphäre die relative Druckschwingung gegeben durch

$$(\varepsilon) = D_1 \sin(\nu t + \eta_1) + D_2 \sin(\nu t + \eta_2)$$

und in der Säule finde eine Temperaturschwingung statt gemäss der Gleichung

$$\tau = A_1 e^{-\gamma_1 z} . \sin(\nu t + \zeta_1) + A_2 e^{-\gamma_2 z} \sin(2\nu t + \zeta_2).$$

Dann ist die Druckschwingung innerhalb der Säule (oder des engen Thales)

$$\varepsilon = D_1 \sin(\nu t + \eta_1) - \frac{\alpha}{\gamma_1} A_1 (e^{-\gamma_1 z} - e^{-\gamma_1 H}) \sin(\nu t + \zeta_1)$$
$$+ D_2 \sin(2\nu t + \eta_2) - \frac{\alpha}{\gamma_2} A_2 (e^{-\gamma_2 z} - e^{-\gamma_2 H}) \sin(2\nu t + \zeta_2).$$

Als Beispiel berechnen wir die Druckschwingung auf dem Boden der Säule mit folgenden Daten, die Zeit t von Mitternacht ab gezählt:

$$z = 0, \quad H = 1000, \quad D_1 = 0, \quad A_1 = \frac{5}{273} \quad \zeta_1 = \text{arc}\, 210°,$$

$$D_2 = \frac{0\cdot 3}{760}, \quad \eta_2 = \text{arc}\, 150°, \quad A_2 = \frac{1}{273}, \quad \zeta_2 = \text{arc}\, 30°,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 4\alpha, \qquad \alpha^{-1} = 8000.$$

Es ist danach in der Höhe von 1000 m nur eine halbtägige Druckschwingung angenommen, deren Maximum um 10^h früh und Abends eintritt; auf dem Boden der Säule eine ganztägige Temperaturschwingung mit der Amplitude 5°, Maximum 4^h Abends, und eine halbtägige Temperaturschwingung, Amplitude 1°, Maximum 2^h früh und Nachmittag, endlich die verticale Abnahme der Temperaturamplituden gleich wie im vorigen Beispiel.

Die resultirende Druckänderung am Boden ist

$$760\,\varepsilon = 1\cdot 37 \sin(\nu t + \text{arc}\,30°) + 0\cdot 497 \sin(2\nu t + \text{arc}\,178°5).$$

Das Maximum des ganztägigen Gliedes tritt um 4^h früh ein, gleichzeitig mit dem entsprechenden Temperaturminimum, das Maximum des halbtägigen Gliedes um $9^h\ 3^m$, fast eine Stunde früher, als in der Höhe ausserhalb der Säule.

Wenn der mittlere Druck am Boden 760 ist, hat die durch die Temperaturschwingung allein erzeugte ganztägige Druckschwingung die Amplitude 1·37 die halbtägige entsteht aus der Interferenz zweier Schwingungen, deren eine die Amplitude 0·3 und das Maximum um 10^h hat, während die Amplitude der anderen 0·274 ist, ihr Maximum auf 8^h fällt.

B. Fortschreitende Welle in einer Atmosphäre mit ebener oder cylindrischer Unterlage.

Es wird angenommen, dass die Temperatur T der Luft im Ruhezustande überall constant ist, dass sie dann in $T(1+\tau)$ übergeht,

$$\tau = Ae^{-\gamma z} \sin(mx + nt),$$

so dass eine Temperaturwelle mit vertical abnehmender Amplitude nach der Richtung $-x$ wandert.

Zur Berechnung der damit verbundenen Druckwelle, der horizontalen Geschwindigkeit u, der verticalen w, hat man von den Gleichungen (3) der Abh. 1890 auszugehen.

Wenn aber die Periode und die Wellenlänge sehr gross sind, kann man sich die im vorigen Abschnitte gewonnene Erfahrung zunutze machen, dass die barometrische Höhenformel für langsam verlaufende Schwingungen mit ausreichender Genauigkeit giltig bleibt, und kann eine jener Gleichungen durch die genannte Formel ersetzen. Man hat

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\tau - \frac{\partial\varepsilon}{\partial z} = 0, \quad -RT\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \\ &\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha w = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Schreibt man noch

$$\varepsilon = E(z)\sin(mx+nt), \qquad u = U(z)\sin(mx+nt),$$
$$w = W(z)\cos(mx+nt),$$

so folgt aus der ersten und zweiten

$$E = -\frac{\alpha}{\gamma}Ae^{-\gamma z}+C_1, \qquad U = -RT\frac{m}{n}E,$$

aus der dritten, wenn man zur Abkürzung setzt

$$c = RT\frac{m^2}{n^2},$$

$$W = -\frac{n}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}c\right)Ae^{-\gamma z}+\frac{n}{\alpha}(1-c)C_1+C_2e^{\alpha z}.$$

Die Constanten C_1, C_2 sind mittels passender Bedingungen zu bestimmen. Soll die verticale Geschwindigkeit nicht mit z ins Unbegrenzte wachsen, so muss

$$C_2 = 0$$

gesetzt werden. Aus der Bedingung $w = 0$ für $z = 0$ folgt

$$C_1 = \frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\gamma+\alpha}\frac{1}{1-c}\right).$$

Die vollständige Lösung der Gleichungen (1) ist danach

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= Ae^{-\gamma z}\sin(mx+nt);\\
\varepsilon &= A\left\{\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\frac{c}{1-c}+\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right\}\sin(mx+nt)\\
u &= -RT\frac{m}{n}\varepsilon,\\
w &= A\frac{n}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}c\right)(1-e^{-\gamma z})\cos(mx+nt)
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

das sind dieselben Werthe von ε, u, w, welche man erhält, wenn man statt der ersten der Differentialgleichungen (1) die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = RT\left(\alpha\tau - \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)$$

setzt, sobald man nur $n^2/(RT) - m^2$ gegen α^2 vernachlässigen darf. (Man vergl. §. 4 und 5 der Abh. 1890). Dies ist ohneweiters gestattet, wenn für die Schwingungsperiode ein Tag $n = \nu$, für die Wellenlänge der Umfang des Erdäquators $m^{-1} = S$ angenommen wird. Man hat dann mit $T = 273°$

$$\frac{\nu^2}{RT} = 10^{-14}.6\cdot75, \quad m^2 = 10^{-14}.2\cdot47, \quad \alpha^2 = 10^{-8}.1\cdot57\,[\mathrm{m}^{-2}].$$

Der relative Überdruck in einer Höhe z ist die Summe zweier Glieder $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta_z$,

$$\varepsilon_0 = A\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\,\frac{c}{1-c}\sin(mx+nt),$$

$$\delta_z = A\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\sin(mx+nt);$$

das erste gibt den relativen Überdruck am Boden an; das zweite denjenigen, welcher in einer unendlich hohen verticalen Säule in der Höhe z entstünde durch die Temperaturerhöhung $T\tau$. $p\delta_z$ ist also das Gewicht derjenigen Luftmasse, welche in der Säule vom Querschnitt 1 durch die Temperaturerhöhung $T\tau$ über das Niveau z gehoben wird.

(Das gilt nicht allein für die besondere Form der Temperaturwelle, welche oben angenommen wurde, sondern ganz allgemein, wenn die barometrische Höhenformel giltig bleibt; denn aus $\partial\varepsilon/\partial z = \alpha\tau$ folgt, wenn

$$\tau = F(z)\sin[mx+nt+\varphi(z)]$$

und in ε nur jene Glieder berücksichtigt werden, welche der erzwungenen fortschreitenden Welle angehören,

$$\varepsilon = E_0\sin(mx+nt+\eta) + \int_0^z \alpha\tau dz.$$

Der erste Theil auf der rechten Seite gibt die Druckwelle am Boden an (E_0, η Constante), der andere das δ_z.)

Wenn in verschiedenen Höhen Temperaturwellen von gleicher Periode und Länge, aber mit ungleichen Phasen wandern, so erzeugt die τ-Welle jeder Schicht eine ε-Welle in der ganzen Atmosphäre und die Druckwelle in einer Höhe z ist die Summe der erzwungenen Wellen.

Es genügt eine τ-Welle zu betrachten, welche zwischen z_1 und z_2 die constante Amplitude A hat; in allen Höhen unter z_1 und über z_2 bleibe die Temperatur ungeändert; an den Grenzen der Schichten wird eine unstetige Änderung der Temperatur stattfinden. Der Druck und das Product der Dichte in die verticale Geschwindigkeit müssen stetig bleiben; die letzte Bedingung ist, da Producte von ε und w gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt werden, gleichbedeutend mit der Forderung, dass w eine stetige Function von z sei. Man hat es mit drei Lösungen der Gleichung (1) zu thun, je einer für jede Schicht.

Bevor wir diese zusammenstellen, notiren wir die Lösung für den Fall

$$\left.\begin{aligned} &\tau = A \sin(mx+nt): \\ &\varepsilon = (A\alpha z+K_1)\sin(mx+nt), \qquad u = -RT\frac{m}{n}\varepsilon \\ &w = \frac{n}{\alpha}[-cA+(1-c)(A\alpha z+K_1)+K_2 e^{\alpha z}]\cos(mx+nt) \end{aligned}\right\} \quad (2a)$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass diese durch die Bedingungen, w bleibe endlich für $z = \infty$ und $w = 0$ für $z = 0$, übergeht in dieselbe Lösung, welche aus (2) entsteht, wenn $\gamma = 0$ gesetzt wird.

Wir verwenden nun die Formeln (2a) für die drei Schichten unserer oben beschriebenen Aufgabe und haben, wenn

$$\varepsilon = E(z)\sin(mx+nt), \qquad w = W(z)\cos(mx+nt),$$

von $z = 0$ bis z_1

$$\tau = 0, \qquad E = K_1, \qquad W = \frac{n}{\alpha}[(1-c)K_1+K_2 e^{\alpha z}];$$

von z_1 bis z_2:

$$\tau = A\sin(mx+nt), \qquad E' = A\alpha z+K_1',$$

$$W' = \frac{n}{\alpha}[-cA+(1-c)(A\alpha z+K_1')+K_2' e^{\alpha z}];$$

von z_2 bis ∞:

$$\tau = 0, \qquad E = K_1'', \qquad W'' = \frac{n}{\alpha}(1-c)K_1''$$

K_2'' wird gleich Null gesetzt gemäss der Bedingung, dass die verticale Geschwindigkeit mit der Höhe nicht ins Unbegrenzte wachse. Zur Bestimmung der fünf anderen Constanten K hat man ebenso viele Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \text{für } z = 0, & W = 0, & \\ \text{für } z = z_1, & E = E', & W = W', \\ \text{für } z = z_2, & E' = E'', & W' = W'' \end{array}$$

Daraus erhält man

$$K_1 = A\frac{c}{1-c}(e^{-\alpha z_1} - e^{-\alpha z_2}).$$

Eine nur in der Höhenschicht z_1 bis z_2 fortschreitende Temperaturwelle

$$\tau = A \sin(mx+nt)$$

erzeugt eine Druckwelle, welche am Boden (und bis zur Höhe z_1) den Werth hat:

$$\varepsilon_0 = A\frac{c}{1-c}(e^{-\alpha z_1} - e^{-\alpha z_2}) \sin(mx+nt). \tag{3}$$

Wenn $c = 1$ wird, also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Temperaturwelle n/m gleich derjenigen einer freien isothermen Welle $\sqrt{RT}$, so erhält man ε und u unendlich gross. Für eine in der Atmosphäre fortschreitende erzwungene Welle hat die kritische Fortpflanzungsgeschwindigkeit den gleichen Werth, wie in einer dünnen Schicht von constanter Dichte. Es ist wichtig, dies festzustellen für die Anwendung, welche wir von den früher geführten Rechnungen machen wollen. Wir dürfen, ohne die Entwicklungen für eine mit der Erde rotirende Atmosphäre auszuführen, annehmen, dass die Umlaufsdauer freier Wellen in einer solchen Luftschale von constanter Mitteltemperatur nahezu gleich ist der Umlaufsdauer analoger Wellen in einer dünnen rotirenden Niveauschale von derselben Temperatur.

Das zuletzt ausgeführte Beispiel wurde mit Beziehung auf Hann's Hypothese berechnet, Ursache der halbtägigen Druckschwankung sei die Erwärmung der höheren Luftschichten durch Absorption der Sonnenstrahlen.[1] Angenommen, in einer hohen Schicht finde ein regelmässiger täglicher Temperaturgang statt, dann lässt er sich als die Summe westwärts fortschreitender Wellen mit Perioden von 24, 12 Stunden darstellen; die Amplituden hängen von der Declination der Sonne und vom Polabstand des Ortes ab; die erzwungenen Druckwellen könnte man berechnen, wenn man eine Entwicklung ähnlich derjenigen, welche zur Gleichung (3) geführt hat, für die rotirende sphäroidale Atmosphäre ausführte. Das Ergebniss lässt sich jedoch schon mit Hilfe der bisher geführten Rechnungen voraussehen. Für die ganztägige Welle ist der dem $c/(1-c)$ entsprechende Factor klein, die Druckwelle am Boden fällt gering aus, wenn die Temperaturamplitude nicht sehr gross ist und die erwärmte Schicht hoch liegt; für die halbtägige Welle verhält es sich aber so, wie wenn c sehr nahe 1 ist, die Druckwelle hat eine im Verhältniss zur entsprechenden Temperatuschwankung grosse Amplitude.

Insoweit wäre die Annahme plausibel. Genauer liesse sie sich erst begründen, wenn man den Temperaturgang der oberen Schichten berechnen könnte; fände man, dass das Maximum oder Minimum des halbtägigen Temperaturgliedes auf 10^h fällt wie das halbtägige Druckmaximum, so hätte die Hypothese eine gute Stütze; der jährliche Gang der Druckamplitude — Maxima zur Zeit der Äquinoctien, Minima zur Zeit der Sonnenwende — liesse sich darauf zurückführen, dass die Amplituden des paren Theiles der Temperaturwelle (d. i. desjenigen Theiles, welcher in Beziehung auf den Äquator symmetrisch ist) in den erstgenannten Jahreszeiten grösser sind als in den anderen. Die impare Druckwelle hat wieder ein anderes c und desshalb relativ geringe Amplituden.

Alle diese Rechnungen gelten ebenso für eine Atmosphäre mit cylindrischer, wie für eine solche mit ebener Unterlage,

[1] Bemerkungen zur täglichen Oscillation des Barometers. Sitzungsber., Bd. XCIII (1886).

wenn S der Halbmesser des Cylinders sehr gross ist im Vergleich mit α^{-1}, der Höhe der homogenen Atmosphäre, und wenn man annimmt, dass die Luftbewegung nur nach der Länge λ und nach der Höhe z geschieht, von der Breite unabhängig ist. Es gelten dann die Differentialgleichungen (1), in denen x durch $S.\lambda$ ersetzt wird.

Wir notiren für späteren Gebrauch die Formeln, welche aus (2) hervorgehen, wenn man darin $j.\lambda$ statt mx einführt und

$$h = \frac{RT}{n^2 S^2}$$

setzt, also $c = j.h$.

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= Ae^{-\gamma z}\sin(j\lambda+nt);\\
\varepsilon &= A\left\{\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\frac{j^2h}{1-j^2h}+\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right\}\sin(j\lambda+nt),\\
u &= -Aj\frac{RT}{nS}\left\{\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\frac{j^2h}{1-j^2h}+\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right\}\sin(j\lambda+nt),\\
w &= A\frac{n}{\gamma}\left(1-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}j^2h\right)(1-e^{-\gamma z})\cos(j\lambda+nt).
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Werthe $j = 1$, $n = \nu$ gehören zu einer ganztägigen, die Werthe $j = 2$, $n = 2\nu$ zu einer halbtägigen Welle in der cylindrischen Atmosphäre.

C. Zusammenfassung der Beobachtungen über die ganztägige Barometerschwankung auf der Erde.[1]

Jener Bestandtheil des täglichen Luftdruckganges, welcher durch eine einfache Schwingung von der Periode 24 Stunden dargestellt wird, hat neben vielen örtlich unregelmässigen Erscheinungen einige beinahe regelmässige Merkmale, welche überall zutreffen — Küstenstriche, enge Thäler und Kessel ausgenommen.

---

[1] Hann, Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschr. der kaiserl. Akad. Wien, 1889. Angot, Etude sur la marche diurne du baromètre. Annales du bureau central de Météor. für 1887. Paris, 1890. Hann, Weitere Untersuchungen etc., Denkschr., Wien, 1892.

Sowohl in den Tropen, wie in mittleren Breiten tritt das jener Schwingung zugehörende Maximum des Luftdruckes am Boden um 6^h früh ein. Darf man annehmen, dass der tägliche Gang des Luftdruckes in freien Höhen von 1700 bis 3000 m annähernd gleich ist demjenigen auf Berggipfeln gleicher Erhebung, so kann man auch anführen, dass die Amplitude anfangs mit der Höhe abnimmt, etwa bei 1500 m Null wird, von da ab mit der Höhe wächst, während die Phase um die halbe Schwingungsdauer gegen diejenige am Boden verschoben ist. In Höhen über 1500 m tritt das Maximum um 6^h Abends ein.

Bezeichnet ϑ die wahre Ortszeit von Mitternacht ab gezählt, $2\pi/\nu$ die Tagesdauer, und schreibt man für den relativen Überdruck

$$\varepsilon = -E(z) \sin \nu\vartheta,$$

so hat man den angeführten Beobachtungen gemäss E mit z stetig wachsend

$E(z)$ negativ von Null bis etwa 1500 m,
$E(z)$ positiv für grössere Höhen.

Die Amplitude ist nicht nur eine Function der Höhe, sondern auch der Länge und der Breite, bezüglich dieser Coordinaten aber eine sehr unregelmässige Function. Man kann nur anführen, dass der Werth von E am Boden in continentalen Gebieten vom Äquator bis zu Breiten von 50° zwischen $0 \cdot 5/760$ und $1/760$ beträgt, auf dem Meere $0 \cdot 3/760$ nicht übersteigt.

Dass die ganztägige Druckwelle eine Folge der täglichen Temperaturschwankung ist, schliesst man aus folgenden Beobachtungen: Die Amplituden sind unter sonst gleichen Umständen kleiner auf dem Meere als auf dem Festlande, kleiner im Winter als im Sommer und kleiner an trüben als an heiteren Tagen, ganz entsprechend den Temperaturamplituden. Dass nur ein Bestandtheil des täglichen Temperaturganges, nämlich die 24-stündige Schwingung, mit der ganztägigen Druckwelle in Zusammenhang zu bringen ist, folgt aus dem allgemein giltigen Gesetze, dass die erzwungene Schwingung die gleiche Periode hat, wie die erregende.

Die ganztägige Temperaturschwingung hat am Boden das Maximum um 3^h Nachmittag, auf Berggipfeln in den ersten

Nachmittagsstunden. Sehr wahrscheinlich ist der tägliche Gang der Temperatur in der freien Atmosphäre schon in Höhen von 1000 bis 3000 m weit verschieden von demjenigen auf Bergen gleicher Höhe. Man schliesst das aus der vorhin angeführten Beobachtung, dass $\partial\varepsilon/\partial z$ um 6^h Abends den grössten positiven Werth erreicht. Es muss also auch das Maximum von τ — zufolge der Gleichung $\alpha\tau = \partial\varepsilon/\partial z$ — auf dieselbe Zeit fallen. Man vermuthet demnach, dass der tägliche Temperaturgang, der am Boden beobachtet wird, nur für eine Schicht von geringer Dicke gilt, dass jedoch in grösseren Höhen das Maximum der Temperatur um 6^h Abends eintritt.[1]

Wenn man also annimmt, dass der tägliche Gang des Druckes in der freien Atmosphäre durch die Beobachtungen auf Berggipfeln gut dargestellt ist, so folgt, dass der tägliche Temperaturgang auf diesen Gipfeln ein ganz anderer ist, als in gleicher Höhe über ebenem Boden.

Der Kürze wegen soll für die ganztägige Temperaturschwingung in allen Höhen gleiche Phase und das Maximum auf 6^h Abends gesetzt werden,

$$\tau = F(z) \sin(\nu\vartheta + \pi);$$

F überall positiv. Führt man noch statt der Ortszeit ϑ die Zeit t des Meridians Null ein, daselbst von Mitternacht gezählt, $\vartheta = t + \lambda/\nu$, so sind die zusammengehörigen Werthe der 24-stündigen Temperatur- und Druckschwingung

$\tau = F(z) \sin(\lambda + \nu t + \pi)$ F positiv,

$\varepsilon = E(z) \sin(\lambda + \nu t + \pi)$ E negativ unter 1500 m, daselbst Null, darüber positiv.

In F und E ist nur die Höhe unter dem Functionszeichen hervorgehoben, obgleich beide auch Functionen der Länge und Breite sind.

Will man diese Formeln, welche die Erscheinungen im Allgemeinen richtig darstellen, mit den Ergebnissen der bisher geführten Rechnungen vergleichen, so ist dabei nur auf E_0 (den Werth von E am Boden) zu achten, da sich die Änderung von E

[1] Hann, Weitere Untersuchungen, l. c.

mit der Höhe aus τ mittels der barometrischen Höhenformel unmittelbar berechnen lässt.

In einer cylindrischen Atmosphäre erhält man, wenn F eine Function der Höhe allein und überall positiv ist, auch E_0 positiv, sobald

$$\frac{RT}{\nu^2 S^2} < 1.$$

Setzt man S gleich dem Radius des Erdäquators, so ist

$$\frac{RT}{\nu^2 S^2} = \frac{1}{2 \cdot 735}.$$

Das Maximum des Druckes am Boden fällt mit dem Maximum der Temperatur zusammen; das gleiche tritt noch ein, wenn für S der Radius des Breitekreises 30° gesetzt wird.

Die Rechnung ist vorhin für eine dünne rotirende Sphäroidschale ausgeführt worden und F als Function der Breite angenommen. Auch da ergab sich bei reibungsloser Bewegung E mit F gleichbezeichnet; in jedem Parallelkreise fällt ε-Maximum mit τ-Maximum zusammen.

Man kann danach mit Sicherheit voraussehen, dass, wenn in einer freien sphäroidalen Atmosphäre F als Function der Breite und der Höhe jedoch überall positiv und eine Temperaturwelle

$$\tau = F(z, \omega) \sin(\lambda + \nu t + \eta)$$

durch die Atmosphäre fortschreitend angenommen wird, in der erzwungenen Druckwelle

$$\varepsilon = E(z, \omega) \sin(\lambda + \nu t + \eta)$$

E überall, auch am Boden positiv sein muss; während man nach den vorliegenden zahlreichen Beobachtungen vermuthen möchte, dass auf einer regelmässigen Erde das ε-Maximum am Boden mit dem τ-Minimum zusammenfällt. Denn bemerkt man, wie weitaus überwiegend auf der Erde das ε_0-Maximum in der ganztägigen Welle um 6^h früh eintritt, so möchte man für sehr wahrscheinlich ansehen, dass es sich ebenso verhielte auf einer gleichartigen, von unregelmässigen Witterungserscheinungen freien Erde.

Doch erweist sich diese Vermuthung als ganz unberechtigt.

In Wirklichkeit gibt es auf der Erde kein Gebiet von grosser Ausdehnung, wo F eine Function der Breite und Höhe allein ist, sondern es erscheint vermöge der Vertheilung von Land und Wasser, der Unregelmässigkeit der Landoberfläche und der Bewölkung auch als eine Function der Länge und überdies als eine solche, die in nahen Orten sehr verschiedene Werthe hat: Es verhält sich dann an einem Tag beiläufig so, als ob in jedem kleinen Gebiete eine andere stehende Temperaturschwingung stattfände, unabhängig von denen in entfernten Gebieten.

Man hat nun die Aufgabe, die ε-Schwingung zu berechnen, welche zu einer stehenden τ-Schwingung auf einer Insel gehört, wenn auf dieser die Amplitude von τ constant, ausserhalb derselben Null ist.

Dieses Problem wollen wir für eine cylindrische Erde behandeln, auf welcher die Insel die Form eines der Axe parallelen Streifens hat; der Meridian Null soll durch die Mitte des Streifens gelegt, die Temperaturamplitude nur zwischen $-\lambda_1$ und λ_1 von Null verschieden sein. Die Längenausdehnung des Streifens $2\lambda_1 S$ wird gross angenommen im Vergleich mit α^{-1} der Höhe der homogenen Atmosphäre, aber klein im Vergleiche mit dem Umfang des Cylinders $2\pi S$.

D. Stehende Schwingungen in einem kleinen Theil der cylindrischen Atmosphäre.

Wenn die Temperaturschwingung in der Form

$$\tau = Ae^{-\gamma z}.f(\lambda) \sin \nu t \tag{1}$$

gegeben ist, so kann man $f(\lambda)$ durch eine periodische Function darstellen, und dadurch die Aufgabe ε, u, w zu finden, auf eine schon vorher gelöste zurückführen.

Es sei

$$f(\lambda) = 1 \text{ von } -\lambda_1 \text{ bis } \lambda_1,$$

$$f(\lambda) = 0 \text{ von } -\pi \text{ bis } -\lambda_1 \text{ und von } \lambda_1 \text{ bis } \pi.$$

Dann kann man f ersetzen durch eine Reihe

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\lambda + a_2 \cos 2\lambda + \quad + a_j \cos j\lambda + \ldots$$

$$a_j = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(\lambda) \cos j\lambda . d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda_1} \cos j\lambda . d\lambda = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin j\lambda_1}{j}$$

welche überall, die Unstetigkeitsstellen ausgenommen, die Function vollständig darstellt. Man hat nun τ als eine Summe, aus welcher wir das Glied

$$\tau_j = Ae^{-\gamma z} . a_j \cos j\lambda . \sin \nu t$$

herausheben. Zu diesem gehören

$$\varepsilon_j = A \left\{ \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} \frac{j^2 h}{1-j^2 h} + \frac{\alpha}{\gamma} (1-e^{-\gamma z}) \right\} a_j \cos j\lambda \sin \nu t,$$

$$u_j = -A \frac{RT}{\nu S} \cdot \left\{ \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} \cdot \frac{j^2 h}{1-j^2 h} + \frac{\alpha}{\gamma} (1-e^{-\gamma z}) \right\} ja_j \sin j\lambda \cos \nu t,$$

$$w_j = A \frac{\nu}{\gamma} \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma+\alpha} j^2 h \right) (1-e^{-\gamma z}) a_j \cos j\lambda . \cos \nu t.$$

Für $j = 0$ ist überall auf der rechten Seite der Factor $1/2$ hinzuzufügen. Diese Gleichungen ergeben sich aus (4) im Abschnitt B, wenn man zu ihnen diejenigen addirt, welche durch Vertauschung von j mit $-j$ daraus hervorgehen; ferner statt A setzt Aa_j, statt n setzt ν, so dass

$$h = \frac{RT}{\nu^2 S^2}.$$

Sowie nun τ sich aus den τ_j zusammensetzt, ist das zugehörende ε die Summe aller ε_j, $u = \Sigma u_j$, $w = \Sigma w_j$.

Die Entwicklung unterliegt gewissen Einschränkungen. Erstens ist der Fall auszuschliessen, dass h der inverse Werth des Quadrates einer ganzen Zahl j ist. Zweitens bemerkt man, dass zu sehr grossen j Schwingungen von kleiner Wellenlänge gehören, für welche unsere Rechnungen nicht gelten; denn diese sind unter der Annahme entstanden, dass m^2 oder $j^2 S^{-2}$ sehr klein ist gegen α^2. Das gilt noch, wenn $2\pi S = 4 \cdot 10^7$ m gesetzt wird, für $j = 100$, aber nicht mehr für $j = 1000$. Ferner könnte, wenn man die Reihen ins Unendliche ausdehnt, der Ausdruck für ε unstetig werden, und die Reihen für u, w divergent.

Alle Schwierigkeiten, mit Ausnahme der für h geltenden Beschränkung,[1] vermeidet man, wenn man

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^s a_j \cos j\lambda \tag{2}$$

setzt, worin a_j ebenso wie zuvor bestimmt, s aber gross genug gewählt wird, um zu bewirken, dass $f(\lambda)$ nur unbeträchtlich verschieden ist von 1 zwischen $-\lambda_1$ und λ_1 und sehr nahe Null ausserhalb dieses Gebietes. In der Nähe der Ränder vollzieht sich ein rascher, aber stetiger Übergang. (Je kleiner λ_1, desto langsamer ist die Convergenz der Reihe, umso grösser muss demnach s gewählt werden.)

Die endliche Reihe für ε wird nun auch im ganzen Gebiet stetig sein. Schreibt man wieder $\varepsilon = E \sin \nu t$ und beachtet, dass

$$\frac{j^2 h}{1-j^2 h} = \frac{1}{1-j^2 h} - 1,$$

so erhält man

$$E = A\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\left[\sum_1^s\left(\frac{a_j}{1-j^2h}\cos j\lambda\right) + \frac{1}{2}a_0 - f(\lambda)\right] + A\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})f(\lambda),$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{\lambda_1}{\pi}, \qquad a_j = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin j\lambda_1}{j}.$$

Wenn λ_1 sehr klein ist, so ist $\frac{1}{2}a_0$ und jedes a_j sehr klein. In der Summe, welche hier zu berechnen ist, kommt aber a_j noch durch $1-j^2h$ getheilt vor; desshalb haben nur wenige Glieder, die zu den ersten ganzen Zahlen j gehören, Einfluss auf den Werth des eingeklammerten Ausdruckes.

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^s\left(\frac{a_j}{1-j^2h}\cos j\lambda\right)$$

ist dann für jedes λ klein, und im Gebiete $-\lambda_1$ bis λ_1 (die Ränder ausgenommen) klein gegen $f(\lambda)$, welches dort den Werth 1 hat.

---

[1] Wenn h gleich oder sehr nahe gleich wäre dem inversen Quadrat einer ganzen Zahl j, so müsste man das entsprechende ε_j mit Berücksichtigung der Reibung berechnen.

[Wir wollen das an einem Beispiel erläutern. Wenn $\lambda_1 = \text{arc } 7{}^\circ 5$ angenommen wird, Längenausdehnung des Streifens 15°, $f(\lambda)$ sehr nahe 1 sein soll zwischen —7° und 7°, sehr nahe Null zwischen $-\pi$ und —8° und zwischen 8° und π, so müsste s in der Entwicklung von $f(\lambda)$ sehr gross genommen werden, mindestens $s = 100$. Die Reihe für f braucht man aber nicht, sondern diejenige für φ und dieses wird aus den zwölf ersten Gliedern mit ausreichender Genauigkeit bestimmt. Man hat $\varphi(0) = 0\cdot 1$ für $h = 1/2$. Je kleiner λ_1, desto kleiner wird auch $\varphi(0)$].

Man kann geradezu als erste Annäherung setzen

$$(E) = Af(\lambda)\left[-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right],$$

also am Boden (E) negativ, in grösseren Höhen positiv.

Genauer ist, wenn

$$\tau = Ae^{-\gamma z}\sin(\nu t+\eta), \qquad \eta \text{ constant}$$

auf einem kleinen Längenintervall, an den Rändern rasch zu Null übergehend, und auf dem ganzen übrigen Gebiet $\tau = 0$,

$$\varepsilon = A\left[-\rho\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}(1-e^{-\gamma z})\right]\sin(\nu t+\eta) \tag{3}$$

auf demselben Streifen, und ausserhalb desselben ε sehr nahe Null. ρ ist eine Function der Länge, innerhalb des Streifens nur wenig kleiner als 1.

Die folgende Tabelle enthält für einige Höhen die Werthe der Temperatur- und Druckamplituden ($T\tau$ und $p\varepsilon$) in der Mitte des Streifens, die letzteren einmal mit $\rho = 1$, das anderemal mit $\rho = 0\cdot 9$ gerechnet. Die dabei benützten Constanten sind

$$T = 273^\circ, \quad A = \frac{3}{273} \qquad \alpha = \frac{1}{8000}, \quad \gamma = 10\alpha = \frac{1}{800}\,[\mathrm{m}^{-1}].$$

Es wird also eine sehr rasche Abnahme der Temperaturamplitude mit der Höhe angenommen. Der mittlere Druck am Boden ist 760 gesetzt und η so gewählt, dass das Temperaturmaximum auf 6^h Abends fällt. Mit $\rho = 1$ tritt die Umkehrung des Zeichens von E bei 1916 m ein, mit $\rho = 0\cdot 9$ bei 1362 m.

Höhe	Temperatur-Amplitude	Druckamplitude		Zeit des	
		(I, $\rho = 1$)	(II, $\rho = 0·9$)	Temp.-Maximums	Druck-Maximums
0	3°	(—) 0·759	(—) 0·683		6^h früh
1000m	0·86	(—) 0.140	(—) 0·079		
2000	0·25	0·0057	0·065	6^h Abends	6^h Abends
4000	0·02	0·0427	0·091		
8000	0·001	0·0279	0·056		

Die Erscheinungen der ganztägigen Druckschwingung lassen sich also aus der Annahme ableiten: In kleinen Gebieten finden unabhängig von einander ganztägige Temperaturschwingungen statt, deren Amplitude mit der Höhe rasch abnimmt und deren Maximum auf 6^h Abends fällt.

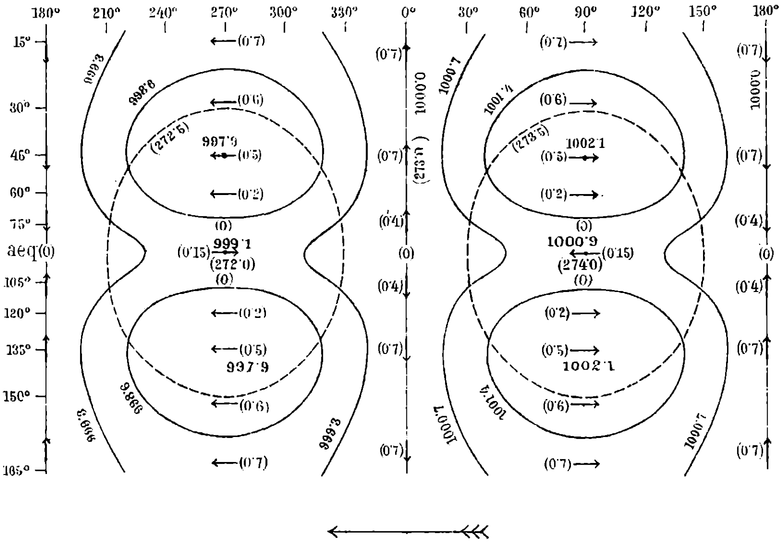
Statt der stehenden Temperaturschwingung könnte man auch eine Welle setzen, welche über ein kleines Längenintervall fortschreitet

$$\tau = A.f(\lambda, z) \sin(\lambda + \nu t + \eta),$$

mit einer ähnlichen Bestimmung für f wie zuvor. Man wird dann eine über den Streifen fortschreitende Druckwelle erhalten, deren Amplitude in der Mitte des Streifens nicht viel von der zuletzt berechneten abweicht.

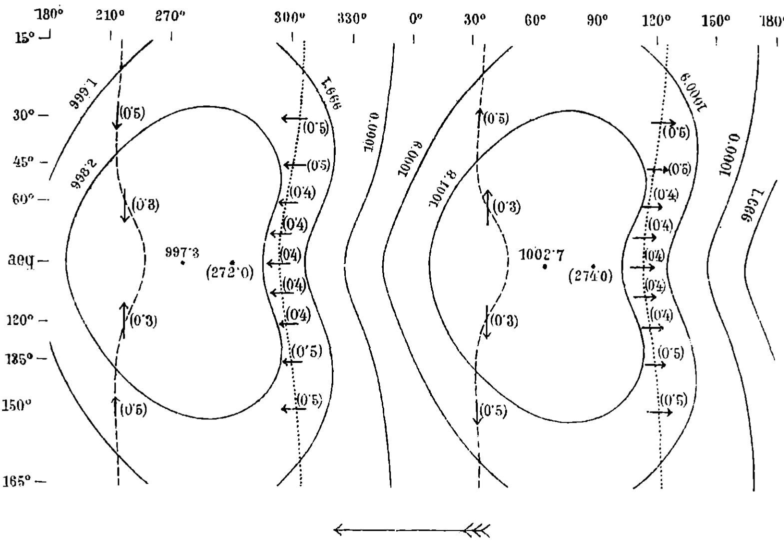
Ähnlich wie die ganztägigen werden auch die halbtägigen Temperaturschwingungen der unteren Schichten örtlich unregelmässige Druckschwingungen erzeugen. Die Amplituden dieser 12-stündigen sind gegenüber jenen der 24-stündigen Oscilationen in demselben Verhältniss kleiner, wie die entsprechenden Temperaturschwankungen, wenn das γ in beiden Fällen gleich anzunehmen ist. Die unregelmässigen Schwingungen interferiren mit denen einer regelmässigen Welle. Angot hat in der citirten Abhandlung den Versuch gemacht, die Bestandtheile der beobachteten halbtägigen Welle zu sondern.

Fig. 1.



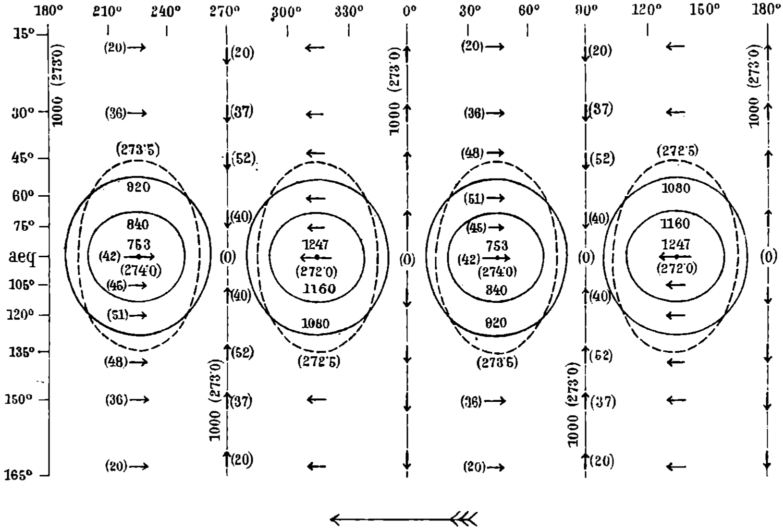
Westwärts wandernde Temperaturwelle in der rotirenden Schale. Umlaufsdauer 24 Stunden. Erzwungene Druckwelle erster Classe, bei reibungsloser Bewegung

Fig. 2.



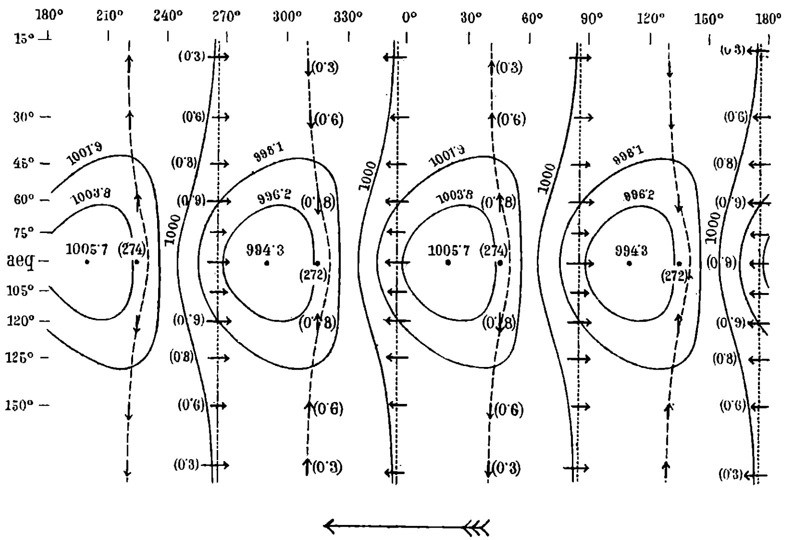
Temperaturwelle wie oben. Erzwungene Druckwelle bei Reibung (k^{-1} = 3·82 Stunden)

Fig. 3.



Westwärts wandernde Temperatur-Doppelwelle in der rotirenden Schale. Erzwungene Druckwelle zweiter Classe bei reibungsloser Bewegung. Schwingungsdauer 12 Stunden.

Fig. 4



Temperaturwelle wie oben Erzwungene Druckwelle bei Reibung (l^{-1} = 3·82 Stunden.)

Lith. Anst. v. J. Barth in Wien

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1893

Band/Volume: 102_2a

Autor(en)/Author(s): Margules Max

Artikel/Article: Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale. 1369-1420