©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über die Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten

Prof. Dr. **A. Wassmuth.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1895.)

Das von Gauss[1] 1829 gegebene Princip des kleinsten Zwanges, das er selbst ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik nannte, hat in seiner weiteren Verfolgung ein eigenthümliches Schicksal erlitten. Obwohl die Wichtigkeit dieses Princips vielfach[2] anerkannt wurde, so ist man doch selbst in neueren Lehrbüchern der Mechanik nicht weit über die ursprünglich gegebene Darstellung hinausgekommen. Der Grund mag darin gelegen sein, dass Gauss selbst keine »analytische« Formulirung seines Princips gegeben hat. Allerdings hat schon Scheffler[3] 1858 den Ausdruck für den Zwang Z, das ist für die zu einem Minimum zu machende Function abgeleitet und gefunden, dass

$$Z = \Sigma m \left[\left(x'' - \frac{X}{m}\right)^2 + \left(y'' - \frac{Y}{m}\right)^2 + \left(z'' - \frac{Z}{m}\right)^2\right]$$

sei, wo sich die Summe über alle Massenpunkte m mit den Beschleunigungen x'', y'', z'' und den Kraftcomponenten X, Y, Z erstreckt; doch hat erst Lipschitz[4] 1877 klar nachgewiesen, dass man bei der Aufstellung der Minimumsbedingung von Z die Beschleunigungen x'', y'', z'' als veränderlich, die Coordinaten x, y, z und die Geschwindigkeiten x', y', z' aber als constant

[1] Gauss, Werke V. Crelle IV.

[2] Lagrange, Mecan. anal. II, S. 360. Note de M. Bertrand.

[3] Scheffler, Z. f. M. und Ph. III.

[4] Lipschitz, Borch. Journ. Bd. 82, S. 323.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

ansehen müsse. Lipschitz war es auch[1], der in Z an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten allgemeine Variabeln, das ist solche, die die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen, einführte, indem er eine gewisse Covariante aufstellte, die bei dem Princip des kleinsten Zwanges zu einem Minimum zu machen ist. Das Studium dieser so bedeutenden Arbeit verlangt, da sie die Kenntniss zweier Arbeiten desselben Autors über seine Untersuchungen in Betreff der homogenen Functionen von n Differentialen[2] voraussetzt, immerhin ziemliche Mühe, Zeit und Vorkenntnisse; nur so erklärt sich die auffallende Thatsache, dass die physikalische Literatur sich der gebrachten Ideen nicht weiter bemächtigte. Eine unten gegebene, ungemein kurze Ableitung der Transformationsgleichung, die ganz auf physikalischer Grundlage beruht, dürfte daher nicht unwillkommen sein.

Es liege die Aufgabe vor, in dem Ausdrucke für den Zwang

$$Z = \sum_1^n {}_i Z_i = \sum_1^n {}_i m_i \left[\left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i} \right)^2 + \left(y_i'' - \frac{Y_i}{m_i} \right)^2 + \left(z_i'' - \frac{Z_i}{m_i} \right)^2 \right]$$

statt der rechtwinkligen Coordinaten $x_i y_i z_i$ der n Punkte die von einander unabhängigen, die Bedingungsgleichungen identisch erfüllenden Veränderlichen $p_1 p_2 \ldots p_k$ einzuführen, wobei etwa $x_i = f_1^i(p_1 \ldots p_k)$, $y_i = f_2^i(p_1 \ldots p_k)$ und $z_i = f_3^i(p_1 \ldots p_k)$ gesetzt sei. Setzt man zur Abkürzung: $\frac{\partial x_i}{\partial p_\mu} = f_{1\mu}^i$, $\frac{\partial y_i}{\partial p_\mu} = f_{2\mu}^i$ etc., so werden die Variationen:

$$\delta x_i = f_{11}^i . \delta p_1 + f_{12}^i \delta p_2 + \ldots + f_{1k}^i \delta p_k,\ \delta y_i = \ldots,\ \delta z_i = \ldots$$

und analog, aber nur wenn die Bedingungen die Zeit explicit nicht enthalten, die Geschwindigkeiten:

$$x_i' = f_{11}^i p_1' + \ldots + f_{1k}^i p_k'$$

u. s. w. und die lebendige Kraft:

$$L = \sum_1^n {}_i L_i = \frac{1}{2} \sum a_{\mu\nu} p_\mu' p_\nu' \qquad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots k)$$

---

[1] L. c. S. 330.

[2] Bd. 70 und 72 desselben Journals.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Man betrachte nun die Variation einer Function H — sie fällt im Falle einer Kräftefunction mit der Energie zusammen — die gegeben ist durch:

$$\delta H = \sum_{1}^{n} {}_i [(m_i x_i'' - X_i)\delta x_i + \cdot \quad \cdot]$$

so erhält man hieraus bei Einführung der obigen Werthe von δx_i, δy_i, δz_i und Vertauschung der Reihenfolge der Summirungen:

$$\delta H = \sum_{1}^{k} {}_\mu \delta p_\mu \sum_{1}^{n} {}_i [(m_i x_i'' - X_i) f_{1\mu}^i + \quad \cdot]$$

Nun gilt bekanntlich, wenn $P_{i,\mu} = X_i f_{1\mu} + Y_i f_{2\mu} + Z_i f_{3\mu}$ ist, die Identität:

$$(m_i x_i'' - X_i) f_{1\mu}^i + (m_i y_i'' - Y_i) f_{2\mu}^i + (m_i z_i'' - Z_i) f_{3\mu}^i =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L_i}{\partial p_\mu'} - \frac{\partial L_i}{\partial p_\mu} - P_{i\mu} = Q_{i\mu}$$

so dass sofort nach Ausführung der Summation, wenn

$$\sum_{1}^{n} {}_i Q_{i\mu} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p_\mu'} - \frac{\partial L}{\partial p_\mu} - \sum_{1}^{n} {}_i P_{i\mu} = Q_\mu$$

gesetzt wird, die bekannte Gleichung:

$$\delta H = \sum_{1}^{k} {}_\mu \delta p_\mu . Q_\mu = Q_1 \delta p_1 + \quad . + Q_k \delta p_k$$

resultirt.

Es lässt sich nun für δH bei Einführung des Zwanges Z noch ein anderer Ausdruck gewinnen. Die Möglichkeit beruht darauf, dass man hat:

$$f_{1\mu}^i = \frac{\partial x_i}{\partial p_\mu} = \frac{\partial x_i'}{\partial p_\mu'} \text{ auch } = \frac{\partial x_i''}{\partial p_\mu''},$$

 ©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

weshalb

$$\delta H = \sum_1^k{}_\mu \delta p_\mu \,.\, \sum_1^n{}_i \left[(m_i x_i'' - X_i) f_{1\mu}^i + \quad .\right] =$$

$$= \sum_1^k{}_\mu \delta p_\mu \,.\, \sum_1^n{}_i \left[(m_i x_i'' - X_i) \frac{\partial x_i''}{\partial p_\mu''} + . \quad \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1^k{}_\mu \delta p_\mu \sum_1^n{}_i \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial p_\mu''} \left[(m_i x_i'' - X_i)^2 + . \quad .\right]$$

oder es folgt:

$$\delta H = Q_1 \delta p_1 + . \quad . + Q_k \delta p_k = \frac{1}{2} \sum_1^k{}_\mu \delta p_\mu \,.\, \frac{\partial Z}{\partial p_\mu''} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial p_1''} \delta p_1 + . \quad . + \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial p_k''} \delta p_k.$$

Hieraus folgt: »Ist $\delta H = 0$, d. h. gilt das D'Alembert'sche Princip, so ergibt sich hieraus wegen der Unabhängigkeit der δp: $\frac{\partial Z}{\partial p_1''} = 0 \,. \quad \frac{\partial Z}{\partial p_k''} = 0$, d. h. das Gauss'sche Princip, und umgekehrt folgt aus dem letzteren das erstere; beide Principien sind völlig gleichwerthig«. Des Weiteren ergibt sich:

$$Q_r = \frac{1}{2} \frac{\partial Z}{\partial p_r''} \,.$$

Nun ist bekanntlich[1]

$$\frac{\partial Q_\rho}{\partial p_r''} = a_{\rho r} = a_{r\rho}$$

und daher:

$$\frac{\partial Z}{\partial p_r''} = \frac{\partial Z}{\partial Q_1} \frac{\partial Q_1}{\partial p_r''} + . \quad . = a_{1r} \frac{\partial Z}{\partial Q_1} + . \, . \, . + a_{kr} \frac{\partial Z}{\partial Q_k} = 2\, Q_r.$$

Setzt man darin der Reihe nach $r = 1, 2, . \; . k$, so erhält man k lineare Gleichungen, deren Determinante $D = (a_{\mu\nu})$ nicht verschwindet. Ist $A_{\mu\nu} = \frac{\partial D}{\partial a_{\mu\nu}}$ eine der Unterdeterminanten, so gibt die Auflösung:

---

[1] Wassmuth, Über die Anwendung des Principes des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik. Wied. Ann. 54, S. 166 (oder Sitzber. d. k. bair. Akad. 1894, S. 226 und 222).

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = \frac{1}{D}[A_{11}Q_1 + A_{12}Q_2 + \ldots + A_{1k}Q_k]$$

u. s. w., woraus man schliesst, dass der Zwang

$$Z = \frac{1}{D}\sum A_{\mu\nu}Q_\mu Q_\nu + \varphi(p_1 p_1' p_2 p_2' \ldots)$$

ist; die Function φ, welche nur die p und ihre ersten Differentialquotienten nach der Zeit enthält, muss dazu kommen, weil bei der früheren Differentiation nur die p'' als veränderlich angesehen wurden. Durch diese Formel ist die Transformation des Zwanges Z in allgemeine Coordinaten insoweit durchgeführt, als es die Anwendung des Gauss'schen Princips verlangt. Auch die (hiezu nicht nöthige) Bestimmung des φ unterliegt keiner Schwierigkeit.

Was nun die Wichtigkeit des Gauss'schen Principes betrifft, so möge noch einmal[1] daran erinnert werden, dass, wenn die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft bei einem physikalischen Problem gegeben sind, die Minimumseigenschaft des Zwanges Z ein Gesetz für das System ausdrückt. Dies wird umso mehr zur Geltung kommen, je mehr das Streben vorherrscht, für eine Reihe von Theorien Beschreibungen durch mechanische Analogie, wie W. Voigt sie nennt, zu geben. Für die Elektrodynamik habe ich die Anwendung schon gegeben und für die Thermodynamik ebenfalls schon aufgestellt.

Da der Zwang Z sämmtliche Lagrange'sche Gleichungen: $Q_1 = 0 \ldots Q_k = 0$ in sich vereiniget, so wird das Gauss'sche Princip dann diesen Gleichungen vorzuziehen sein, wenn gerade die Vereinigung derselben angestrebt wird. So z. B. in dem Falle einer Saite, die man sich aus discreten Punkten aufgebaut denkt.

Welchen Werth das Princip als Grundgesetz hat, zeigt wohl am besten die Thatsache, dass Hertz[2] auf dieses Princip und das Trägheitsgesetz seine ganze Mechanik aufbaut.

---

1 Wassmuth, l. c. 167.

2 Hertz, Principien der Mechanik. Seite 185, Nr. 391.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 104_2a

Autor(en)/Author(s): Wassmuth A.

Artikel/Article: Über die Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten. 281-285