# Über Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten

**Jan de Vries** in Delft.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1894.)

**1.** Eine ebene Curve fünfter Ordnung $\Phi_5$ mit vier Doppelpunkten $\Delta_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ wird durch den Kegelschnittbüschel $(D_2)$, mit den Basispunkten $\Delta$, in den Paaren einer Fundamentalinvolution $F_2$ getroffen.

Die Paare der $F_2$, welche mit einem beliebig gewählten Punkte $p$ allineirt sind, gehören einer Curve $H$ an, welche der Ort ist für die zweiten Schnittpunkte eines Strahles aus $p$ mit den Kegelschnitten $D_2$, welche ihn auf der vorgegebenen Curve $\Phi_5$ schneiden.

Die Curve $D_2$, welche $p$ enthält, bestimmt durch ihre Schnitte mit $\Phi_5$ zwei Strahlen, welche $H$ in $p$ berühren; $p$ ist demnach ein Doppelpunkt der Curve $H$. Nachdem nun jeder Strahl aus $p$ noch fünf Punkte des Ortes trägt, ist $H$ eine Curve siebenter Ordnung.

Jeder Punkt $\Delta$ ist ein dreifacher Punkt der $H_7$; seine drei Nachbarpunkte entsprechen nämlich den drei Kegelschnitten, welche die Gerade $\Delta p$, ausserhalb $\Delta$, auf $\Phi_5$ treffen.

Von den Schnittpunkten der Curven $\Phi_5$ und $H_7$ liegen 24 in den Punkten $\Delta$ vereinigt; die übrigen 11 sind entweder paarweise mit $p$ allineirt oder aber Berührungspunkte einer $D_2$ mit einer Geraden durch $p$.

Diese Berührungspunkte gehören aber der Curve dritter Ordnung an, welche durch den Büschel $(D_2)$ und den zu ihm projectiven Büschel der in Beziehung auf $p$ bestimmten Polaren erzeugt wird, und $\Phi_5$, ausserhalb der Punkte $\Delta$, in 7 Punkten schneidet.

Unter den oben genannten 11 Punkten gibt es daher zwei Paare der $F_2$; die Involutionscurve ist also zweiter Classe.

Die Paare der $F_2$ werden aus $p$ durch zwei 5-5-deutige Strahlenbüschel projicirt, für welche die beiden Tangenten der Involutionscurve doppelte Coincidenzstrahlen sind; die übrigen 6 Coincidenzen rühren von ebenso vielen Doppelpunkten der $F_2$ her.[1]

Man erkennt leicht, dass $\Phi_5$ keine zweite Paarinvolution trägt. Durch eine $I_2$ werden nämlich die Curven $D_2$ in ein 2-2-deutiges System geordnet, welches nicht mehr als 4 Verzweigungselemente besitzen kann. Die 6 Doppelpunkte der $F_2$ würden aber 6 Verzweigungscurven $D_2$ liefern; das 2-2-deutige System kann somit nur Doppelelemente enthalten; die betreffende $I_2$ ist daher mit $F_2$ identisch.

Es gilt nun der Satz:

Auf der quadrinodalen Curve fünfter Ordnung gibt es nur eine Paarinvolution. Sie besitzt sechs Doppelpunkte und die Verbindungsgeraden ihrer Paare hüllen eine Curve zweiter Classe ein.

**2.** Die Tangenten der Involutionscurve $\psi_2$ begegnen $\Phi_5$ in den Tripeln einer zweiten Fundamentalinvolution, $F_3$, welche $F_2$ begleitet.

---

[1] Das hier benutzte Verfahren lässt sich allgemein anwenden auf die Involutionen, welche durch Curvenbüschel auf einer algebraischen Curve bestimmt werden. In meiner Arbeit: »Involutions quadruples sur courbes biquadratiques« (Archives Neerlandaises, tome 23) habe ich für solche Involutionen die nachstehenden Sätze hergeleitet:

1. Die Involutionscurve einer $J_s$, welche auf einer Curve $C_n$ herausgeschnitten wird durch einen Curvenbüschel $p^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher in $d$ Doppel-Punkten der $C_n$ Basispunkte hat, ist von der Classe

$$\frac{1}{2}(n-1)(2s-n)+d.$$

Jede auf einer Curve vom Geschlechte $g$ durch einen Curvenbüschel bestimmte $I_s$ besitzt $2(g+s-1)$ Doppelpunkte.

3. Zwei derselben Curve vom Geschlechte $g$ angehörende Involutionen $I_s$ und $I_t$ haben $(s-1)(t-1)-g$ gemeinschaftliche Paare.

4. Eine durch ein Curvennetz auf einer Curve $g^{\text{ten}}$ Geschlechtes erzeugte zweistufige Involution $I_t^2$ besitzt $\frac{1}{2}(t-1)(t-2)-g$ neutrale Paare.

Bezeichnet man einen Curvenpunkt mit $a$ oder $\alpha$, je nachdem man ihn zu einem Paare der $F_2$ oder zu einem Tripel der $F_3$ ergänzen will, so erhellt, dass von den beiden nach $a_1 \equiv \alpha_1$ zielenden Tangenten der $\psi_2$ die eine noch den Punkt $a_2$ und ein Tripel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ enthält, indess die zweite die Punkte $\alpha_2, \alpha_3$ nebst einem Paare $b_1, b_2$ trägt.

Dementsprechend bilden die Tangenten $L \equiv \Lambda$ ein 2-3-deutiges System, in welchem der Geraden $L$ durch $a_1, a_2$ die drei Tangenten $\Lambda', \Lambda'', \Lambda'''$ zugeordnet sind, welche ihr in $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ begegnen, wogegen der Geraden $\Lambda$ die beiden Tangenten $L', L''$ entsprechen, welche sie in $a_1, a_2$ treffen.

Die 6 Doppelpunkte von $F_2$ liefern die Doppelelemente, welche den Verzweigungselementen des Systems $(\Lambda)$ entsprechen. Umgekehrt schliesst man aus der Zahl 8 der Verzweigungsstrahlen des Systems $(L)$ auf 8 Doppelpunkte der Involution $F_3$.

Jeder Coincidenzstrahl der 2-3-deutigen Correspondenz berührt $\psi_2$ in einem Punkte, der von einem gewissen Punkte dieses Strahles zu einem Paare der $F_2$ und von zwei anderen Punkten zu einem Tripel der $F_3$ ergänzt wird. Die Curven $\psi_2$ und $\Phi_5$ berühren sich also an fünf Stellen.

Weil die betreffenden Tangenten als gemeinschaftliche Tangenten der beiden Curven doppelt zu zählen sind, ergibt sich aus dem Vorhergehenden für $\Phi_5$ die bekannte Classenzahl 12.

Die Involutionscurve der $F_2$ berührt die Curve $\Phi_5$ in fünf Punkten und hat, ausser den Tangenten in diesen Punkten, noch vierzehn Tangenten mit ihr gemein, welche den sechs Doppelpunkten der $F_2$ und den acht Doppelpunkten der $F_3$ entsprechen.

Anderseits ist die Directionscurve einer 2-3-deutigen Correspondenz zwischen den Tangenten eines Kegelschnittes $\psi_2$ stets eine quadrinodale Curve fünfter Ordnung. Denn die quadratische Tangenteninvolution der $\psi_2$, deren Axe eine beliebige Gerade ist, hat 5 Paare gemein mit jener 2-3-Correspondenz, wonach diese Gerade 5 Punkte der Directionscurve enthält. Weil es ferner in einer $m$-$n$-deutigen Verwandtschaft $\frac{1}{2}m(m-1)+$

$+\frac{1}{2}n(n-1)$ involutorische Paare gibt, muss die Directionscurve 4 Doppelpunkte besitzen.

**3.** Durch die Paare der $F_2$ sind die Curven $D_2$ eindeutig bezogen auf das durch die Tangenten der $\psi_2$ gebildete Strahlensystem vom Index 2.

Es seien nun $P=0$ und $Q=0$ die Gleichungen von zwei dieser Kegelschnitte und $A=0$, $C=0$ die Gleichungen der ihnen entsprechenden Tangenten. Die Gleichung der $\Phi_5$ wird dann erhalten durch Elimination des Parameters $\lambda$ aus

$$A+2\lambda B+\lambda^2 C=0 \tag{1}$$

$$P+\lambda Q=0, \tag{2}$$

(wo $B$ eine lineare Function der Coordinaten bezeichnet).

Man findet

$$\Phi=AQ^2-2BPQ+CP^2=0, \tag{3}$$

indess die Einhüllende $\psi_2$ des Strahlensystems durch

$$\Psi\equiv AC-B^2=0 \tag{4}$$

dargestellt wird.

Ersetzt man 3) durch

$$(AQ-BP)Q=(BQ-CP)P, \tag{5}$$

so erhellt, dass $\Phi_5$ als das Erzeugniss zweier projectiven Büschel

$$P+\lambda Q=0 \tag{2}$$

$$(AQ-BP)+\lambda(BQ-CP)=0 \tag{6}$$

zu betrachten ist.

Ordnet man jeder Curve $D_3$ des kubischen Büschels die demselben Werthe von $\lambda$ entsprechende Tangente der $\psi_2$ zu, so erzeugen die beiden Systeme eine Curve, deren Gleichung durch Elimination von $\lambda$ aus 1) und 6) entsteht; nämlich

$$A(BQ-CP)^2-2B(AQ-BP)(BQ-CP)+C(AQ-BP)^2=0$$

oder aber

$$(AC-B^2)(AQ^2-2BPQ+CP^2)=0.$$

Das betreffende Erzeugniss setzt sich daher aus den Curven $\Phi_5$ und $\psi_2$ zusammen.

Jede Curve $D_3$ schneidet demnach die Verbindungslinie $T$ des auf ihr belegenen Paares der $F_2$ zum drittenmale auf $\psi_2$, also in deren Berührungspunkt mit $T$.

Die Berührungspunkte $\rho_k$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ der Curven $\Phi_5$ und $\psi_2$ genügen den Gleichungen 3) und 4). Eliminirt man zwischen ihnen $A$ oder $C$, so ergibt sich $(AQ-BP)^2 = 0$ oder $(BQ-CP)^2 = 0$; die Punkte $(\rho)$ sind also allen Curven $D_3$ gemeinschaftlich.

Für den Büschel $(D_3)$ ist $\psi_2$ daher die Plücker'sche Curve, d. h. der Ort der Gegenpunkte des Quadrupels $(\Delta)$ in Bezug auf die Curven $(D_3)$.

Die Fundamentalinvolution $F_2$ wird durch den Büschel kubischer Curven bestimmt, dessen Basis aus den Punkten $(\Delta)$ und $(\rho)$ besteht; der Kegelschnitt der fünf Punkte $(\rho)$ berührt in diesen die Curve $\Phi_5$.

**4.** Soll anderseits eine quadrinodale $\Phi_5$ durch einen Kegelschnittbüschel $P+\lambda Q = 0$ und einen zu ihm projectiven kubischen Büschel $M+\lambda N = 0$ erzeugt werden und sind $A = 0$, $C = 0$ die Verbindungsgeraden der auf $P = 0$ und $Q = 0$ belegenen Paare, so müssen $M$ und $N$ beziehungsweise die Formen $AQ-EP$ und $FQ-CP$ besitzen.

Die Curve wird dann durch die Gleichung

$$(AQ-EP)Q = (FQ-CP)P \tag{7}$$

dargestellt.

Aus 7) ersieht man, dass $\Phi_5$ durch

$$P+\lambda Q = 0 \tag{2}$$

mit

$$(AQ-EP)+\lambda(FQ-CP) = 0 \tag{8}$$

oder aber mit

$$(AQ-FP)+\lambda(EQ-CP) = 0 \tag{9}$$

erzeugt werden kann.

Für das Strahlensystem, welches die $F_2$ projicirt, ergibt sich aus 7) und 2) die Gleichung

$$A+\lambda(E+F)+\lambda^2 C = 0 \tag{10}$$

und für seine Einhüllende $\psi_2$

$$\psi_2 \equiv 4AC-(E+F)^2 = 0. \tag{11}$$

Die 5 Basispunkte, welche der Büschel 8) ausser ($\Delta$) besitzt, genügen den Gleichungen $AQ = EP$ und $FQ = CP$, also auch der Gleichung

$$\chi_2 \equiv AC-EF = 0. \tag{12}$$

Diese stellt einen Kegelschnitt $\chi_2$ dar, der offenbar auch 5 Basispunkte des Büschels 9) enthält. Dem oben angeführten Plücker'schen Satze zufolge liegen ferner auf $\chi_2$ die dritten Schnittpunkte der Tangenten von $\psi_2$ mit den ihnen zugeordneten Curven der beiden kubischen Büschel.

Aus der identischen Gleichung

$$4\chi_2-\psi_2 \equiv (E-F)^2 \tag{13}$$

ersieht man, dass die beiden Kegelschnitte $\chi_2$ und $\psi_2$ sich doppelt berühren.

Werden die beiden kubischen Büschel 8) und 9) so auf einander bezogen, dass entsprechende Curven dasselbe Paar der $F_2$ enthalten, so erzeugen sie

$$(E-F)[AQ^2-(E+F)PQ+CP^2] = 0,$$

d. h. die Curve $\Phi_5$ und die Berührungssehne der Curven $\psi_2$ und $\chi_2$. Weil zwei demselben $\lambda$ entsprechende Curven sich sechsmal auf $\Phi_5$ treffen, erhellt nun, dass die beiden Büschel auf der Berührungssehne dieselbe kubische Involution einschneiden.

Jeder Kegelschnitt, welcher mit

$$\psi_2 \equiv AC-B^2 = 0 \tag{14}$$

eine doppelte Berührung eingeht, lässt sich durch die Gleichung

$$\chi_2 \equiv (AC-B^2)+D^2 = 0 \tag{15}$$

darstellen, oder aber, wenn man

$$B+D \equiv E \quad \text{und} \quad B-D \equiv F$$

ansetzt, durch

$$\chi_2 \equiv AC-EF = 0. \tag{16}$$

Führt man dementsprechend in 3) $E+F$ statt $2B$ ein, wodurch die Gleichung

$$\Phi_5 \equiv AQ^2-(E+F)PQ+CP^2=0 \qquad 17)$$

entsteht, so ergibt sich aus dieser die doppelte Erzeugung der $\Phi_5$ durch

$$P+\lambda Q=0$$
$$(AQ-EP)+\lambda(FQ-CP)=0$$

oder

$$P+\lambda Q=0$$
$$(AQ-FP)+\lambda(EQ-CP)=0.$$

Jede Sehne $D=0$ der $\psi_2$ liefert dergestalt ein Büschel $(\chi_2)$ und damit $2\times\infty$ kubische Büschel, die $F_2$ projiciren.

Als Hauptergebniss gilt nun der Satz: Die Punktquintupel, welche die Doppelpunkte der $\Phi_5$ zur Basis eines die $F_2$ erzeugenden kubischen Büschels ergänzen, liegen paarweise auf Kegelschnitten, welche die Involutionscurve der $F_2$ doppelt berühren.

**5.** Die Gleichung

$$AQ+\mu CP=0 \qquad 18)$$

stellt einen kubischen Büschel dar, dessen Basis aus den Punkten $(\Delta)$, den auf den Geraden $A=0$, $C=0$ belegenen Paaren $(a)$, $(c)$ der $F_2$ und deren Schnittpunkt $s$ besteht; offenbar trifft er $\Phi_5$ noch in den Tripeln einer Involution.

Nun stellt aber die Gleichung

$$(AQ+\mu CP)(P+\mu Q)+\lambda(AQ^2-2BPQ+CP^2)=0, \qquad 19)$$

wenn dem Parameter $\mu$ ein bestimmter Werth beigelegt wird, einen Büschel quadrinodaler Curven fünfter Ordnung dar, dessen Basis aus den Doppelpunkten $(\Delta)$, den Paaren $(a)$ und $(c)$, dem auf $P+\mu Q=0$ befindlichen Paare $(m)$ und dem durch die Curve $AQ+\mu CP=0$ bestimmten Tripel $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ besteht.

Dem Werthe $\lambda=-\mu$ entspricht die ausgeartete Curve

$$(A+2\mu B+\mu^2C)PQ=0.$$

Weil nun die zusammengesetzte Curve $PQ = 0$ die Doppelpunkte $(\Delta)$ und die Paare $(a)$, $(c)$ enthält, muss die Gerade

$$A + 2\mu B + \mu^2 C = 0$$

das Paar $(m)$ der $F_2$ und das Tripel $(\mu)$ tragen, d. h. $(\mu)$ ist ein Tripel der Fundamentalinvolution, welche $F_2$ begleitet.

Nachdem nun $P$ und $Q$ zwei beliebig gewählte Curven $D_2$ darstellen, gilt der Satz:

Die begleitende Tripelinvolution wird durch jeden Büschel kubischer Curven bestimmt, dessen Basis die Punkte $(\Delta)$ und zwei Paare der $F_2$ enthält.

**6.** Wählt man die beiden Paare so, dass der Schnittpunkt $s$ ihrer Träger auf der Geraden $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ liegt, so zerfällt eine Curve des betreffenden Büschels in $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und einen Kegelschnitt. Offenbar enthält dieser ausser den beiden Paaren der $F_2$ und den Punkten $\Delta_3$, $\Delta_4$ noch die beiden Punkte $\delta_1$, $\delta_2$, welche mit dem fünften Schnittpunkte von $\Phi_5$ und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ ein Tripel der $F_3$ bilden.

Lässt man $s$ auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ fortschreiten, so werden daher die Paare der $F_2$ zu Quadrupeln geordnet, von denen jedes auf einen durch die Punkte $\Delta_3$, $\Delta_4$, $\delta_1$, $\delta_2$ laufenden Kegelschnitt liegt.

Den beiden Schnittpunkten der Involutionscurve $\psi_2$ mit der Geraden $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ entsprechen zwei Paare der $F_2$, welche sich selbst zu einem, aus zwei Doppelpunkten gebildeten, Quadrupel ergänzen. Demnach:

Es gibt auf $\Phi_5$ sechs Quadrupelinvolutionen, in denen jede Gruppe aus zwei Paaren der $F_2$ zusammengesetzt ist. Jede dieser Involutionen $F_4$ wird erzeugt durch einen Büschel von Kegelschnitten, dessen Basis gebildet wird von zwei Doppelpunkten $\Delta_i$, $\Delta_k$ und den Punkten $\delta_l$, $\delta_m$, welche den mit $\Delta_l$, $\Delta_m$ allineirten Curvenpunkt zu einem Tripel der begleitenden $F_3$ ergänzen.

**7.** Durch projective Zuordnung der Büschel

$$P + \mu Q = 0 \tag{2}$$

$$AQ + \mu CP = 0 \tag{18}$$

erhält man eine Curve fünfter Ordnung $\Psi_5$

$$AQ^2 - CP^2 = 0, \tag{19}$$

welche in ($\Delta$) Doppelpunkte besitzt. Sie unterscheidet sich aber von $\Phi_5$ dadurch, dass sie die Geraden $A=0$, $C=0$ in den Paaren ($a$), ($c$) doppelt berührt und durch den Schnittpunkt $s$ dieser Doppeltangenten geht.

Der durch $\Phi_5$ und $\Psi_5$ bestimmte Büschel

$$(AQ^2 - 2BPQ + CP^2) + \lambda(AQ^2 - CP^2) = 0$$

enthält für $\lambda = -1$ und $\lambda = +1$ beziehungsweise die zusammengesetzten Curven

$$P(CP - BQ) = 0 \quad \text{und} \quad Q(AQ - BP) = 0.$$

Jede Curve dieses Büschels, also auch $\Psi_5$, läuft daher durch die Berührungspunkte ($\rho$) der Curven $\psi_2$ und $\Phi_5$.

Die gemeinschaftlichen Punkte zweier einem bestimmten Werthe von $\mu$ zugeordneter Curven 2), 18) liegen auf der Curve

$$(A - \mu^2 C)Q = 0,$$

d. h. die beweglichen Schnittpunkte der $\Psi_5$ mit dem Kegelschnitte $P + \mu Q = 0$ befinden sich auf der Geraden $A - \mu^2 C = 0$, welche nach dem Curvenpunkte $s$ zielt. Diese Gerade trägt aber ebenfalls das Punktepaar, welches durch $P - \mu Q = 0$ festgelegt wird.

Die Curve $\Psi_5$ ist somit dadurch ausgezeichnet, dass für sie die Involutionscurve $\psi_2$ in einen, als Classencurve doppelt zählenden, Punkt $s$ übergeht. Diese Curve zweiter Art gibt daher Anlass zu dem Satze:

Das Erzeugniss der projectiven Beziehung eines Strahlenbüschels auf die Paare eines in Involution geordneten Kegelschnittbüschels ist eine quadrinodale Curve fünfter Ordnung, zweiter Art.

Den Doppelcurven des zweiten Büschels entsprechen zwei Doppeltangenten der Curve, welche sich auf ihr, in dem Mittelpunkte des Strahlenbüschels, treffen.

Jeder andere Strahl dieses Büschels trägt zwei Paare der Fundamentalinvolution.

Beachtet man, dass $\Psi_5$ durch den Schnittpunkt $s$ zweier Tangenten der $\psi_2$ vollkommen bestimmt wird, so ergibt sich noch:

Durch jeden Punkt der Ebene einer vorgegebenen quadrinodalen Curve fünfter Ordnung, erster Art geht eine Curve zweiter Art, welche die Doppelpunkte mit jener gemein hat und sie in den Berührungspunkten des Fundamentalkegelschnittes und in zwei Paaren der $F_2$ schneidet.

**8.** Schreibt man die Gleichung der $\Psi_5$ in der Form

$$(AQ-GP)Q = (CP-GQ)P,$$

wo $G = 0$ irgend eine Gerade darstellt, so erhellt die Erzeugung der Curve mittelst der projectiven Büschel

$$P+\lambda Q = 0$$
$$(AQ-GP)+\lambda(CP-GQ) = 0.$$

Die Basis des kubischen Büschels besteht aus $(\Delta)$ und 5 Punkten des Kegelschnittes

$$AC = G^2;$$

in Bezug auf diesen ist $s$ der Pol von $G$.

Nachdem jener kubische Büschel durch

$$(AQ+GP)+\lambda(CP+GQ) = 0$$

ersetzt werden kann, gilt der Satz:

Die Punktquintupel der $\Psi_5$, welche die $(\Delta)$ zur Basis eines die $F_2$ erzeugenden kubischen Büschels ergänzen, sind paarweise auf Kegelschnitten belegen, welche die beiden sich auf der Curve treffenden Doppeltangenten berühren.

Es sei die Curve $\Psi_5$ durch die Büschel

$$\begin{aligned} A-\mu^2C &= 0 \\ P+\mu Q &= 0 \end{aligned} \qquad 20)$$

erzeugt.

Legt man durch $\mu_1$ und $\mu_2$ zwei Paare der $F_2$ fest, so stellt

$$(A-\mu_1^2 C)(P+\mu_2 Q)+\lambda(A-\mu_2^2 C)(P+\mu_1 Q)=0 \qquad 21)$$

einen Büschel kubischer Curven dar, dessen Basis aus den Punkten $(\Delta)$, $s$ und den Paaren $(\mu_1)$, $(\mu_2)$ besteht, wonach seine Curven nur noch zwei bewegliche Schnitte mit $\Psi_5$ ergeben und somit die $F_2$ herausschneiden. Demnach:

Je drei Paare der $F_2$ einer Curve zweiter Art liegen in einer kubischen Curve, welche durch $(\Delta)$ und $s$ läuft.

**9.** Weil die Curve erster Art $\Phi_5$ durch den Büschel $AQ+\mu CP=0$ in den Tripeln der begleitenden Fundamentalinvolution getroffen wird, stellt die Gleichung

$$(AQ+\varkappa CP)(A+2\lambda B+\lambda^2 C)+$$
$$+\mu(AQ+\lambda CP)(A+2\varkappa B+\varkappa^2 C)=0 \qquad 22)$$

einen biquadratischen Büschel dar, dessen Basis gebildet wird von $(\Delta)$, $(a)$, $(c)$, $s$, den Tripeln $(\varkappa)$, $(\lambda)$ und dem Schnittpunkte $t$ ihrer Träger. Weil seine Curven $\Phi_5$ je in zwei beweglichen Punkten begegnen, schneidet dieser Büschel die $F_2$ aus. Demnach:

Drei beliebige Paare der $F_2$ und zwei beliebige Tripel der begleitenden $F_3$ können durch eine biquadratische Curve verbunden werden, welche durch die Doppelpunkte geht.

Werden $s$ und $t$ auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ gewählt, so artet eine Curve des biquadratischen Büschels aus in $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und eine kubische Curve durch $\Delta_3$, $\Delta_4$, $(a)$, $(c)$, $(\varkappa)$, $(\lambda)$.

Durch ein Paar und ein Tripel lässt sich daher, auf 6 Arten, eine kubische Curve legen, welche ein zweites Paar und ein zweites Tripel enthält und durch zwei Doppelpunkte läuft.

Nimmt man ferner $(\lambda)$ mit $(a)$ in einer Geraden, so ergibt sich ein kubischer Büschel durch $(\Delta)$, $(c)$, $(\varkappa)$, der $F_2$ festlegt. Durch $(\Delta)$ gehen somit kubische Curven, welche je zwei Paare der $F_2$ nebst einem Tripel der $F_3$ enthalten (vergl. §. 5).

**10.** Durch die Gleichung

$$AQ(P+\varepsilon Q)+\lambda CP(P+\varepsilon Q)+\mu(A+2\varepsilon B+\varepsilon^2 C)PQ=0 \quad 23)$$

wird ein Netz quadrinodaler Curven fünfter Ordnung dargestellt, welche alle die Punkte $(\Delta)$ als Doppelpunkte und ferner die Paare $(a)$, $(c)$ und $(e)$ enthalten. Weil jede dieser Curven $\Phi_5$ in 22 festen Punkten trifft, schneidet der Büschel eine Tripelinvolution ein.

Eliminirt man $B$ zwischen 23) und der Gleichung der $\Phi_5$,

$$AQ^2-2BPQ+CP^2=0,$$

so ergibt sich

$$(P+\varepsilon Q)[(\mu+1)AQ+(\lambda+\varepsilon\mu)CP]=0,$$

d. h. jenes Curvennetz legt dieselben Tripel fest wie der Büschel $AQ+\varkappa CP=0$, bestimmt somit die begleitende $F_3$.

Ersetzt man die bisher beliebig gedachten drei Paare $(a)$, $(c)$, $(e)$ durch drei Paare $(p)$, $(q)$, $(r)$, wobei $p_1$, $q_1$, $r_1$ auf einer nach $\Delta_1$ zielenden Geraden $G$ angenommen sind, so bildet $G$ einen Bestandtheil von allen Curven des Netzes, welche durch einen auf dieser Geraden festgelegten Punkt gehen, und man erhält einen biquadratischen Büschel, dessen Basis von $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$ als Doppelpunkten, den einfachen Punkten $\Delta_1$, $p_2$, $q_2$, $r_2$ und 3 ausserhalb $\Phi_5$ befindlichen Punkten gebildet wird.

Drei Curven dieses rationalen Büschels zerfallen in eine Gerade und eine rationale kubische Curve; sie entsprechen den Punkten, in welchen $\Phi_5$ durch die Seiten des Dreieckes $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$ geschnitten wird. Die kubische Curve, welche der Geraden $\overline{\Delta_3\Delta_4}$ beigeordnet ist, muss die Punkte $\delta_3$, $\delta_4$ enthalten, welche den mit $\overline{\Delta_3\Delta_4}$ allineirten Curvenpunkt zu einem Tripel der $F_3$ ergänzen.

Aus dieser Betrachtung fliesst daher der Satz:

Ergänzt man die Punkte jedes Tripels der durch $\Delta_i$ bestimmten Centralinvolution $f_3^{(i)}$ zu Paaren der $F_2$, so erhält man die Tripel einer neuen Fundamentalinvolution $F_3^{(i)}$, welche erzeugt wird durch einen Büschel kubischer Curven, dessen Basis einen Doppelpunkt $\Delta_k$ und die einfachen Punkte $\Delta_i$, $\Delta_l$, $\Delta_m$, $\delta_l$, $\delta_m$ enthält.

Aus Obigem ersieht man noch, dass der Curvenbüschel fünfter Ordnung, der in jenem Netze durch einen Punkt der

Geraden $\overline{\Delta_3 \Delta_4}$ festgelegt wird, ebenfalls die begleitende $F_3$ erzeugt; eine Curve dieses Büschels zerfällt offenbar in $\overline{\Delta_3 \Delta_4}$ und eine binodale Curve vierter Ordnung.

Drei beliebige Paare der $F_2$ liegen daher allemal mit $\Delta_k, \Delta_l, \delta_k, \delta_l$ in einer biquadratischen Curve, welche Doppelpunkte in $\Delta_i, \Delta_j$ besitzt.

**11.** Durch eine quadratische Transformation, mit den Hauptpunkten $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, übergeht $\Phi_5$ in eine biquadratische Curve $\Phi_4$ mit einem Doppelpunkte in $\Delta_1$,[1] und $F_2$ wird zur Fundamentalinvolution $\Gamma_2$ der mit $\Delta_1$ allineirten Punktepaare.

Werden drei Paare $(a)(b)(c)$ dieser $\Gamma_2$ durch einen Kegelschnitt verbunden, welcher $\Phi_4$ noch in den Punkten $\sigma_1, \sigma_2$ trifft, so muss eine Curve zweiter Ordnung existiren, welche in $\Delta$ jeden Curvenzweig dreipunktig berührt; diese Curve wird somit durch die beiden Doppelpunktstangenten gebildet, und es müssen die Tangentialpunkte $\tau_1, \tau_2$ von $\Delta$ mit $\sigma_1$ und $\sigma_2$ allineirt sein. Ein Kegelschnitt durch die festen Punkte $(\sigma)$, welcher das Punktepaar $(a)$ und den Punkt $b_1$ enthält, trifft $\Phi_4$ daher noch in $b_2$ und in einem dritten Paare der $\Gamma_2$.

Wählt man nun $b_1$ in gerader Linie mit $a_1$ und $\sigma_1$, so artet der betreffende Kegelschnitt aus in zwei Gerade, welche beziehungsweise die Punkte $a_1, b_1, c_1, \sigma_1$ und $a_2, b_2, c_2, \sigma_2$ tragen. Jedem Strahle aus $\sigma_1$ entspricht demnach ein gewisser Strahl aus $\sigma_2$; die beiden damit eindeutig auf einander bezogenen Strahlenbüschel erzeugen einen Kegelschnitt $\Sigma_2$, der durch $\sigma_1, \sigma_2$ und die 6 Antitangentialpunkte des Doppelpunktes läuft.

$\Sigma_2$ enthält ebenfalls die Schnittpunkte der 8 aus $\sigma_1$ an $\Phi_4$ gelegten Tangenten mit den ihnen in der erwähnten Projectivität zugeordneten 8 Tangenten aus $\sigma_2$, indem nämlich die 8 Antitangentialpunkte von $\sigma_1$ aus $\Delta$ in die Antitangentialpunkte von $\sigma_2$ projicirt werden.

Für $\Phi_5$ ergibt sich aus dem Obigen: Je drei Doppelpunkte $\Delta_k \Delta_l \Delta_m$ einer $\Phi_5$ sind die Doppelpunkte einer biquadratischen Curve, welche die sechs Doppelpunkte der $F_2$ enthält und $\Phi_5$ noch in zwei Punkten $\sigma'_i, \sigma''_i$ trifft.

[1] Diese Curve wurde eingehend studirt von Herrn Bobek. (Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 53.)

Die Paare der $F_2$ werden zu dreien verbunden durch rationale biquadratische Curven, welche $\sigma_i'$, $\sigma_i''$ enthalten und in $\Delta_k \Delta_l \Delta_m$ Doppelpunkte besitzen.

Die Kegelschnittbüschel $(\Delta_k \Delta_l \Delta_m \sigma_i')$ und $(\Delta_k \Delta_l \Delta_m \sigma_i'')$ erzeugen zwei fundamentale Tripelinvolutionen, welche einander derart zugeordnet sind, dass jedes Tripel der einen ein gewisses Tripel der anderen zu drei Paaren der $F_2$ ergänzt. Dabei entsprechen die acht Doppelpunkte der ersten Involution, in gewisser Anordnung, den Doppelpunkten der zweiten.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 104_2a

Autor(en)/Author(s): de Vries Jan

Artikel/Article: Über Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten. 46-59