Strömung der Elektricität in Rotationsflächen

Leonhard Fleischmann,
cand. math.

§. 1. Strömung der Elektricität in einer unendlich grossen ebenen Platte.

Es bestehe in einem ebenen Flächenstück, durch irgend welche Ursachen bedingt, eine stationäre Elektricitätsströmung. Wir legen ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde und bezeichnen das Potential des Punktes (x, y) mit p; dann muss, da wir stationären Zustand voraussetzten, p bekanntlich der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Die allgemeine Aufgabe besteht nun darin, diese Differentialgleichung unter Berücksichtigung gegebener Bedingungen zu lösen. $p =$ Constans gesetzt stellt uns dann das System der Äquipotentiallinien, die orthogonale Trajectorienschaar des letzteren das System der Strömungslinien dar.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit einem möglichst einfachen Falle: Der Bewegung der Elektricität in einer unendlich grossen ebenen Platte von durchaus gleichem Leitungsvermögen und von gleichmässiger, aber verschwindend kleiner Dicke δ. Wir leiten in einem Punkte E Elektricität zu, dieselbe fliesst nach allen Richtungen gleichmässig ins Unendliche ab. Die Äquipotentiallinien sind dargestellt durch das System der um E als Mittelpunkt gezeichneten Kreise, die Strömungslinien durch die von E ausgehende Geradenschaar. In dem Punkte

(x, y) wirkt, in Richtung der Strömungslinie, die Kraft $K = -\frac{\partial p}{\partial r}$, wenn r den Abstand des Punktes von der Elektrode E bedeutet. Setzen wir nun die Stromintensität, d. h. die durch E in der Zeiteinheit der Platte zugeführte Elektricitätsmenge, gleich J, so trifft in der Entfernung r von E auf die Einheit des längs der Äquipotentialcurve ausgeführten Schnittes die Strommenge $\frac{J}{2\pi r\delta}$; dieser letzteren Grösse ist aber offenbar die Kraft K proportional, somit

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -k \cdot \frac{J}{2\pi r\delta},$$

wobei k Proportionalitätsfactor.

Hieraus durch Integration:

$$p = A \,.\, lr + B, \tag{2}$$

wenn nämlich zur Abkürzung $-\frac{k \,.\, J}{2\pi\delta} = A$ gesetzt wird; B ist eine, bei Potentialausdrücken stets auftretende, willkürliche Constante.

Wir suchen nun den Factor A durch bekannte Grössen auszudrücken; es geschieht dies in folgender Weise: Liegt ein leitender Körper von der Form eines senkrechten Cylinders vor, dessen Querschnitt $= q$ und dessen Länge $= l$, und erhalten wir die eine Endfläche auf dem Potentiale p_1, die andere auf dem Potentiale p_0, wobei $p_1 > p_0$, so findet in dem Cylinder eine Strömung von der ersten Fläche zur zweiten statt, und zwar ist die Stromintensität J proportional dem Querschnitte q, ferner dem Potentialgefälle $(p_1 - p_0)$ l und umgekehrt proportional dem Widerstandscoëfficienten σ des Materials, somit:

$$J = q \cdot \frac{p_1 - p_0}{l} \quad \frac{1}{\sigma}.$$

Als solchen senkrechten Cylinder von verschwindend kleiner Länge dr können wir in unserem Probleme ein Stück der Platte betrachten, das von zwei benachbarten Äquipotentialcurven r und $r + dr$ begrenzt wird. Hier ist der Querschnitt des allerdings in Form eines Reifens gebogenen Cylinders gleich $2\pi r\delta$, ferner $p_1 - p_0 = -dp$, daher das Potentialgefälle $= -\frac{dp}{dr} = -\frac{A}{r}$ (nach Formel 2). Somit

$$J = 2\pi r\delta \cdot \frac{-A}{r} \frac{1}{\sigma} = -2\pi A \cdot \frac{\delta}{\sigma},$$

woraus

$$A = -\frac{J}{2\pi} \frac{\sigma}{\delta}. \tag{3}$$

Wir gehen nun zu einem etwas allgemeineren Probleme über. Wir denken uns jetzt unsere unendlich grosse Platte in zwei Punkten E_1 und E_2 mit den Poldrähten einer Batterie berührt; das vorhin behandelte Problem geht natürlich aus diesem hervor, wenn wir E_2 im Unendlichen annehmen. Die Elektroden besitzen dann die Gestalt sehr kleiner Kreischen von den Radien ρ_1 und ρ_2; letztere seien der Entfernung $\overline{E_1 E_2} = c$ gegenüber als verschwindend klein vorausgesetzt. Durch die Elektrode E_1 trete der Strom in die Fläche ein, durch E_2 trete er wieder aus. Auf dem Rande der Kreisfläche ρ_1 besitzen dann sämmtliche Punkte das gleiche Potential p_1, auf dem Rande der Kreisfläche ρ_2 das gleiche Potential p_2. Wir suchen zunächst wieder die Vertheilung der Spannung in unserer Platte.

Zufolge des linearen Charakters der Differentialgleichung (1) wird unser Integral die Form annehmen:

$$p = A_1 . lr_1 + A_2 . lr_2 + B,$$

wobei r_1 und r_2 die Abstände des betrachteten Punktes (x, y) von den Elektroden bedeuten. In unmittelbarer Nähe der einen Elektrode wird der Einfluss der anderen fast vollkommen verschwinden; an dieser Stelle geht die Strömung genau so vor sich, als ob sich die andere Elektrode in unendlicher Entfernung befände. Diejenigen Äquipotentiallinien, welche den Elektroden unendlich benachbart sind, werden daher von der Form eines Kreises nur unendlich wenig abweichen. Die Betrachtung des sich unmittelbar an den Rand der ersten Elektrode anschliessenden unendlich kurzen Cylinders ergibt in Folge dessen, wie im ersten Probleme, für die in der Zeiteinheit durch E_1 eintretende Elektricitätsmenge:

$$J_1 = -2\pi A_1 \cdot \frac{\delta}{\sigma}.$$

Analog für die zweite Elektrode:

$$J_2 = -2\pi A_2 \cdot \frac{\delta}{\sigma}.$$

Für den stationären Zustand ist erforderlich, dass $J_2 = -J_1$, also $A_2 = -A_1$ ist. Daher nimmt unser Integral die Form an:

$$p = A \,.\, l \frac{r_1}{r_2} + B, \tag{4}$$

wobei wieder

$$A = -\frac{J}{2\pi} \; \frac{\sigma}{\delta}.$$

Als Strömungslinien erhalten wir, wie leicht nachzuweisen, das durch die Punkte E_1 und E_2 gelegte Kreisbüschel, als Curven gleicher Spannung die zu demselben gezeichnete orthogonale Kreisschaar.

Sind die den Elektroden zukommenden Potentialwerthe p_1 und p_2 bekannt, so gestatten die Formeln (3) und (4) die Berechnung der Constanten A, B und der Stromintensität J. Uns interessirt hier die umgekehrte Aufgabe: die Berechnung der Potentialdifferenz $p_1 - p_2$, wenn die Grösse J gegeben ist. Ihrer Herleitung gemäss gilt die Formel (4) nur für Punkte ausserhalb der Elektroden und für Punkte auf dem Rande derselben; für die Punkte innerhalb verliert sie ihre Giltigkeit. Erinnern wir uns daran, dass der Voraussetzung gemäss ρ_1 und ρ_2 sehr klein gegenüber dem gegenseitigen Abstande c der Elektroden, so ist also:

$$p_1 = A \,.\, l \frac{\rho_1}{c} + B$$

$$p_2 = A \,.\, l \frac{c}{\rho_2} + B$$

folglich

oder, wenn wir für A seinen Werth aus (3) einsetzen:

$$p_1 - p_2 = \frac{J}{2\pi} \; \frac{\sigma}{\delta} \; l \, \frac{c^2}{\rho_1 \rho_2}. \tag{5}$$

Für den Gesammtwiderstand, den die Platte der Elektricitätsströmung entgegensetzt, erhalten wir somit nach dem Ohm'schen Gesetze den Werth:

$$W = \frac{p_1 - p_2}{J} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \; l \, \frac{c^2}{\rho_1 \rho_2}. \tag{6}$$

Dieser Widerstand hängt also wesentlich von der Grösse der Elektroden ab; er ist umso kleiner, je grösser die Elektrodenradien, d. h. je besser der Contact.

Mit Einführung dieser Grösse W können wir aus Formel (5) die Stromintensität J, deren Werth von W abhängt, also mit Änderung der Berührungsstellen oder des Contactes variirt, eliminiren. Bezeichnen wir die elektromotorische Kraft unserer Batterie mit E und den Widerstand der Poldrähte mit W', so ist $J = \frac{E}{W + W'}$, somit:

$$p_1 - p_2 = J.W = E \frac{W}{W + W'}, \tag{7}$$

worin noch für W sein Werth aus Formel (7) einzusetzen ist.

Nachdem wir diese Formeln, die den in §. 3 anzustellenden Betrachtungen als Grundlage dienen werden, gewonnen haben, wenden wir uns zunächst einem rein mathematischen Probleme zu.

§. 2. Conforme Abbildung von Rotationsflächen.

Es liege eine beliebige Rotationsfläche vor. Zum Zwecke der Coordinatenbestimmung greifen wir irgend einen Meridian und irgend einen Parallelkreis heraus, von denen aus die Abzählung begonnen wird. Die Lage eines Flächenpunktes ist dann eindeutig bestimmt durch seine, von ersterem an gemessene, geographische Länge λ und seinen Abstand s, abgelesen auf dem Meridiane, von jenem Parallelkreise, beide Coordinaten natürlich mit Vorzeichen behaftet.

Die vorliegende Rotationsfläche soll nun conform, d. h. ähnlich in den kleinsten Theilen, auf eine Ebene abgebildet werden. Wir machen zunächst die Annahme, die abzubildende Umdrehungsfläche habe mit ihrer Axe wenigstens einen reellen Schnittpunkt S_1 gemeinsam; derselbe bilde sich nach S_1' ab. Aus den Symmetrieverhältnissen schliessen wir, dass sich jeder Meridian als Strahl durch S_1' und jeder Parallelkreis als Kreis mit Mittelpunkt S_1' abbilden wird; selbstverständlich schliessen dann zwei solche Strahlen denselben Winkel ein wie die entsprechenden Meridiane. Greifen wir nun auf der Rotationsfläche einen Gürtel heraus, der begrenzt ist von den zwei Parallelkreisen s und $s+ds$, so wird sich als Bild desselben ein Kreisring mit den Radien R und $R+dR$ ergeben; beide Gebilde, die wir als unendlich schmale umgebogene Rechtecke betrachten können, sind einander ähnlich, wenn die Proportion besteht:

$$dR : 2\pi R = ds : 2\pi x,$$

wobei nämlich $2x$ den Durchmesser des Gürtels bedeutet. Daher

$$\frac{dR}{R} = \frac{ds}{x} \quad \text{somit } lR = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{x}.$$

Hieraus erhalten wir die Abbildungsformel:

$$R = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{x}} \tag{8}$$

wobei s_0 willkürliche Constante.

Wir werden also damit anfangen, einen beliebigen Parallelkreis s_0 auf den Einheitskreis der Ebene abzubilden; dann ist aber das Bild jedes anderen Parallelkreises von selbst gegeben. Mit Hilfe der Formel (8) können wir also zu jedem Punkte (s, λ) der Fläche seinen Bildpunkt (R, λ) in der Ebene zeichnen. Dass diese Beziehung zwischen den Flächen- und Ebenenpunkten eine vollkommen eindeutige ist, lässt sich aus der Abbildungsformel sofort erkennen.

Ehe wir jedoch ein Beispiel für die Abbildung einer Rotationsfläche vorführen, wollen wir uns über die geometrische

Bedeutung des Ausdruckes $\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{x}$ Klarheit verschaffen. Wir schalten zu diesem Zwecke zwischen die beiden Parallelkreise s_1 und s_2 weitere $n-1$ Hilfsparallelkreise ein, und zwar so, dass die nun vorliegenden $n+1$ Parallelkreise je in gleichen Abständen, letztere als Bogen auf dem Meridiane gemessen, aufeinander folgen; jeder dieser Abstände wird dann die Grösse $\frac{s_1-s_2}{n} = \Delta s$ besitzen. Auf dem Parallelkreise s_1 nehmen wir einen beliebigen Punkt A an, der Meridian desselben schneide in A' den folgenden Parallelkreis $s_1+\Delta s$; auf letzterem bestimmen wir einen Punkt B so, dass Bogen $A'B = \Delta s$ wird. Der Meridian B treffe in B' den Hilfskreis $s_1+2\Delta s$; auf diesem bestimme den Punkt C so, dass Bogen $B'C = \Delta s$ wird u. s. f. Schliesslich erreichen wir den Parallelkreis s_2 im Punkte Y', von dem aus wir endlich zu dem Punkte Z gelangen. Bezeichnen wir nun die geographischen Längen der Punkte $A, B, C \ldots Z$ der Reihe nach mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ihre Axenabstände mit $a, b, c \ldots$ so ist doch, im analytischen Masse gemessen, $\beta-\alpha = \frac{\Delta s}{b}$, dessgleichen $\gamma-\beta = \frac{\Delta s}{c}$ u. s. w. Daher durch Addition:

$$\zeta-\alpha = \sum_{x=b}^{x=z} \frac{\Delta s}{x}$$

Gehen wir zur Grenze $n = \infty$ über, so wird $\Delta s = ds$, und wir erhalten $\zeta-\alpha = \int_{x=b}^{x=z} \frac{ds}{x}$, oder wenn wir die Grenzen für s einführen:

$$\zeta-\alpha = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{x}$$

Verbinden wir nun die, jetzt mit unendlich kleinem Abstand aufeinander folgenden Punkte $A, B \ldots Z$ durch einen stetigen Linienzug, so erhalten wir eine Anzahl gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke; jener Linienzug schneidet somit sämmtliche Parallelkreise (und Meridiane) unter einem Winkel von 45° Wir haben also jetzt folgenden Satz gewonnen:

Zeichnen wir auf unserer Rotationsfläche eine Spirale, welche sämmtliche Parallelkreise unter einem Winkel von 45° schneidet, so begegnet dieselbe den zwei Parallelkreisen s_1 und s_2 in zwei Punkten, deren Längenunterschied gleich $\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{x}$ ist.

Wir lassen nun zwei Beispiele für die conforme Abbildung von Rotationsflächen folgen:

a) Abbildung eines Rotationsellipsoids. Die Axe $S_1 S_2$ desselben sei $= 2a$, der Äquatordurchmesser $= 2b$; ferner setzen wir $a^2 - b^2 = c^2$. Bezeichnen wir noch den Winkel, den die Flächennormale des Punktes (s, λ) gegen die Umdrehungsaxe bildet, mit ϑ, so ergibt sich nach (8) die Abbildungsformel:

$$R = C . \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{-\frac{c}{b} \cdot \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{c}{b} \cdot \cos \vartheta \right)}$$

wobei C willkürliche Constante.

Lassen wir ϑ von 0° bis 180° wachsen, so durchläuft R sämmtliche Werthe von 0 bis ∞; der Scheitel S_1 bildet sich in den Nullpunkt, der Scheitel S_2 in den unendlich fernen Kreis ab, die Abbildung erstreckt sich eindeutig über die ganze Ebene.

b) Abbildung einer ringförmigen Rotationsfläche. Der Meridian unseres Ringes sei ein Kreis vom Radius a, der Mittelpunkt desselben habe von der Rotationsaxe den Abstand b, wobei $b > a$ vorausgesetzt sei. Denjenigen Parallelkreis, dessen Radius $= a + b$ ist, nennen wir den Parallelkreis $s = 0$; ferner bezeichnen wir den Centriwinkel, den der Punkt $(s, 0)$ mit dem festen Punkte $(0, 0)$ auf dem Meridiankreise $\lambda = 0$ begrenzt, mit φ; dann hat der Radius des Parallelkreises s den Werth $x = b + a . \cos \varphi$, während $ds = a . d\varphi$ ist. Damit wird unsere Abbildungsformel:

$$\frac{dR}{R} = \frac{ds}{x} = \frac{a . d\varphi}{b + a . \cos \varphi};$$

hieraus:

$$R = C . e^{\frac{2a}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)}$$

wobei wieder C willkürliche Constante.

Lassen wir φ sämmtliche Werthe von 0° bis 360° durchlaufen, so haben wir die ganze Ringfläche einmal, und zwar eindeutig, auf die Ebene abgebildet; dem Werthe $\varphi = 0°$ entspricht dabei der kleinste Werth α, dem Werthe $\varphi = 360°$ der grösste Werth β von R. Die Abbildung dieser ringförmigen Fläche erstreckt sich also nicht über die ganze Ebene, sondern füllt nur das zwischen zwei concentrischen Kreisen α und β liegende Gebiet derselben aus.

Es liegt daher nahe, zu untersuchen, welches die charakteristischen Eigenschaften dafür sind, dass sich die Abbildung einer Rotationsfläche über die ganze Ebene erstreckt. Wir gehen aus von der Abbildungsformel:

$$lR = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{x}$$

Sehen wir zunächst ab von unendlich grossen Werthen von s, d. h. von Flächen, welche sich ins Unendliche erstrecken, so ist, wenn wir uns nur an die Definition des bestimmten Integrales erinnern, sofort klar, dass lR nur für $x = 0$ unendlich werden kann; dass umgekehrt für $x = 0$ der Werth lR in der That stets gleich $\pm\infty$ wird, lässt sich analytisch leicht zeigen. Die Betrachtung für unendlich grosse Werthe von s bietet ebenfalls keine Schwierigkeiten; auch für $s = \pm\infty$ wird lR stets gleich $\pm\infty$. Ausser diesen beiden Fällen gibt es keine andern, in denen lR unendlich grosse Werthe annimmt; geometrisch ist dies sofort evident, wenn wir uns die oben für $lR = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{x}$ vermittelst der Spiralen gegebene Deutung vor Augen halten. Wir können daher den Satz aussprechen:

Die Abbildung einer Rotationsfläche erstreckt sich eindeutig über die ganze Ebene,

1. wenn ihr Meridian, in einem Punkte der Axe beginnend, mit Vermeidung des Unendlichen wieder zu einem Punkte der Axe zurückführt, um hier zu enden (Beispiel: Ellipsoid),

oder 2. wenn ihr Meridian, von einem Punkte der Axe ausgehend, ohne dieselbe nochmals zu treffen, ins Unendliche verläuft (Paraboloid), oder 3. wenn ihr Meridian, aus dem Unendlichen kommend, ohne die Axe zu schneiden, wieder dem Unendlichen zustrebt (einschaliges Hyperboloid).

Wir wollen sämmtliche Flächen, die zu einer der drei genannten Classen gehören, unter dem Namen »Rotationsflächen erster Art« zusammenfassen, während wir unter einer »Rotationsfläche zweiter Art« eine Fläche verstehen, deren Meridian eine in sich geschlossene, die Axe nicht schneidende Curve bildet. Den Namen »Rotationsgürtel« schliesslich legen wir jedem von zwei Parallelkreisen begrenzten Theile einer Umdrehungsfläche (erster oder zweiter Art) bei. Mit Benützung dieser Definitionen können wir dann die beiden Sätze aussprechen:

1. Die Abbildung einer Rotationsfläche erster Art erstreckt sich eindeutig über die ganze Ebene.

2. Die Abbildung einer Rotationsfläche zweiter Art füllt, ebenso wie die eines Rotationsgürtels, nur einen Kreisring aus.

Es ist nothwendig, diese Sätze mit aller Schärfe auszusprechen, weil sich auf sie die in §. 3 anzustellenden Betrachtungen stützen werden.

Wir wenden uns nun zu der Abbildung der Elektroden. Es sei auf der Umdrehungsfläche ein sphärischer Kreis mit dem Mittelpunkte E gezeichnet, sein Bild wird dann im Allgemeinen durch eine Curve höherer Ordnung dargestellt; nur wenn die Rotationsfläche eine Kugel ist, erhalten wir als Bild des Kreises wieder einen Kreis. Setzen wir jedoch voraus, dass der sphärische Radius ε jenes Kreises verschwindend klein sei gegenüber den Dimensionen der Rotationsfläche, so ergibt sich, da bei der Abbildung die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen gewahrt bleibt, als Bild unseres Kreischens wieder ein Kreis mit dem sehr kleinen Radius ρ. Der Elektrodenmittelpunkt E besitze die Coordinaten (s, λ), sein Abstand von der Rotationsaxe sei gleich x, sein Bild falle nach $E'(R, \lambda)$. Es betrage nun die Grösse des Elektrodenradius, auf dem Parallelkreise von E abgelesen, μ Grade, so muss auch der Radius der Bildelektrode, auf dem Kreise R abgelesen, die Grösse μ Grade besitzen. Es ist also einerseits $\varepsilon = 2\pi x \cdot \frac{\mu}{360}$, anderseits $\rho = 2\pi R \frac{\mu}{360}$.

Hieraus erhalten wir die Relation zwischen Elektroden- und Bildradius:

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{x}{R} \tag{9}$$

Zum Schlusse dieses Paragraphen lassen wir noch eine höchst wichtige Betrachtung folgen, welche uns wieder aus dem Gebiet rein mathematischer Erwägungen zu unserem physikalischen Probleme zurückführen wird.

Wie in der Theorie der Functionen einer complexen Variablen gelehrt wird, liegt es im Wesen der conformen Abbildung, dass sich die Curven gleicher Spannung wieder als Curven gleicher Spannung und die Strömungslinien wieder als Strömungslinien abbilden. Unsere Rotationsfläche werde nun von einem Strome von der Intensität J durchflossen; durch die Elektrode E_1 trete derselbe in die Fläche ein, durch E_2 trete er wieder aus. Die Elektrodenradien E_1 und E_2, desgleichen die Dicke δ der Fläche seien verschwindend klein; der specifische Leitungswiderstand des Materials sei gleich σ. Wir greifen nun zwei benachbarte Strömungslinien heraus, dieselben begrenzen auf dem Rande der Elektrode E_1 ein Bogenelement, dessen Centriwinkel den sehr kleinen Werth $d\alpha$ Grade besitzt. Die Elektricitätsmenge, welche dieses Bogenelement in der Zeiteinheit passirt, ist dann $i = \frac{d\alpha}{360} \cdot J$. Aus dem von diesen zwei Strömungslinien begrenzten Flächenstreifen schneiden irgend zwei aufeinander folgende Äquipotentiallinien p und $p+dp$ ein unendlich kleines Rechteck von der Breite db und der Länge dl aus; wir haben also wieder einen senkrechten Cylinder vom Querschnitte $db.\delta$ und der Länge dl, die Potentialdifferenz der Endflächen ist $-dp$, daher nach Früherem:

$$i = -\frac{\delta}{\sigma}\,\frac{db}{dl}\,dp. \tag{I}$$

Wir bilden nun die Rotationsfläche conform auf eine Ebene ab. Die Mittelpunkte der Elektrodenbilder bezeichnen wir mit E_1' und E_2', ihre Radien mit ρ_1 und ρ_2. Die Ebene besitze ebenfalls die Dicke δ, der specifische Widerstand des Materials sei wieder gleich σ. Durch E_1' soll ein Strom ein-, durch E_2' wieder austreten; die Intensität desselben habe den gleichen Werth J wie bei der oben betrachteten Rotationsfläche. Das in letzterer gezeichnete Flächenelement ergibt als Bild ein unendlich kleines Rechteck von der Breite db' und der Länge dl'; den begrenzenden Äquipotentiallinien entsprechen die Potentialwerthe p' beziehungsweise $p'+dp'$ Die das Ebenenelement begrenzenden Strömungslinien bestimmen auf der Elektrode E'_1 einen Centriwinkel $d\alpha'$, der wegen der Ähnlichkeit der Abbildung gleich $d\alpha$ sein muss. Daher ist auch $i' = i$. Anderseits folgt aus der gleichen Betrachtung wie oben:

$$i' = -\frac{\delta}{\sigma} \frac{db'}{dl'} dp' \tag{II}$$

Berücksichtigen wir noch, dass $\frac{db}{dl} = \frac{db'}{dl'}$ ist, so folgt aus der Gleichsetzung von (I) und (II):

$$dp = dp'$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir bedenken, dass der Begriff des Potentiales nur ein relativer ist, die wichtige Folgerung:

$$p = p'$$

Lassen wir also die Fläche und ihr Bild von Strömen gleicher Intensität durchfliessen, so besitzt jeder Flächenpunkt das gleiche Potential wie der entsprechende Bildpunkt.

Hieraus folgt sofort, dass die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden bei der Fläche genau denselben Werth besitzt wie bei der Abbildung. Da auch die Stromintensität für beide Fälle die nämliche ist, so schliessen wir aus dem Ohm'schen Gesetze, dass auch die Gesammtwiderstände, welche die Fläche beziehungsweise ihr Bild dem Strome entgegensetzen, einander gleich sein müssen, also $W = W'$ Letzteres Resultat hätten wir direct aus der Thatsache ableiten können, dass für jedes einzelne Flächenelement und sein Bild die Gleichung $w = w'$ besteht.

Wir bemerken noch ausdrücklich, dass bei der Herleitung dieser Sätze nicht vorausgesetzt wurde, dass die Abbildung der Fläche die ganze Ebene ausfülle; diese Sätze gelten vielmehr allgemein.

Wir haben jetzt alle erforderlichen Vorbereitungen getroffen und können nun unser eigentliches Problem in Angriff nehmen.

§. 3. Strömung der Elektricität in Rotationsflächen erster Art.

Eine beliebige Rotationsfläche erster Art, von der wir nur voraussetzen, dass ihr Meridian keinen Doppel- oder mehrfachen Punkt besitze, sei in eine Stromleitung vermittelst der Elektroden E_1 und E_2 eingeschaltet. Wir fragen zunächst nach der Potentialvertheilung auf der Fläche.

Wir bilden zu diesem Zwecke die Rotationsfläche in eine Ebene ab; die Abbildung erstreckt sich dann über die ganze Ebene. Die Elektrodenmittelpunkte sollen als Bildpunkte E'_1 und E'_2 liefern. Die Coordinaten eines beliebigen Flächenpunktes bezeichnen wir wieder mit (s, λ), diejenigen von E_1 und E_2 mit (s_1, λ_1), beziehungsweise (s_2, λ_2); die Axenabstände der beiden letzteren Punkte seien gleich x_1, beziehungsweise x_2. Die entsprechenden Punkte der Bildebene seien dargestellt durch (R, λ), beziehungsweise (R_1, λ_1) und (R_2, λ_2). Die Radien der in Form sehr kleiner Kreise gegebenen Flächenelektroden setzen wir gleich ε_1 und ε_2, die Radien ihrer Bilder gleich ρ_1 und ρ_2, die Entfernung $E'_1E'_2$ sei gleich c. Setzen wir voraus, dass ε_1 und ε_2 verschwindend klein seien gegenüber der gegenseitigen Entfernung der beiden Flächenelektroden, so muss dies auch in Bezug auf ρ_1, ρ_2 und c gelten.

Schicken wir nun durch die Ebene einen Strom von der gleichen Intensität J, wie sie der die Fläche passirende Strom besitzt, so ist nach den Sätzen des vorigen Paragraphen das Potential p eines beliebigen Punktes (s, λ) der Fläche identisch mit dem seines Bildpunktes (R, λ), vorausgesetzt natürlich, dass Fläche und Ebene dieselbe Dicke δ und denselben specifischen Widerstand σ des Materials besitzen. Benützen wir also die in §. 1 für die Potentialvertheilung in einer unbegrenzten Ebene gefundene Formel (4), so erhalten wir:

$$p = A\,.\,l\,\frac{r_1}{r_2} + B,$$

wenn nämlich r_1 und r_2 die Abstände des betreffenden Bildpunktes von den Bildelektroden bedeuten. Nun ist aber doch

$$r_1^2 = R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \, . \cos(\lambda - \lambda_1) =$$
$$= RR_1 \left[\frac{R}{R_1} + \frac{R_1}{R} - 2 \cos(\lambda - \lambda_1) \right]$$

und

$$r_2^2 = RR_2 \left[\frac{R}{R_2} + \frac{R_2}{R} - 2 \cos(\lambda - \lambda_2) \right]$$

daher

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{R_1}{R_2} \; \frac{\frac{R}{R_1} + \frac{R_1}{R} - 2 \cos(\lambda - \lambda_1)}{\frac{R}{R_2} + \frac{R_2}{R} - 2 \cos(\lambda - \lambda_2)}$$

Damit wird, wenn wir den constanten Werth $\frac{A}{2} \cdot l \frac{R_1}{R_2}$ gleich in die willkürliche Constante C mit aufnehmen:

$$p = \frac{A}{2} \cdot l \, \frac{\frac{R}{R_2} + \frac{R_1}{R} - 2 \cos(\lambda - \lambda_1)}{\frac{R}{R_2} + \frac{R_2}{R} - 2 \cos(\lambda - \lambda_2)} + C.$$

Aus der Abbildungsformel (8) folgt aber unmittelbar:

$$\frac{R}{R_1} = e^{\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{x}} \quad \text{und} \quad \frac{R}{R_2} = e^{\int_{s_2}^{s} \frac{ds}{x}}$$

so dass wir für das Potential des Punktes (s, λ) den Werth erhalten:

$$p = \frac{A}{2} \cdot l \, \frac{e^{\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{x}} + e^{\int_{s}^{s_1} \frac{ds}{x}} - 2 \cos(\lambda - \lambda_1)}{e^{\int_{s_2}^{s} \frac{ds}{x}} + e^{\int_{s}^{s_2} \frac{ds}{x}} - 2 \cos(\lambda - \lambda_2)} + C, \qquad (10)$$

wobei $A = -\frac{J}{2\pi} \; \frac{\sigma}{\delta}$.

Der für p gefundene Ausdruck enthält die beiden Grössen $\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{x}$ und $\int_{s_2}^{s} \frac{ds}{x}$; diese hängen nur von der Form des Gürtels ab, der die beiden Elektroden und den betrachteten Punkt (s, λ) enthält, sie sind jedoch unabhängig von der Gestalt der Rotationsfläche ausserhalb dieses Gürtels. Dies liefert uns den Satz:

»Schalten wir eine Rotationsfläche erster Art vermittelst zweier Elektroden in eine Stromleitung ein und betrachten dann auf derselben einen Gürtel, der die beiden Elektroden enthält, so ist die Potentialvertheilung, und somit auch die Strömung, innerhalb dieses Gürtels vollkommen unabhängig von der Gestalt der Rotationsfläche ausserhalb desselben. Wie wir uns diesen Gürtel auch zu einer Rotationsfläche erster Art ergänzt denken mögen (eine Änderung von δ oder σ natürlich ausgeschlossen), stets ist die Strömung und die Potentialvertheilung innerhalb dieses Gürtels dieselbe.«

Geometrisch ist dieser Satz sofort einleuchtend, wenn wir bedenken, dass für alle so entstandenen Umdrehungsflächen die Abbildung genau dasselbe Bild ergibt.

Wir stellen uns nun die weitere Aufgabe, den Widerstand W zu berechnen, welchen die Rotationsfläche dem Strome entgegensetzt.

Dieser Widerstand ist, wie wir am Schlusse des vorigen Paragraphen gesehen haben, identisch mit dem der unendlich grossen Bildebene; wir erhalten somit gemäss Formel (6):

$$W = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\delta} \cdot l \frac{c^2}{\rho_1 \rho_2}$$

Nun ist aber nach Formel (9):

$$\rho_1 = \varepsilon_1 \frac{R_1}{x_1} \quad \text{und} \quad \rho_2 = \varepsilon_2 \frac{R_2}{x_2},$$

somit:

$$\rho_1 \rho_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{R_1 R_2}{x_1 x_2},$$

während $c^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2 R_1 R_2 . \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$. Damit wird:

$$W = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\delta} l \left\{ \frac{x_1 x_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} - 2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right] \right\}.$$

Zufolge der Abbildungsformel (8) ist aber $\frac{R_1}{R_2} = e^{\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{x}}$ wir erhalten daher für den Widerstand W den Werth:

$$W = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\delta} l \left\{ \frac{x_1 x_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[e^{\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{x}} + e^{\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{x}} - 2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right] \right\} \qquad (11)$$

Für die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden ergibt sich nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$p_1 - p_2 = J.W$$

Wir sehen zunächst wieder, dass der Widerstand, den die Fläche der Elektricitätsbewegung entgegensetzt, wesentlich abhängt von der Grösse der Elektroden; je besser der Contact, desto kleiner der Widerstand.

Weiter bemerken wir, dass der für W gefundene Ausdruck nur Glieder enthält, die durch die Form des von den Parallelkreisen s_1 und s_2 begrenzten Gürtels bedingt sind; er ist jedoch unabhängig von der Gestalt der ausserhalb dieses Gürtels gelegenen Theile der Rotationsfläche. Dies liefert uns den Satz:

»Schalten wir eine Rotationsfläche erster Art vermittelst zweier Elektroden in eine Stromleitung ein, so ist der Widerstand, den die Fläche dem Strome entgegensetzt, und somit auch die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden nur abhängig von der Gestalt des durch die Elektroden begrenzten Gürtels. In welcher Weise wir diesen auch zu einer Rotationsfläche erster Art ergänzen mögen, stets erhalten wir für den Widerstand und die Potentialdifferenz denselben Werth.«

So können wir z. B. folgendes Experiment anstellen: Wir verfertigen uns einen Rotationscylinder aus dünnem Kupferblech und versehen denselben oben und unten mit einem Deckel aus demselben Material; diesen Cylinder schalten wir in eine Stromleitung ein und messen dann die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden. Dann schneiden wir von dem Cylindermantel oben und unten je einen Streifen ab und setzen die beiden Deckel wieder auf; haben wir dafür gesorgt, dass bei dieser Manipulation der Contact nicht geändert wurde, so muss sich jetzt für den Spannungsunterschied zwischen den beiden Elektroden wieder genau derselbe Werth ergeben wie bei der ersten Ablesung.

Nachdem wir die oben gestellte Aufgabe, die Berechnung des Widerstandes der Fläche, allgemein gelöst haben, wenden wir uns einem speciellen Falle zu. Die Elektroden sollen jetzt nicht mehr beliebig auf unserer Rotationsfläche angebracht sein, sondern sollen auf demselben Parallelkreise liegen. Es ist also jetzt $s_2 = s_1$ und $x_2 = x_1$ vorausgesetzt. Die in Formel (11) enthaltene Grösse $\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{x}$ nimmt dann den Werth 0 an, und wir erhalten:

$$W = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sigma}{\delta} \quad l \left\{ \frac{x_1^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \left[2 - 2\cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\delta} \quad l \frac{4x_1^2 . \sin^2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

Setzen wir nun die geradlinige Entfernung $\overline{E_1 E_2}$ der beiden Flächenelektroden gleich a, so ist doch $2x_1 . \sin \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} = a$; wir finden somit für den Widerstand der Rotationsfläche den Werth:

$$W = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\delta} \quad l \frac{a^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}. \tag{12}$$

Dieser Ausdruck enthält keine Grössen mehr, die von der Gestalt der Umdrehungsfläche abhängen. Genau denselben Werth würden wir auch für W erhalten, wenn die Strömung in einer unendlich grossen Ebene mit den beiden Elektroden ε_1 und ε_2, deren gegenseitige Entfernung $= a$, vor sich ginge; vergleiche hierüber Formel (8).

Wir können somit den Satz aufstellen: »Schalten wir eine Rotationsfläche erster Art so in eine Stromleitung ein, dass die beiden Elektroden auf denselben Parallelkreis zu liegen kommen, so ist der Widerstand, den die Fläche dem Strome entgegensetzt, nur abhängig von der Grösse der Elektroden und deren gegenseitiger, längs der Sehne gemessenen, Entfernung; er ist jedoch vollkommen unabhängig von der Form der Rotationsfläche. Denselben Widerstand würden wir auch erhalten, wenn wir die Umdrehungsfläche durch eine unbegrenzte Ebene ersetzen würden, die Grösse der Elektroden aber und ihre gegenseitige Entfernung ungeändert liessen.«

Wenden wir diesen Satz auf die Kugel an, so gelangen wir zu dem schon früher von Herrn Prof. Boltzmann veröffentlichten, jedoch in anderer Weise abgeleiteten Resultate, dass der Widerstand einer Kugelschale, die wir an zwei beliebigen Stellen mit den Poldrähten einer Stromquelle berühren, unabhängig ist von dem Kugelradius und denselben Werth besitzt wie der Widerstand einer unendlichen Ebene, auf der sich die Elektroden in derselben Distanz befinden (siehe 52. Bd. dieser Sitzungsberichte, 1865).

Wir wollen damit unsere Untersuchungen über die Bewegung der Elektricität in Rotationsflächen erster Art abschliessen. Es wäre nun noch das gleiche Problem für Rotationsflächen zweiter Art und ausserdem für Rotationsgürtel zu lösen; diese beiden Aufgaben werden wir jedoch a. O. behandeln.