Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven

J. Sobotka.

I.

Verbinden wir vier consecutive Punkte einer Raumcurve durch eine Kugel, so nennen wir diese eine Krümmungskugel der Curve. Die Entwicklung einer Construction der Krümmungskugel in einem Punkte für irgend eine Raumcurve und die Anwendung dieser Construction auf die cubischen Raumcurven und auf die Raumcurven vierter Ordnung erster Art machen den Gegenstand vorliegender Betrachtungen aus. Vorerst möge aber folgende Erwägung vorausgeschickt werden.

1. Es seien u und v die Axen eines Strahlennetzes, h sei der zu beiden normale Hauptstrahl desselben, O der Mittelpunkt der auf ihm durch u und v abgegrenzten Strecke, ω die durch O gelegte Normalebene von h und schliesslich μ die unendlich entfernte Ebene.

Durch das Strahlennetz wird zwischen den Ebenen ω und μ eine Collineation hergestellt, in der sich solche Punkte A, $\mathfrak{A}$ entsprechen, welche Schnitte desselben Strahles sind. Bilden wir die Ebene μ polar in Bezug auf den in ihr liegenden absoluten Kreis ab, so erhalten wir in μ ein Strahlenfeld, welches mit dem Punktefeld in ω correlativ ist und mit ihm somit eine Fläche zweiter Classe P erzeugt. Diese Fläche ist, wie leicht zu sehen, ein orthogonales Paraboloid, für welches O der Scheitel und h die Axe ist; die Winkelhalbirenden u', v' der

Geraden u, v, die man in ω durch O zieht, sind die Scheitelgeraden von P.

Unsere Correlation führt uns zu einer eindeutigen Abbildung der Strahlen des Netzes in die Ebenen des Paraboloids P und umgekehrt.

Da in der eben angeführten Correlation den Punkten einer Geraden m in ω die Strahlen eines Büschels $\mathfrak{M}'$ in μ entsprechen, so wird durch unsere Abbildung die auf m sich stützende Regelschaar des Netzes in den durch $\mathfrak{M}'$ gehenden Ebenenbüschel zweiter Ordnung der Fläche P übergeführt. Dieser Ebenenbüschel hüllt in ω eine Parabel m^2 ein, welche m und ausserdem die Geraden u', v' berührt. Dadurch wird in der Ebene ω dem Strahlenfeld $[m]$ eine Parabelschaar-Schaar $[m^2]$ projectiv zugeordnet.

Es sei nun q ein beliebiger Strahl des Netzes. Durch ihn geht ein ganzer Büschel (R) von Regelschaaren hyperbolischer Paraboloide, welcher in unserem Strahlennetz enthalten ist und in ω einen zu ihm perspectiven Strahlenbüschel erster Ordnung (m) einschneidet, dessen Mittelpunkt der Spurpunkt Q von q ist. Dem Büschel (m) ist nach Vorigem eine Parabelnschaar (m^2) projectiv zugeordnet, deren sämmtliche Parabeln die Spur n der durch Q gehenden Normalebene N des Strahles q zur gemeinschaftlichen Tangente haben. Dabei ist die Reihe der Berührungspunkte der Parabeln in (m^2) mit n zu (m) projectiv. Da jede Parabel m^2 in (m^2) die Spur eines Tangentialebenenbüschels zweiter Ordnung von P ist, welcher durch unsere Abbildung einer Regelschaar R in (R) entspricht, so ist der Berührungspunkt von m^2 mit n der Spurpunkt in ω für die Schnittgerade c der unendlich benachbarten Tangentialebenen von P, die dem Strahle q und dem ihm auf R unmittelbar folgenden Strahle q_R des Strahlennetzes entsprechen. Die Schnittgerade c muss also durch den Berührungspunkt C von N mit dem orthogonalen Paraboloid P gehen.

Daraus erkennen wir, dass sich die Gerade c in einem zu (R) projectiven Büschel, welcher C zum Mittelpunkte hat, bewegt, wenn wir die Fläche R den Büschel (R) durchlaufen lassen. Wenn wir nun die Ebene ω Mittelebene des Strahlennetzes und irgend einen Strahl desselben mit den sämmtlichen ∞^1 in ihm liegenden Nachbarstrahlen ein Strahlensystemelement mit q als Ausgangsstrahl nennen, so können wir unser Ergebniss folgendermassen zusammenfassen:

»Die Normalebenen der Strahlen eines Strahlensystemelementes (q) im Strahlennetze durch deren Spurpunkte in der Mittelebene des Strahlennetzes schneiden sich insgesammt in einem Punkte. Das Strahlensystemelement ist zu demjenigen Strahlenbüschel um diesen Punkt, welcher in der Normalebene des Ausgangsstrahles durch alle übrigen eingeschnitten wird, projectiv.«

2. Nach dieser Abschweifung wenden wir uns unserer eigentlichen Aufgabe zu. Es sei r eine Raumcurve, q irgend ein Strahl ihrer Sehnencongruenz, der also zwei Punkte U, V der Curve verbindet. Diese Sehnencongruenz wird längs des Strahles q von einem Strahlennetz berührt, d. h. sie hat auch die zu q unendlich benachbarten Strahlen mit einem Strahlennetze gemeinsam. Die Tangenten u, v in U, respective V an die Curve r sind die Axen des berührenden Strahlennetzes.

Die Halbirungspunkte aller Sehnen der Curve r liegen auf einer Fläche Γ Diese geht natürlich auch durch den Halbirungspunkt $\underset{\sim}{Q}$ der Sehne q und hat in $\underset{\sim}{Q}$ die Mittelebene ω des berührenden Strahlennetzes zur Tangentialebene. Der Punkt C, zu dem wir zuvor gelangt sind, ist der Mittelpunkt der Kugel, welche r in U und V berührt. Auf diese Weise könnte man zur Construction von Kugeln gelangen, welche eine Raumcurve in zwei Punkten berühren, auch für den Fall, wenn die Punkte conjugirt imaginär sind.

An unseren Erwägungen ändert sich nichts, wenn die Axen u, v unendlich benachbart sind, ohne sich zu schneiden. Dieser specielle Fall auf die Curve r angewendet führt uns zur Construction der Krümmungskugel K derselben in irgend einem auf ihr gelegenen Punkte A.

Es sei q die Tangente der Curve r in A. Die ihr beiderseitig benachbarten Tangenten sind die Axen des zu Hilfe genommenen Strahlennetzes, welchem alle Nachbarstrahlen von q der auf r sich stützenden Sehnencongruenz angehören. Die Mittelebene ω des Netzes wird nun zur Schmiegungsebene von r in A; sie berührt in A nach Früherem auch die alle Sehnen halbirende Fläche Γ

Denken wir uns durch den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{Q}$ von q irgend eine Ebene λ gelegt, so ist auch ihr eine Fläche Γ' in derselben Weise zugeordnet, wie der unendlich fernen Ebene die Fläche Γ. Einem Punkte X in λ entspricht nämlich ein Punkt X' auf Γ' derart, dass (XX') eine Sehne von r ist, und dass beide Punkte X, X' harmonisch conjugirt sind in Bezug auf das Schnittpunktepaar (im besonderen Falle auf jedes Schnittpunktepaar) von (XX') mit r. Man pflegt den Punkt X' den conjugirten Punkt zu X und die Fläche Γ' die conjugirte Fläche zur Ebene λ in Bezug auf die Raumcurve r zu nennen.

Dem Ebenenbündel durch $\mathfrak{Q}$ ist ein zweifach unendliches Flächensystem $[\Gamma']$ in der Art conjugirt. Bezeichnen wir ferner mit q' irgend einen Nachbarstrahl von q in der Sehnencongruenz, mit $\mathfrak{Q}'$ seinen unendlich fernen Punkt und mit $\underset{\sim}{Q}'$ den Halbirungspunkt der unendlich kleinen Sehne von r auf q'; weiter sei $\mathfrak{Q}'_\lambda$ der Schnittpunkt von q' mit λ und $\underset{\sim}{Q}'_\lambda$ der zu ihm in Bezug auf r conjugirte Punkt. Wir sehen sofort, dass die Entfernung $\overline{\underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{Q}'_\lambda}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung ist; es sind somit die Geraden $(A\underset{\sim}{Q}')$, $(A\underset{\sim}{Q}'_\lambda)$ unendlich benachbart und fallen demnach beide in die Schmiegungsebene ω hinein. Demgemäss ist die Schmiegungsebene ω gemeinschaftliche Berührungsebene aller Flächen des Systems $[\Gamma']$. Dies erhellt übrigens sofort auch aus der Construction der conjugirten Punkte in ω.

Nebenbei bemerken wir, dass, was für A gilt, in dieser Hinsicht für jeden Punkt der Curve r seine Giltigkeit beibehält, dass also die Schmiegungsebene von r in irgend einem Punkte gemeinschaftliche Tangentialebene dieses Punktes für die conjugirten Flächen sämmtlicher Ebenen des Raumes ist. Die Curve r ist sonach eine asymptotische Curve für die in Bezug auf sie conjugirte Fläche einer jeden Ebene des Raumes.

Aus dem Erläuterten entnehmen wir folgende Construction des Mittelpunktes C für die Krümmungskugel K der Curve r im Punkte A.

Durch die Tangente q in A an r ist ein Parallelstrahlenbündel bestimmt. Wir wählen in demselben irgend eine Gerade

m, gleichgiltig ob im Endlichen oder in der unendlich entfernten Ebene und denken uns die auf m sich stützende Regelfläche F der Sehnencongruenz von r. Die Tangentialebene ω dieser Fläche in A ist zugleich Schmiegungsebene dieses Punktes für r. Weiter ermitteln wir die in ω liegende Tangente t in A an die Curve m', welche der Geraden m in Bezug auf r in der früher angegebenen Weise conjugirt ist. Bezeichnen wir mit q' den Nachbarstrahl von q auf der Fläche F, so ist der Schnitt c der Normalebene N in A von q mit der Normalebene von q' im Punkte (tq') ein Durchmesser der Kugel K.

Legen wir nun durch den infinitesimalen Flächenstreifen (qq') irgend ein hyperbolisches Paraboloid, welches t zur Leitgeraden hat, und errichten zu jedem Strahle $q_\varkappa$ seiner Regelschaar die Normalebene im Punkte $(tq_\varkappa)$, so werden alle diese Normalebenen eine parabolische Cylinderfläche V einhüllen, welche zu der asymptotischen Ebene des Flächenstreifens normal ist und die Ebene N in der gesuchten Geraden c berührt.

Um die Construction möglichst einfach zu gestalten, wird man etwa in die Schmiegungsebene ω orthogonal projiciren und die Normalebene durch t zu ω als Richtungsebene des eben erwähnten hyperbolischen Paraboloids wählen. Ist F der Berührungspunkt mit F für die projicirende Ebene ρ von q — (rectificirende Ebene von r in A) —, so ist die Spur von V in ω eine Parabel, welche F zum Brennpunkte und t zur Scheiteltangente hat und die Spur der Ebene N in einem Punkte des fraglichen Durchmessers c berührt. Da dieser Durchmesser normal zur asymptotischen Ebene (qm) ist, so ist er hiedurch vollkommen bestimmt.

Hätten wir statt in ω in irgend eine zu t parallele Ebene projicirt, so würden wir natürlich die Normalebene durch t zu dieser Projectionsebene als Richtebene für das Hilfsparaboloid angenommen haben.

Wählt man in dem durch q bestimmten Parallelstrahlenbündel eine zweite ausserhalb der Ebene (qm) liegende Gerade n, so gelangt man durch Wiederholung des gegebenen Verfahrens zu einem zweiten Durchmesser c' von K, dessen Schnittpunkt mit c den Mittelpunkt C von K liefert. Die Senkrechte von C

auf ω ist die zu A gehörige Krümmungsaxe von r; sie trifft ω im Krümmungsmittelpunkte von r in A.

3. Alle Regelflächen F, F',. durch q, die in der Sehnencongruenz von r enthalten sind, haben im Punkte A und in dem ihm auf r unmittelbar folgenden Punkte gemeinsame Berührungsebenen, nämlich ω und die Nachbarebene im Ebenenbüschel durch q. Es sind dies die dem Strahle q der Congruenz gehörigen Brennebenen.

Von dieser Eigenschaft kann man mit Vortheil Gebrauch machen. Um beispielsweise den Berührungspunkt F' der Ebene ρ mit F' zu ermitteln, stellen wir eine Projectivität in dem Ebenenbüschel um q her, indem wir einander diejenigen Berührungsebenen von F, respective F' zuweisen, welche denselben Berührungspunkt haben. Die Doppelebenen dieser Projectivität fallen in ω zusammen; dieselbe ist also nebstdem durch das Entsprechen der Ebenen (qm), (qn) völlig bestimmt. Daraus wird die Ebene im ersten Büschel, welcher die Ebene ρ im zweiten Büschel entspricht, sehr einfach gefunden; sie berührt F in F'

Der Zusammenhang dieser Projectivitäten wird in der zweiten Aufgabe des nächsten Abschnittes in einer für die Darstellung sehr bequemen Weise zum Ausdrucke gebracht.

II.

Construction von Krümmungskugeln der cubischen Raumcurven.

1. Die vorigen Auseinandersetzungen sollen zur Lösung folgender Aufgabe verwendet werden.

Eine cubische Raumcurve r^3 ist durch fünf Punkte A, B, C, D, E und die Tangente q in A gegeben; es soll die Krümmungskugel K der Curve für den Punkt A construirt werden.

Ich nehme in dem durch q bestimmten Parallelstrahlenbündel die Strahlen m und m_1 so an, dass der erste von ihnen etwa durch den Punkt B, der zweite durch den Punkt C geht. Die Sehnen von r^3, die sich auf $\left.\begin{matrix} m \\ m_1 \end{matrix}\right\}$ stützen, bilden eine

Regelschaar $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$ die zu $\left.\begin{matrix}m\\ m_1\end{matrix}\right\}$ in Bezug auf r^3 conjugirte Curve $\left.\begin{matrix}m'\\ m'_1\end{matrix}\right\}$ artet, da $\left.\begin{matrix}m\\ m_1\end{matrix}\right\}$ eine Secante von r^3 ist, in einen Kegelschnitt durch $\left.\begin{matrix}B\\ C\end{matrix}\right\}$ und die Tangente in $\left.\begin{matrix}B\\ C\end{matrix}\right\}$ an r^3 aus. Die Schnittgerade der Ebene $\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\}$ dieses Kegelschnittes mit der Schmiegungsebene ω im Punkte A ist die Tangente $\left.\begin{matrix}t\\ t'\end{matrix}\right\}$ dieses Punktes für die conjugirte Curve.

Daraus geht die nachstehende Anordnung hervor:

α) Wir legen durch B und C die Parallelebene $\varkappa$ zu q und bestimmen in ihr den dritten Schnittpunkt S mit r^3.

Dies kann nach der Chasles'schen Construction bewerkstelligt werden. Ist nämlich A' der Nachbarpunkt von A auf r^3, so schneiden die Flächen des Tetraëders $AA'DE$ die Ebene $\varkappa$ in einem Vierseit, welches mit der Geraden (BC) fünf Tangenten eines Kegelschnittes l^2 bestimmt, dessen von (BC) verschiedene Tangenten durch B und C sich in dem Punkte S durchschneiden.

β) Wir ziehen durch S die Parallele zu q, bis sie (BC) in S' trifft und halbiren in J die Strecke $\overline{SS'}$ Alsdann ist $\beta \equiv (AJB)$, $\gamma \equiv (AJC)$. Denn (CS) ist eine Sehne von r^3, und die Gerade, welche den zum Schnittpunkte von m und (SC) conjugirten Punkt in Bezug auf r^3 mit B verbindet, geht durch den Punkt J und gehört der Ebene β an. Aus gleichen Gründen gehört J auch der Ebene γ an.

γ) Die Secanten von r^3, die sich auf q und $\left.\begin{matrix}(CS)\\ (BS)\end{matrix}\right\}$ stützen, bilden die Leitschaar von $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$ Die Ebene (qD) wird von $\left.\begin{matrix}(CS)\\ (BS)\end{matrix}\right\}$ in einem Punkte durchbohrt, dessen Verbindungsgerade mit D auf q den Berührungspunkt der Ebene (qD) mit $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$ bestimmt. Ebenso ermittelt man den Berührungspunkt der Ebene (qE) mit $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$ Da man überdies die asymptotische Ebene $\left.\begin{matrix}(qm)\\ (qm_1)\end{matrix}\right\}$ kennt, so ist man in der Lage, ebensowohl den Berührungspunkt $\left.\begin{matrix}F\\ F'\end{matrix}\right\}$ der rectificirenden Ebene von r^3 im Punkte A

mit $\left.\begin{matrix}\mathrm{F}\\ \mathrm{F}'\end{matrix}\right\}$ als auch die Schmiegungsebene ω einfach zu ermitteln.

Wie man jetzt weiter fortfährt, um schliesslich die Durchmesser c, c' der Krümmungskugel K zu bekommen, ist dem früher Erläuterten leicht zu entnehmen.

2. Ist die cubische Raumcurve r^3 durch vier Punkte A, B, C, D und den Krümmungskreis k^2 von A gegeben, so kann man bei der Lösung unserer Aufgabe den folgenden Weg einschlagen.

Wir nehmen die Schmiegungsebene ω des Punktes A als erste, seine Normalebene ν als zweite Projectionsebene an. Die Schnittgerade n beider Ebenen ist die Hauptnormale des Punktes A.

Zunächst projiciren wir r^3 etwa von B als Projectionscentrum in die Ebene ω. Die Projection ist ein Kegelschnitt o^2, welcher k^2 in A osculirt und durch die Projectionen von C und D hindurchgeht, demnach also hinreichend bestimmt ist. Die Axe centrischer Collineation zwischen o^2 und k^2, für die A das Collineationscentrum ist, schneidet den Kreis k^2 ausser in A noch in einem Punkte, dessen Verbindungsgerade s mit B eine Sehne von r^3 ist. Wir construiren für einen späteren Zweck diese Sehne; gleichzeitig construiren wir auch die Polarebene der durch B zur Tangente q in A gelegten Parallelen m; ihre Spur t in ω erhält man äusserst einfach. Dieselbe ist die Tangente in A an den zu m in Bezug auf r^3 conjugirten Kegelschnitt m'

Jetzt handelt es sich noch darum, den Berührungspunkt F der rectificirenden Ebene in A mit der Fläche F der auf m sich stützenden Sehnenregelschaar aufzufinden.

Wir nehmen da die Fläche zweiten Grades F′, welche r^3 mit dem Sehnenpaar qs verbindet, zu Hilfe und projiciren nun orthogonal in ω und ν.

Die Ebene (qC) wird von s in einem Punkte durchbohrt, dessen Verbindungsgerade mit C auf q den Berührungspunkt L von (qC) mit F′ einschneidet. In gleicher Weise erhalten wir den Berührungspunkt M von (qD) mit F′ Um die Projectivität der Ebenen des Büschels um q mit der Reihe ihrer Berührungspunkte auf q mit F′ für unsere Darstellung bequem zu vermitteln, construiren wir nach Mannheim ein hyperbolisches Paraboloid P′, welches F′ längs q berührt und ν zur Richtungsebene hat. Dieses Paraboloid enthält die Gerade n und wird in Folge dessen von jeder Ebene durch n noch in einer zweiten Geraden geschnitten. Unter diesen Geraden befindet sich eine G, deren erste und zweite Abbildung in der üblichen Anordnung der Projectionsbilder identisch sind. Diese Gerade liegt bekanntlich in der einen Halbirungsebene χ der durch ν und ω gebildeten rechten Winkel.

Wir wollen, wie man es auch sonst zu thun pflegt, das Bild der ersten Projection eines Gebildes Λ mit Λ_1, das der zweiten mit Λ_2 bezeichnen. Es liefert alsdann der Schnittpunkt der Parallelen zu $n_{1.2}$ durch L_1 mit $(qC)_2$ einen Punkt des Doppelbildes $G_{1.2}$, der Schnittpunkt der Parallelen zu $n_{1.}$ durch M_1 mit $(qD)_2$ einen zweiten. $G_{1.2}$ schneidet $n_{1.2}$ in dem Doppelbilde des Berührungspunktes der Ebene χ mit P′ Überdies ist $G_{1.2}$ parallel zum zweiten Bilde der asymptotischen Ebene durch q für P′, also auch für F′

Um jetzt den fraglichen Punkt F einfach zu ermitteln, denken wir uns für die Fläche F das Berührungsparaboloid P längs q, welches gleichfalls ν zur Richtungsebene hat. Die beiden Paraboloide P′, P berühren sich längs n; es berührt somit auch die Ebene χ beide Paraboloide in demselben Punkte auf n. Demgemäss schneidet die Parallele $H_{1.2}$ durch den Schnittpunkt von $G_{1.2}$ mit $n_{1.2}$ zu dem zweiten Bilde der asymptotischen Ebene (qm) das Bild q_1, wie aus dem Zusammenhange der Figur sofort entnommen werden kann, im Bilde F_1 von F

Dies ist die Construction, auf welche wir zum Schlusse des ersten Abschnittes verwiesen haben.

Der weitere Vorgang wiederholt sich nun. Man fällt nämlich von F die Senkrechte auf t, bis sie etwa in I die Normale n schneidet und trägt $\overline{IA}$ von A aus auf n bis nach I' auf. Die Normale von I' auf (qm) ist ein Durchmesser der Krümmungskugel, welcher von der Normalen a, die man im Mittelpunkte von k^2 zu ω errichtet, im Mittelpunkte der Krümmungskugel K geschnitten wird.

3. Ist die Krümmungsaxe a des Punktes A gegeben, wird in manchen Fällen sich empfehlen, den zu a parallelen

Schmiegungsstrahl aufzusuchen. Derselbe geht durch den Anschmiegungspunkt U der zu q parallelen Schmiegungsebene. Bringt man dann die Tangente des Punktes U an k^3 mit ω zum Schnitte, so ist die Verbindungsgerade m' dieses Schnittpunktes mit A ein zu m associirter Schmiegungsstrahl von r^3. Es ist also m' zu m in Bezug auf r^3 conjugirt und demnach ist hier die zuvor mit t bezeichnete Tangente identisch mit m'

Diese Construction liefert eine schöne Anwendung auf die räumliche Parabel.

Es sei $\mathfrak{U}$ der unendlich ferne Punkt und $\mathfrak{u}$ seine gleichfalls im Unendlichen liegende Tangente der räumlichen Parabel. Die Verbindungsgerade des unendlich fernen Punktes von q mit $\mathfrak{U}$ wählen wir als die mit m bezeichnete Gerade. Da die räumliche Parabel der unendlich fernen Ebene sich in $\mathfrak{U}$ anschmiegt, so ist hier m ein Schmiegungsstrahl von r^3. Der Schnitt der Ebene $(A\mathfrak{u})$ mit ω ist die Gerade $m' \equiv t$ für den Punkt A.

Die Fläche F der auf m sich stützenden Sehnenregelschaar ist ein hyperbolisches Paraboloid. Bewegt sich A auf der räumlichen Parabel, dann bewegt sich F in einem Büschel von Flächen zweiter Ordnung und m' beschreibt eine Cayley'sche Regelfläche dritten Grades, für die $\mathfrak{u}$ die ausgezeichnete Gerade ist.

III.

Construction von Krümmungskugeln der Raumcurven vierter Ordnung erster Art.

1. Wir stellen uns hier zuerst die nachstehende Aufgabe: Eine biquadratische Raumcurve erster Art r^4 ist als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung H_1, H_2 gegeben; man soll die Krümmungskugel K in einem beliebigen Punkte A derselben ermitteln.

α) Die Berührungsebene τ_1 in A an H_1 und die Berührungsebene in A an H_2 schneiden sich in der Tangente q des Punktes A an r^4.

Alle Sehnen der biquadratischen Raumcurve erster Art r^4, welche eine gegebene Sehne derselben ausserhalb der Curve schneiden, bilden allgemein eine Regelschaar.

Von diesem bekannten Satze wollen wir hier Gebrauch machen.

Es sei q die gegebene Sehne und F sei die Fläche zweiter Ordnung, auf der die Sehnenregelschaar liegt, welche r^4 mit q, dem angeführten Satze gemäss, verbindet. Diese Fläche F werden wir selbstverständlich für unsere Construction als die Hilfsregelfläche durch q in der Sehnencongruenz von r^4 annehmen.

Zu allererst haben wir da zu den Punkten von q die zugehörigen Tangentialebenen mit F zu ermitteln.

Durch r^4 ist ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung bestimmt, und wir wissen, dass die Polarebenen irgend eines Punktes L in Bezug auf sämmtliche Flächen des Büschels sich in einer einzigen Geraden l schneiden.

Ist also L ein Punkt auf q, so bestimmen wir den Schnitt l der Polarebenen dieses Punktes in Bezug auf H_1 und H_2; durch l geht dann auch die Polarebene von L in Bezug auf jede Fläche des Flächenbüschels, also auch die Berührungsebene λ in L an F. Bewegt sich L auf q, so beschreibt l einen Kegel zweiter Ordnung, nämlich den zu q in Bezug auf H_1 und H_2 doppelt conjugirten Kegel $\mathfrak{Q}_{1.2}$, dessen Gerade l auf die Punkte von q projectiv bezogen sind, und zwar in der Art, dass die Berührungsbene von F eines jeden Punktes L die correspondirende Gerade l enthält. Hiedurch ist jeder Geraden in der auf q sich stützenden Regelschaar von F eine Gerade des Kegels $\mathfrak{Q}_{1.2}$ projectiv zugeordnet. Das Erzeugniss beider ist eine cubische Raumcurve q', nämlich der von q verschiedene Schnitt der beiden Flächen F und $\mathfrak{Q}_{1.2}$. Die Gerade q ist auch Tangente von q' Sämmtliche Flächen zweiter Ordnung, welche durch q und q' hindurchgelegt werden können, bilden einen Büschel und haben in A eine gemeinschaftliche Berührungsebene — die Schmiegungsebene von q' in A; diese ist die Tangentialebene ω von F in A. Wir ersehen daraus, dass ω auch den Kegel $\mathfrak{Q}_{1.2}$ längs q berührt. Da diese Ebene gleichzeitig, wie wir aus Früherem wissen, die Schmiegungsebene von r^4 in A ist, so sind wir nebenher zu dem folgenden Resultate gelangt.

»Die Schmiegungsebene einer biquadratischen Curve erster Art r^4 in einem Punkte A ist die Berührungsebene längs der Tangente der Curve in A für die conjugirte Kegelfläche dieser Tangente in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung, welcher durch die biquadratische Curve gelegt werden kann.«

Eine andere Herleitung dieses Satzes gab Fr. Machovec in den Sitzungsberichten der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, Jahrgang 1890, S. 142 u. f.

β) In angegebener Weise bestimmen wir also die asymptotische Ebene ε mit der in ihr nebst q enthaltenen Geraden l_ε von $Q_{1.2}$ und weiter noch in zwei für die Darstellung günstig gewählten Punkten von q die Berührungsebenen von F, woraus dann mit Leichtigkeit die Schmiegungsebene ω in A und der Berührungspunkt F der rectificirenden Ebene ρ mit F abgeleitet wird.

Der Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnittes einer der Flächen H_1, H_2 in ω für den Punkt A wird nach bekannten Constructionen einfach erhalten; die Normale a in ihm zu ω ist die zu A gehörige Krümmungsaxe, also ein Durchmesser von K.

γ) Wir ziehen jetzt die Ebene ε näher in Betracht. Sie schneidet die Flächen H_1, H_2 beziehungsweise in den Kegelschnitten k_1^2, k_2^2, welche sich in A berühren und ausserdem in zwei Punkten schneiden, deren Verbindungsgerade m die zu q parallele Erzeugende von F ist. Die Gerade m wird als die Axe centrischer Collineation zwischen k_1^2, k_2^2 für A als Collineationscentrum erhalten. Man bringt k_1^2, k_2^2 mit zwei durch A gelegten Strahlen in K_1, K_1', respective K_2, K_2' zum Schnitte; die Verbindungsgeraden (K_1K_1'), (K_2K_2') schneiden sich in einem Punkte der Geraden m, wodurch dieselbe bereits bestimmt ist.

Die Berührungsebenen in A, K_1, K_1' an H_1 schneiden sich im Pole E_1 von ε bezüglich H_2; die Berührungsebenen in A, K_2, K_2' an H_2 schneiden sich im Pol E_2 von ε bezüglich H_2. Wir construiren thatsächlich diese Pole sowie die Pole M_1, M_2 von m in Bezug auf k_1^2, beziehungsweise k_2^2.

δ) Die Gerade m wählen wir als diejenige in dem durch q bestimmten Bündel, deren conjugirte Curve m' bezüglich r^4 wir nun in Betracht ziehen wollen.

Es sei U irgend ein Punkt auf m und u sei die ausser m durch U gehende Erzeugende von F; alsdann liegt der zu U in Bezug auf r^4 conjugirte Punkt U' auf u einerseits, auf der zu U in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung durch r^4 conjugirten Geraden u' anderseits. Bewegt sich U auf m, so bewegt sich u durch die eine Geradenschaar von F und u' beschreibt bekanntlich eine zur Punktreihe auf m projective Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung C. Die Polaren von m bezüglich der Flächen unseres Flächenbüschels bilden die Schaar der Leitstrahlen auf der Fläche C.

Die Flächen F und C haben die Gerade m gemeinschaftlich und schneiden sich nebstdem noch in einer cubischen Raumcurve; diese ist, wie sich auf Grund unserer Betrachtung ergibt, die zu m in Bezug auf r^4 conjugirte Curve m'

Die Tangente t in A an m', um deren Ermittelung es sich lediglich handelt, ist die Schnittgerade der Tangentialebene γ an C in A mit der Schmiegungsebene ω.

In unserem Falle ist die Fläche C durch die drei Polaren (E_1M_1), (E_2M_2), m der Geraden m bezüglich H_1, H_2, respective F vollkommen bestimmt.

Der Büschel von Ebenen durch l_ε ist projectiv zu der Reihe ihrer Berührungspunkte mit C. Diese Projectivität ist bereits bestimmt, da den Ebenen $[l_\varepsilon m]$, $[l_\varepsilon E_1]$, $[l_\varepsilon E_2]$ beziehentlich die Punkte $(l_\varepsilon m)$, M_1, M_2 correspondiren. Darnach sind wir in der Lage, aus dieser Projectivität die Berührungsebene in A und mithin auch t äusserst einfach zu ermitteln.

Wie man nun die Construction zu Ende führt, soll hier nicht von Neuem wiederholt werden.

2. Ist insbesondere r^4 als Durchdringungscurve zweier Kegel zweiten Grades gegeben, dann vereinfacht sich noch unsere Construction wie folgt.

Sind nämlich S_1, S_2 die Spitzen der Kegel, so suchen wir die weiteren drei Punkte B, C, D von r^4 in der Ebene (S_1S_2A) und deren Tangenten q_B, q_C, q_D, welche mit q, wie leicht zu sehen, ein auf der Fläche F liegendes, windschiefes Vierseit bilden. Ist etwa q_D die Gegenseite von q in diesem Vierseit, so wird aus dem soeben angeführten Grunde q_D von der Ebene ε

in einem Punkte der Geraden m geschnitten, wodurch diese bereits bestimmt ist.

Ebenso ist durch diese Anordnung die Projectivität zwischen dem Ebenenbüschel um q und der Reihe der Berührungspunkte auf q mit F ohneweiters gegeben. Auch die Durchführung der übrigen hier vorzunehmenden Constructionen gestaltet sich besonders einfach.

Wäre r^4 durch die Flächen H_1 und F von vornherein gegeben, so würde man für die Fläche C nicht wie früher zwei Leitgerade, sondern zwei Gerade der Regelschaar, d. h. die in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung conjugirten Geraden l_1, l_2 zweier Punkte auf m bestimmen, was mit Hilfe von F und H_1 allein geschehen kann. Die Transversale durch A zu l_1, l_2 stellt alsdann mit l_3 die Ebene γ fest.

3. Die Durchführung der Construction wird beschwerlicher, wenn die biquadratische Curve r^4 in anderer als vorhin angeführter Art gegeben ist.

Kennen wir beispielsweise nebst dem Punkte A und seiner Tangente q noch sechs weitere, von einander unabhängige Punkte B, C, D, E, F, G von r^4 und sollen wir da die Krümmungskugel K des Punktes A ermitteln, so legen wir durch r^4 zunächst die mit F bezeichnete Fläche und dann noch irgend eine zweite Fläche zweiten Grades H, wodurch die Lösung dann auf den früheren Fall zurückgeführt wird.

Dies geschieht etwa auf Grund des Satzes:

»Wenn eine biquadratische Raumcurve erster Art und eine cubische Raumcurve r^3 einem räumlichen Fünfeck umschrieben sind und eine Sehne s gemein haben, die durch keinen der fünf Eckpunkte geht, so liegen sie mit s auf einer Fläche zweiter Ordnung« (Reye, Geom. der Lage, 3. Aufl., 3. Abth., S. 25).

Um darnach F zu erhalten, denken wir uns eine cubische Raumcurve g^3 durch die Punkte B, C, D, E, F so gelegt, dass sie q zur Sehne hat und construiren die durch G gehende Sehne g von g^3. Die Secanten der Curve g^3, welche sie mit q und g verbinden, liegen bereits auf F.

In derselben Art kann man etwa durch die Punkte B, C, D eine cubische Raumcurve g'^3 legen, welche q in A berührt und

(EF) zur Sehne hat. Die Sehne g' durch G für diese Curve bestimmt mit (EF) eine durch beide gehende Sehnenregelschaar von g'^3, welche auf einer Fläche zweiter Ordnung H liegt.

Da nun, dem citirten Satze gemäss, r^4 die Durchdringungscurve von F und H ist, so können jetzt die vorigen Constructionen angewendet werden. Die unserer eigentlichen Construction vorhergehende Ermittelung der Flächen F und H macht die Durchführung derselben bedeutend umständlicher.

Wir werden auf ähnliche Aufgaben im Folgenden noch einmal zu sprechen kommen.

4. Unsere Erwägungen in diesem Abschnitte gingen hauptsächlich darauf aus, die zur Geraden m des durch q bestimmten Parallelstrahlenbündels in Bezug auf r^4 conjugirte Curve m' zu bestimmen und ihre Tangente t in A zu construiren. War der Krümmungskreis k^2 von r^4 in A gegeben oder liess er sich rasch sonst ermitteln, so schien uns am einfachsten, die zu q parallele Sehne von r^4 als die Gerade m zu wählen. Aber unsere Construction wird im Wesen nicht geändert, wenn m irgend eine Gerade des erwähnten Parallelstrahlenbündels ist.

Es sei also jetzt m irgend eine Gerade, die durch den unendlich fernen Punkt $\mathfrak{Q}$ von q geht.

Die Regelfläche Q, welche durch die auf m sich stützenden Sehnen von r^4 gebildet wird, ist jetzt bei allgemeiner Lage von m, wie man sich leicht überzeugt, eine Fläche achten Grades, welche m zur doppelten Leitgeraden besitzt. In jeder Ebene durch m bekommt man sechs Punkte von m', die auf die Seiten des vollständigen Vierecks, welches durch die vier Punkte von r^4 in dieser Ebene gebildet wird, sich zu je einem vertheilen; weitere Punkte von m' können wir aber nicht erhalten. Es ist also m' eine Raumcurve sechster Ordnung.

Jedem Punkte U von m sind zwei Punkte in Bezug auf r^4 conjugirt; die Verbindungsgerade derselben ist die dem Punkte U in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung durch r^4 conjugirte Gerade u'. Durchläuft U die Gerade m, dann durchläuft u' die zu m in Bezug auf den Flächenbüschel conjugirte Regelschaar. Die Curve m' ist ein Theil der Durchdringung von Q mit der Fläche U der eben erwähnten Regelschaar. Die gesammte Durchdringungscurve von U und Q ist von der Ordnung 16. Die Restdurchdringung wird somit eine Raumcurve zehnter Ordnung sein, welche auf m zwei Doppelpunkte besitzt.

Für unsere Construction genügt indessen zu wissen, dass sie auf der Fläche U liegt. Denn es handelt sich ja nur um die Tangente t in A an m' und diese muss nun in der Schmiegungsebene ω an r^4 in A, gleichzeitig aber auch in der Berührungsebene γ der Fläche U in A liegen; infolge dessen wird sie die Schnittgerade beider Ebenen sein.

Daraus geht die nachstehende Construction der Krümmungskugel K von r^4 in A hervor.

α) Man construirt die zu $\mathfrak{Q}$ in Bezug auf den Büschel von Flächen zweiter Ordnung durch r^4 conjugirte Gerade l_ξ.

β) Man nimmt eine zu q parallele Gerade m an und bestimmt die in Bezug auf den Flächenbüschel conjugirten Geraden l, l' zweier Punkte auf m. Die Transversale dieser Geraden durch A bestimmt mit l_ξ eine Ebene, welche ω in t schneidet.

Die Gerade q bestimmt mit jedem zu ihr in der Sehnencongruenz von r^4 benachbarten Strahle ein windschiefes Flächenelement; man construirt in bekannter Weise den Berührungspunkt desjenigen derartigen Flächenelementes, welches $[qm]$ zur asymptotischen Ebene besitzt, mit der rectificirenden Ebene ρ von r^4 in A nach der Angabe des Artikels 2 im Abschnitt II. Daraus wird dann ein Durchmesser c von K in bekannter Weise gefunden.

γ) Man wiederholt die soeben ausgeführten Operationen auf Grund einer zweiten zu q parallelen, aber nicht in der Ebene $[qm]$ liegenden Geraden m_1 und gelangt zu einem zweiten Durchmesser c_1 von K.

5. Jede Gerade m durch $\mathfrak{Q}$ führt uns zu einer Geraden t durch A in vorbeschriebener Weise. Aber alle Geraden m_1 durch $\mathfrak{Q}$, die in derselben durch q gehenden Ebene liegen, führen uns zu einer einzigen Tangente t, welche in A die entsprechenden conjugirten Curven $m', \ldots$ berührt. Diesen Zusammenhang kann man hier noch von anderer Seite beleuchten und zur Vereinfachung unserer Lösung benützen.

Wir gehen wieder von dem Büschel von Flächen zweiter Ordnung $[F^2]$, welcher durch die biquadratische Raumcurve erster Art r^4 bestimmt ist, aus. Die Pole einer Ebene α in Bezug auf sämmtliche Flächen des Büschels erzeugen bekanntlich eine cubische Raumcurve a^3, welche so der Ebene α zugeordnet ist. Den Punkten von α sind in Bezug auf den Flächenbüschel die Sehnen von a^3, den Strahlen in α die Regelschaaren der Sehnencongruenz von a^3 conjugirt.

Es sei U ein Punkt in α und u' die ihm in Bezug auf den Flächenbüschel $[F^2]$ conjugirte Sehne der Curve a^3. Alsdann ist dem Strahlenbüschel erster Ordnung durch U in der Ebene α derjenige Büschel von Sehnenregelschaaren der Curve a^3, der durch u' geht, projectiv zugeordnet. Alle Flächen dieses Regelschaarenbüschels besitzen in den Schnittpunkten von u' mit a^3 gemeinschaftliche Berührungsebenen. Ferner schneidet die Ebene α den Flächenbüschel $[F^2]$ in einem Kegelschnittbüschel; die Ecken des gemeinschaftlichen Polardreiecks aller Kegelschnitte des eben erwähnten Büschels sind solche Punkte, in denen die Ebene α von drei Flächen des Büschels $[F^2]$ berührt wird, und die also der Curve a^3 auch angehören.

Übertragen wir dies auf unseren Fall, wo die Ebene α durch die Tangente q in A an r^4 gelegt wird.

Es möge da wiederum die Fläche zweiter Ordnung, welche q mit r^4 verbindet, durch F, der zu q in Bezug auf den Flächenbüschel $[F^2]$ conjugirte Kegel durch $Q_{1.2}$ und die dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{Q}$ von q bezüglich $[F^2]$ conjugirte Gerade desselben durch l_ξ bezeichnet werden.

Die Ebene α schneidet unseren Flächenbüschel in einem Büschel von Kegelschnitten, die sich sämmtlich im Punkte A berühren; die Fläche F wird von dieser Ebene ausser in q, noch in einer Geraden e geschnitten. q und e bilden ein Geradenpaar des Kegelschnittbüschels und schneiden sich in dem Berührungspunkte P der Ebene α mit F. Alle Kegelschnitte des eben besagten Kegelschnittbüschels in α besitzen für den Punkt P eine gemeinschaftliche Polare l_α. Ist A^+ der Nachbarpunkt von A auf dieser Polare, dann ist das unendlich schmale Dreieck PAA^+ das Polardreieck des Kegelschnittbüschels. Die cubische Raumcurve a^3, welche der Ebene α bezüglich $[F^2]$ zugeordnet ist, geht also durch den Punkt A und berührt in ihm überdies die Gerade l_α; dass a^3 auch durch den Berührungspunkt P geht, ist für uns von geringerem Interesse.

Einer zu q parallelen Geraden m in α ist eine Fläche des Büschels von Flächen zweiter Ordnung, welcher durch l_ε und a^3 geht, conjugirt; auf dieser Fläche, die in A von der Ebene $(l_\alpha l_\varepsilon)$ berührt wird, liegt die in Bezug auf r^4 conjugirte Curve m' Dies gilt für jede Parallele zu q in α. Demnach ist die Schnittgerade t der Ebene $(l_\alpha l_\varepsilon)$ mit der Schmiegungsebene ω von r^4 in A die gemeinschaftliche Tangente in A an sämmtliche Curven, die zu den zu q parallelen Geraden in α bezüglich r^4 conjugirt sind.

Da l_α durch einen zu P bezüglich r^4 conjugirten Punkt geht, so sind sowohl l_ε als auch l_α Geraden auf dem Kegel $\mathfrak{Q}_{1.2}$, wie im 1. Artikel des III. Abschnittes näher erläutert worden ist.

Man erkennt dies auch daraus, dass die Gerade q dem Parallelstrahlenbüschel in jeder Ebene α durch sie angehört. Denn der Geraden q ist die Regelfläche $\mathfrak{Q}_{1.2}$ conjugirt; auf dieser liegen somit die sämmtlichen cubischen Raumcurven a^3,. die den Ebenen durch q zugeordnet sind, und da dieselben durch A gehen, so müssen sie zu Berührungsgeraden in A die Geraden des Kegels $\mathfrak{Q}_{1.2}$ haben. Nebenbei bemerkt sind deshalb die Tangentialebenen von $\mathfrak{Q}_{1.2}$ Schmiegungsebenen der Curven a^3,...

Bewegt sich P gegen den unendlich entfernten Punkt $\mathfrak{Q}$, dann nähert sich α der asymptotischen Ebene ε von F und der zweite Schnittpunkt von a^3 mit l_ε nähert sich dem Punkte A; fällt schliesslich α mit der Ebene ε zusammen, so wird die Ebene $(l_\alpha l_\varepsilon)$ zur Berührungsebene $\mathfrak{Q}_{1.2}$ längs l_ε und schmiegt sich in A der betreffenden cubischen Raumcurve a^3 an.

Die Tangente q bestimmt mit jeder ihr benachbarten Sehne von r^4 einen infinitesimalen windschiefen Flächenstreifen $\{q_\alpha\}$; wir ordnen wie früher jeder Ebene α durch q denjenigen Flächenstreifen $\{q_\alpha\}$ zu, der α zur asymptotischen Ebene besitzt. Nur in dem Falle, wenn α mit der Schmiegungsebene zusammenfällt, degenerirt der Flächenstreifen $\{q_\omega\}$

Diese Betrachtungen liefern uns die Construction der Krümmungskugel K von r^4 in A wohl in der einfachsten Form, die wir hier noch übersichtlich beschreiben wollen.

α) Wir ermitteln die Fläche zweiter Ordnung F, welche die Tangente q in A an r^4 mit dieser Curve verbindet.

β) Wir bestimmen die conjugirte Gerade l_ξ des unendlich fernen Punktes von q in Bezug auf den durch r^4 gehenden Büschel von Flächen zweiter Ordnung [F^2].

γ) Wir legen durch q irgend eine Ebene α, ermitteln ihren Berührungspunkt P mit F, hierauf die conjugirte Gerade l_α von P in Bezug auf [F^2] und suchen die Schnittgerade t der Ebene $(l_\xi l_\alpha)$ mit der Berührungsebene ω von F in A.

δ) Weiter construiren wir den Berührungspunkt der rectificirenden Ebene von r^4 in A mit dem durch q gehenden in der Sehnencongruenz der Curve r^4 liegenden Flächenstreifen $\{q_\alpha\}$, welcher die Ebene α zur asymptotischen Ebene besitzt, nach Artikel 2, Abschnitt II, woraus dann ein Durchmesser c der Krümmungskugel K in öfters hier benützter Weise erhalten wird.

ε) Wie wir mit Hilfe der Ebene α zum Durchmesser c von K gelangt sind, ebenso rasch gelangen wir auf Grund einer zweiten durch q gelegten Ebene α' zu einem zweiten Durchmesser c' von K, wodurch dann unsere Aufgabe gelöst ist.

Es braucht nicht besonders ausgeführt zu werden, wie sich diese Ergebnisse auf cubische Raumcurven übertragen. Ist nämlich eine cubische Raumcurve r^3 gegeben, so kann man sie durch eine Sehne, welche zwei Punkte M, N auf ihr verbindet, zu einer biquadratischen Raumcurve erster Art ergänzen und durch diese den Flächenbüschel zweiter Ordnung [F^2] legen, in welchem wir die Kegelflächen zweiter Ordnung, welche r^3 von M und N aus projiciren, zu unseren Constructionen verwenden. Als Fläche F wählen wir die Fläche der Sehnenregelschaar, die durch q und (MN) geht. Alles

Übrige folgt aus obiger Construction unmittelbar und liefert auch für r^3 eine einfache Lösung unseres Problems.

IV

Eine zweite Construction von Krümmungskugeln der Raumcurven vierter Ordnung erster Art.

1. Eine sehr einfache Construction der Krümmungskugel K einer cubischen Raumcurve r^3 in irgend einem Punkte derselben habe ich früher einmal entwickelt (cf. Monatshefte für Math. und Phys. V Jahrg.). Sie besteht darin, dass man den Krümmungskreis k^2 von r^3 in A mit r^3 durch eine Fläche zweiten Grades verbindet. Die Normale dieser Fläche in A ist bereits ein Durchmesser von K; ein zweiter Durchmesser dieser Kugel ist die zu A gehörige Krümmungsaxe.

Gelingt es nun, eine cubische Raumcurve r^3 zu ermitteln, die eine gegebene Raumcurve r im Punkte A hyperosculirt, d. h. die mit ihr vier in A unmittelbar aufeinander folgende Punkte gemeinschaftlich hat, dann ist die Krümmungskugel von r^3 in A gleichzeitig auch Krümmungskugel der gegebenen Raumcurve r in demselben Punkte.

Wir wollen noch zeigen, wie diese Construction sich für biquadratische Raumcurven erster Art verwenden lässt.

2. Liegt eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art als Durchdringungscurve zweier Kegel zweiter Ordnung K_1, K_2 mit den Spitzen S_1, respective S_2 vor, und soll in irgend einem Punkte A derselben die Krümmungskugel K construirt werden, so beachte man, dass es unter allen den ∞^4 cubischen Raumcurven, welche r^4 in A hyperosculiren, eine s^3 gibt, welche durch die beiden Kegelspitzen S_1, S_2 geht; diese wollen wir für unsere Construction verwenden.

Diese Hilfscurve s^3 wird von S_1 aus durch einen Kegel zweiter Ordnung S_1 projicirt, welcher mit K_1 vier, in (S_1A) unmittelbar aufeinander folgende Gerade gemeinschaftlich hat. Desgleichen wird s^3 von S_2 aus durch einen Kegel zweiter Ordnung S_2 projicirt, der K_2 längs (S_2A) hyperosculirt. Da man die Kegel S_1, S_2 einfach construiren kann, so wird hiedurch auch s^3 als ihre Durchdringungscurve in der einfachsten Weise ermittelt.

Betreffs der Durchführung möge Folgendes hier Platz finden.

Es seien abermals q die Tangente, ω die Schmiegungsebene und k^2 der Krümmungskreis von r^4 in A; weiter sei k_1^2 der Kegelschnitt auf K_1, k_2^2 der Kegelschnitt auf K_2 und M der Spurpunkt von (S_1S_2) in der Ebene ω. Der Kreis k^2 ist der gemeinschaftliche Krümmungskreis von k_1^2 und k_2^2 im Punkte A.

Der Kegel S_1 schneidet ω in einem Kegelschnitte s_1^2; derselbe geht durch M und ist, da er ja k_1^2 in A hyperosculirt, zu k_1^2 centrisch collinear für den Punkt A als Collineationscentrum und die Gerade q als Collineationsaxe. Diese Beziehung versetzt uns in die Lage, beliebige Punkte von s_1^2 construiren zu können. Wir brauchen aber nur noch einen beliebigen Punkt N_1 von s_1^2 auf diese Weise zu bestimmen, wodurch wir dann sehr einfach die centrisch collineare Beziehung zwischen s_1^2 und dem Krümmungskreise k^2 für A als Collineationscentrum herstellen können. Die Axe dieser Collineation schneidet k^2 in einem Punkte L_1, der k^2 und s_1^2 gemeinschaftlich ist.

Demgemäss ist (S_1L_1) eine Sehne der cubischen Raumcurve s^3, die sich auf k^2 stützt.

Was wir soeben bezüglich des Kegels S_1 durchgeführt haben, wird dann in derselben Weise bezüglich des Kegels S_2 wiederholt. Ist L_2 der Schnittpunkt von k^2 mit dem Kegelschnitt s_2^2, welchen der Kegel S_2 in ω einschneidet, so ist alsdann (S_2L_2) eine zweite, auf k^2 sich stützende Sehne der cubischen Raumcurve s^3.

Somit kennen wir bereits zwei Gerade, nämlich (S_1L_1) und (S_2L_2) der Sehnenregelschaar von s^3 auf der Fläche zweiter Ordnung H, welche k^2 mit s^3 verbindet. Die Transversale dieser Geraden durch A ist eine Gerade der Leitschaar auf H und bestimmt somit mit q die Tangentialebene von H in A. Die Normale im Punkte A zu der soeben erhaltenen Ebene ist ein Durchmesser der Krümmungskugel K in A für die Curve r^4. Ein zweiter Durchmesser ist die Krümmungsaxe von r^4 für den Punkt A. Hiedurch ist auch der Mittelpunkt von K gefunden.

3. Eine cubische Raumcurve s^3 ist auch durch fünf Punkte und eine Sehne eindeutig bestimmt. Wir können somit für eine cubische Raumcurve s^3, welche eine gegebene Raumcurve r in

einem Punkte A hyperosculirt, noch einen Punkt U und eine Sehne u willkürlich annehmen.

Es möge hier gezeigt werden, wie man diesen Umstand bei einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art r^4 ausnützen kann, wenn man wenigstens eine Regelfläche zweiter Ordnung H_1 kennt, die durch r^4 hindurchgeht.

In dem Falle werden wir den Punkt U und die Sehne u der Hilfscurve s^3 auf H_1 wählen. Diese Wahl ist sonst willkürlich und nur durch eine für unsere Darstellung günstige Lage bedingt. Da nun alle Bestimmungsstücke von s^3 auf der Regelfläche H_1 liegen, so liegt die ganze Curve s^3 auf ihr.

Durch die Tangente q in A und die Sehne u ist eine einzige Fläche zweiter Ordnung Q bestimmt, die durch s^3 geht. Wenn wir dieselbe ermittelt haben, so ergibt sich dann s^3 als theilweise Durchdringung von H_1 mit Q; die Restdurchdringung ist eben die Sehne u. Die Transversale der Geraden q, u, die durch U geht, liegt auf Q, und die Ebene (qv) berührt Q im Punkte (qv).

Nun haben wir früher gezeigt, wie man für die Fläche F, welche durch die auf q sich ausserhalb der Curve stützenden Sehnen von r^4 erzeugt wird, zu jeder Ebene durch q den Berührungspunkt findet, und haben ferner kennen gelernt, wie man daraus dann für irgend eine andere beliebig durch q gelegte Sehnenregelfläche von r^4 den Berührungspunkt jeder Ebene durch q findet, wenn der Berührungspunkt einer einzigen von ω verschiedenen Ebene durch q mit dieser Fläche gegeben ist.

So sind wir auch im Stande, den Berührungspunkt X jeder Ebene ξ durch q mit der Fläche Q rasch aufzusuchen. Die Verbindungsgerade des Punktes X mit dem Durchbohrungspunkte von ξ mit u ist alsdann eine Erzeugende von Q. Nach diesem Vorgange construirt man also die Fläche Q selbst.

Man hat jetzt nur die Krümmungskugel für die Durchdringungscurve s^3 von Q mit H_1 zu suchen.

Um die Construction zu vereinfachen, genügt die Bemerkung, dass man über den Punkt U in vorhinein keine Verfügung treffen muss. Jede Sehnenregelfläche durch q enthält die vier in A benachbarten Punkte von r^4, also thut es auch die Fläche G, welche F längs q berührt und durch u geht.

Somit haben wir den folgenden Weg bei der Lösung unseres Problems einzuschlagen.

Wir construiren den Berührungsebenenbüschel um q für die Fläche F, welcher mit irgend einer Sehne u auf einer durch r^4 gehenden Regelfläche zweiter Ordnung H_1 eine zweite Regelfläche zweiter Ordnung G erzeugt. Die Krümmungskugel in A für die cubische Raumcurve, in der sich G und H_1 durchdringen, ist die gesuchte.

Ist der Krümmungskreis k^2 in A von r^4 bekannt, so genügt es, noch drei Punkte von der jetzt erhaltenen cubischen Raumcurve zu ermitteln, um dann K sofort construiren zu können. Dabei wird es sich, wie wir im Vorigen gesehen haben, um die Ermittelung zweier Sehnen der cubischen Raumcurve handeln, die sich auf k^2 stützen. Da könnten wir schon die Sehne u so wählen, dass sie sich auf k^2 stützt; die Construction würde aber keine wesentliche Vereinfachung hiedurch erfahren.

Nach der erläuterten Methode wollen wir zum Schluss noch die folgende Aufgabe durchführen.

Eine biquadratische Curve vierter Ordnung erster Art r^4 ist durch sechs Punkte A, B, C, D, E, F und den Krümmungskreis k^2 des ersten unter ihnen gegeben; es ist die Krümmungskugel K in diesem Punkte für die gegebene Curve zu construiren.

Wir könnten da etwa zunächst den früher citirten Satz (Reye, Geom. der Lage, 3. Abth., S. 25) heranziehen; doch ziehen wir es vor, unserer Lösung die folgende Anordnung zu geben.

α) Wir denken uns abermals die Tangente q in A an r^4 mit dieser Curve durch die Fläche zweiter Ordnung F verbunden.

Für diese Fläche führen wir die Construction des Tangentialebenenbüschels durch q thatsächlich durch. Zu dem Behufe betrachten wir die Ebenen $\lambda \equiv (ABC)$ und $\nu \equiv (DEF)$. Zuerst construiren wir den Kegelschnitt l^2, in welchem F die Ebene λ schneidet. Es sei Q_ν der Schnittpunkt von q mit ν und l_ω die Schnittgerade der Ebene ω von k^2 mit λ. Alle Kegelschnitte, welche l_ω in A berühren und durch B und C gehen, bilden einen Büschel (λ); alle Kegelschnitte, welche durch die Punkte

Q_ν, D, E, F gehen, bilden einen Büschel (ν). Diese Büschel schneiden auf der Geraden $[\lambda\nu]$ zwei Involutionen ein, die ein gemeinsames Punktepaar besitzen. l^2 ist alsdann derjenige Kegelschnitt in (λ), welcher durch dieses gemeinsame Paar geht.

Um l^2 aber linear zu construiren, denken wir uns jedes Paar der Involution, welche durch (ν) auf $[\lambda\nu]$ eingeschnitten wird, mit den Punkten A, B, C je durch einen Kegelschnitt verbunden. Offenbar bilden alle diese Kegelschnitte gleichfalls einen Büschel $(\lambda)'$ und l^2 ist derjenige Kegelschnitt in demselben, der l_ω zur Tangente besitzt.

Wir werden also den vierten Punkt U construiren, durch welchen alle Kegelschnitte von $(\lambda)'$ hindurchgehen. Zuerst suchen wir die Gerade (CU). Dieselbe bildet mit der Geraden (AB) einen Kegelschnitt von $(\lambda)'$ Desshalb haben wir blos (AB) mit $[\lambda\nu]$ in E' zu schneiden und den zweiten Schnittpunkt E'' von $[\lambda\nu]$ mit dem durch Q_ν, D, E, F, E' gehenden Kegelschnitte zu ermitteln, dann ist $(E''C) \equiv (CU)$.

Genau so bringen wir (AC) mit $[\lambda\nu]$ in F' zum Schnitte und ermitteln den zweiten Punkt F'' des durch Q_ν, D, E, F, F' gehenden Kegelschnittes. $(F''B)$ geht gleichfalls durch U und schneidet somit die Gerade $(E''C)$ in U.

l^2 berührt l_ω in A und geht durch B, C und U, ist somit völlig bestimmt. Dadurch ist auch die Fläche F selbst bestimmt. Die Ebene ω berührt diese Fläche in A. Ist ferner D_λ der Schnittpunkt der Ebene (qD) mit l^2, dann ist $(D_\lambda D)$ eine Gerade auf F und trifft q in dem Berührungspunkte von (qD) mit F. Ebenso kann noch etwa der Berührungspunkt der Ebene (qE) mit F ermittelt werden, worauf wir in der Lage sind, für jede Ebene durch q den Berührungspunkt mit F anzugeben.

β) Analog wird etwa die Fläche zweiter Ordnung H_1 bestimmt, welche die Sehne (BC) mit r^4 verbindet. Für diese Fläche möge der Kegelschnitt o^2 in ω gesucht werden.

Ist N der Schnitt von (BC) mit ν und O mit ω, so ziehen wir jetzt die Kegelschnittbüschel (ω) und $(\nu)'$ in Betracht, von denen der erste k^2 in A osculirt und durch O geht, der zweite D, E, F, N zu Grundpunkten hat. Aus der Beziehung von (ω) zu $(\nu)'$ bestimmen wir, ähnlich wie früher, einen Punkt V von o^2. Wir suchen nämlich den zweiten Schnittpunkt Q' der

Geraden $[\omega\nu]$ mit dem Kegelschnitte, welcher durch D, E, F, N und den Schnittpunkt von q mit $[\omega\nu]$ geht und ziehen die Gerade $(\underset{\sim}{Q}'O)$. Ferner suchen wir den zweiten Schnittpunkt $\underset{\sim}{Q}''$ der Geraden $[\omega\nu]$ mit dem Kegelschnitte, der durch D, E, F, N und den Schnittpunkt der Geraden (AO) mit $[\omega\nu]$ geht und ziehen die Gerade $(\underset{\sim}{Q}''A)$. Die Geraden $(\underset{\sim}{Q}'O)$, $(\underset{\sim}{Q}''A)$ schneiden sich in einem Punkte V von o^2.

So haben wir also o^2 gefunden.

Weiter bringen wir die Ebenen (BCD), (BCE), (BCF) mit o^2 ausser in O noch beziehungsweise in den Punkten D_γ, E_γ, F zum Schnitte. Die Geraden (DD_γ), (EE_γ), (FF_γ) liegen auf der Fläche H_1 und bestimmen dieselbe hinlänglich.

γ) Die cubische Hilfscurve s^3, welche r^4 in A hyperosculirt, ist der Schnitt von H_1 mit der Fläche F', welche durch die Gerade (BC) geht und F längs q berührt.

Es reicht hin, drei Punkte X, Y, Z von s^3 zu construiren. Am bequemsten erhalten wir sie in den Ebenen (BCD), (BCE), respective (BCF). Diese mögen von q beziehungsweise in den Punkten X_q, Y_q, Z_q durchbohrt werden, denen die Berührungsebenen ξ, η, ζ mit F' zukommen. Alsdann sind die Schnittpunkte von ξ mit (DD_γ), von η mit (EE_γ) und von ζ mit (FF_γ) die drei verlangten Punkte X, Y, respective Z.

Denn die Gerade (X_qX) ist der Schnitt der Ebene ξ und (BCD); sie schneidet also (BC) und ist demzufolge eine Gerade auf F' Somit ist X der Schnittpunkt der Geraden (X_qX) auf F' mit der Geraden (DD_γ) auf H_1. So verhält es sich auch mit Y und Z.

Da jetzt s^3 durch k^2 und X, Y, Z vollkommen bestimmt ist, so ist der weitere Verlauf der Construction ohneweiters klar. Dieselbe lässt sich in dieser Weise auch in dem Falle durchführen, dass ein Paar oder zwei Paare in den gegebenen Punkten B, C, D, E, F conjugirt imaginär sind.

Unsere Constructionen lassen sich auch noch bequem auf die biquadratischen Raumcurven zweiter Art übertragen, was jedoch hier nicht weiter erörtert werden möge.